Elektronické obvody

interaktivní studijní materiál

© Jiří Hospodka

KATEDRA TEORIE OBVODŮ
Fakulta elektrotechnická

ČVUT
ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Předmluva

Vážený uživateli. Právě jsi otevřel elektronický studijní materiál pro podporu výuky elektrotechniky a elektroniky. Jedná se o soubor přednášek doplněných o vysvětlující text, které lze tématicky rozdělit do několika částí. V první části (kapitoly 1 až 6) jsou uvedeny základy elektrických obvodů. Následují kapitoly 7 až 9, které jsou úvodem do popisu lineárních systémů, základních vlastností přenosových funkcí a aproximací modulových charakteristik analogových filtrů. Kapitoly 10 až 12 popisují chování elektronických zpětnovazebních soustav a základních obvodů s ideálními i reálnými operačními zesilovači. Kapitoly 13 a 14 pak stručně uvádí principy funkce základních elektronických prvků. Jejich použití pro zesilování signálu je uvedeno v obsáhlejších kapitolách 15 a 16. Následující kapitoly zahrnují úvod do vybraných aplikací elektronických obvodů, jako je implementace analogových filtrů (viz také aplikaci SYNTFIL), principy oscilátorů a obvodová realizace napájecích zdrojů. Problematiku pak uzavírá kapitola 20 s velmi stručným úvodem do problematiky obvodů s rozprostřenými parametry. V závěru je uveden dodatek ilustrující 14 laboratorních úloh k vybraným tématům i další popis některých návrhových technik. Cílem publikace není podat podrobný popis uvedených témat, což i vzhledem k rozsahu ani není možné. Většina kapitol se snaží ukázat zejména základy dané problematiky a až na výjimky nezachází do podrobností.

Elektronická verze dokumentu je „interaktivní“: většina schémat je provázána s odpovídajícími zapojeními v aplikaci grafického editoru elektrotechnických schémat (GEEC) s připravenými analýzami, které lze vyvolat

kliknutím na příslušný obrázek. Uživatel tak může jednoduše měnit hodnoty prvků, modifikovat zapojení a ověřovat jak symbolické, tak numerické výsledky „on-line“ provedených analýz. Dále jsou nadpisy kapitol a podkapitol provedeny jako hyperlinky, které vedou na videozáznam přednášky i laboratorních experimentů.

Upozornění

Tento dokument slouží pouze pro studijní účely, nemá konečnou podobu a může být časem upravován a doplňován. Distribuce, kopírování, převod do tištěné podoby a použití díla nebo jeho částí pro jiné než studijní účely, je povoleno pouze se svolením autora. Právní doložka je uvedena na poslední straně tohoto dokumentu.

Poděkování

K vypracování díla přímo či nepřímo přispěli kolegové i někteří moji studenti. Na tomto místě jim patří dík za to, že svými náměty, inspirací i novým pohledem na „svět elektroniky“ pomohli při vytváření tohoto dokumentu.

Zvláštní poděkování patří mým studentům Ing. Filipovi Paulů, Ing. Ondřeji Bukovskému i Matyáši Vaškovi za realizaci interaktivní aplikace GEEC, mému kolegovi Ing. Janu Bičákovi, Ph.D. za poskytnutí zdrojového kódu knihovny PraCAn i správci serveru Ing. Janu Vrbatovi, Ph.D. za cenné rady při tvorbě aplikace.

Dík patří i mojí rodině, bez jejíž trpělivosti a pochopení by tento dokument nevznikl.

V Praze 7. ledna 2026 Jiří Hospodka verze: 1.9

Obsah

1 Veličiny a prvky elektrických obvodů **I-1**
1.1 Elektrické veličiny I-2
1.1.1 Elektrické napětí I-2
1.1.2 Elektrický proud I-4
1.1.3 Okamžitý výkon I-5
1.1.4 Práce elektrického proudu a napětí I-5
1.2 Rozdělení elektrických obvodových veličin I-6
1.3 Základní elektrické prvky I-7
1.3.1 Rezistor – elektrický odpor I-8
1.3.2 Kapacitor I-13

1.3.3 Induktor I-16
1.3.4 Ideální napěťový zdroj I-19
1.3.5 Ideální proudový zdroj I-20
1.3.6 Ideální řízené zdroje I-21
1.3.7 Lineární vázané induktory I-22

2 Základní metody analýzy elektrických obvodů, stejnosměrný ustálený stav (SUS) II-1
2.1 Kirchhoffovy zákony II-2
2.1.1 První Kirchhoffův zákon II-2
2.1.2 Druhý Kirchhoffův zákon II-3
2.2 Řazení základních elektrických prvků II-4
2.2.1 Sériové řazení rezistorů II-4
2.2.2 Paralelní řazení rezistorů II-5
2.2.3 Sériové řazení kapacitorů II-6
2.2.4 Paralelní řazení kapacitorů II-7
2.2.5 Sériové řazení induktorů II-8
2.2.6 Paralelní řazení induktorů II-9
2.2.7 Řazení ideálních napěťových zdrojů II-10
2.2.8 Řazení ideálních proudových zdrojů II-11
2.3 Analýza elementárních obvodů ve stejnosměrném ustáleném stavu (SUS) II-13
2.3.1 Elementární příklady s řazením zdrojů II-16

2.3.2 Metoda postupného zjednodušování . . . II-17
2.3.3 Theveninův a Nortonův teorém . . . II-24
2.3.4 Princip superpozice . . . II-29
2.3.5 Výkon v SUS . . . II-31
2.3.6 Reálné zdroje napětí a proudu . . . II-33

3 Obvodové rovnice pro analýzu elektrických obvodů III-1
3.1 Metoda uzlových napětí . . . III-3
3.2 Metoda smyčkových proudů . . . III-5
3.3 Typy obvodových rovnic podle . . . III-10

4 Přechodné děje 1. a 2. řádu IV-1
4.1 Přechodné děje 1. řádu . . . IV-3
4.1.1 Shrnutí řešení přechodných dějů 1. řádu . . . IV-21
4.1.2 Časové děje při buzení akumulačního prvku ideálním zdrojem napětí nebo proudu . . . IV-22
4.2 Přechodné děje 2. řádu . . . IV-25

5 Řešení obvodů v harmonickém ustáleném stavu (HUS), kmitočtové charakteristiky V-1
5.1 Chování základních elektrických prvků v HUS . . . V-3
5.2 Metoda popisu obvodových veličin pro analýzu lineárních obvodů v HUS . . . V-6
5.3 Výkony v obvodech HUS . . . V-13

5.4 Kmitočtové charakteristiky . . . V-25
5.4.1 Použití kmitočtových charakteristik . . . V-30
5.4.2 Bodeho aproximace kmitočtových charakteristik . . . V-34
5.4.3 Aproximace členů $\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_x}\right)$ kmitočtových charakteristik . . . V-35
5.4.4 Kmitočtová charakteristika násobné konstanty H_0. . . . V-39
5.4.5 Kmitočtová charakteristika členu $j\omega$ . . . V-39
5.5 Rezonance . . . V-44
5.5.1 Sériový rezonanční obvod (SRO) . . . V-46
5.5.2 Paralelní rezonanční obvod (PRO) . . . V-51
5.5.3 Časové odezvy rezonančního obvodu . . . V-54
5.5.4 Ztrátové parametry cívky a kondenzátoru . . . V-58
5.6 Vícefázové obvody v HUS . . . V-60

6 Periodický neharmonický ustálený stav (PNUS) VI-1
6.1 Analýza obvodů v periodickém neharmonickém ustáleném stavu (PNUS) . . . VI-2
6.2 Výkony v obvodech periodického neharmonického ustáleného stavu . . . VI-6
6.2.1 Kvalitativní parametry obvodů a signálů . . . VI-15

7 Metody popisu lineárních obvodových systémů VII-1
7.1 Dynamický systém . . . VII-2
7.1.1 Základní dělení systémů podle charakteru signálů . . . VII-2

7.1.2 Klasifikace a popis obvodových modelů se soustředěnými parametry . . . VII-3
7.2 Charakterizace lineárních časově invariantních systémů . . . VII-4
7.3 Popis LTI systémů . . . VII-5
7.3.1 Popis LTI systémů v časové oblasti . . . VII-6
7.3.2 Popis LTI systémů v obrazové oblasti . . . VII-12
7.3.3 Diagram souvislostí systémového popisu LTI systémů . . . VII-37
7.4 Dvojbranový (vnější) popis LTI systémů . . . VII-44
7.4.1 Vnitřní popis LTI systému (obvodové veličiny ve všech uzlech) . . . VII-44
7.4.2 Imitanční popis – impedanční parametry $\mathbf{Z}$ . . . VII-45
7.4.3 Imitanční popis – admitanční parametry $\mathbf{Y}$ . . . VII-46
7.4.4 Hybridní (smíšený) popis – sériově-paralelní parametry $\mathbf{H}$ . . . VII-47
7.4.5 Hybridní (smíšený) popis – paralelně-sériové parametry $\mathbf{K}$ . . . VII-47
7.4.6 Kaskádní (přenosové) parametry $\mathbf{A}$ . . . VII-48
7.4.7 Zpětně kaskádní parametry $\mathbf{B}$ . . . VII-48
7.4.8 Vztahy mezi dvojbranovými parametry . . . VII-49
7.4.9 Základní řazení dvojbranů a určení parametrů při jejich spojování . . . VII-51

8 Úvod do kmitočtových filtrů, vlastnosti přenosových funkcí filtrů **VIII-1**
8.1 Definice kmitočtového filtru a jeho základní typy . . . VIII-2
8.1.1 Ilustrace chování ideálních filtrů v časové oblasti . . . VIII-3
8.1.2 Základní oblasti použití analogových filtrů . . . VIII-5

8.2 Přenosové funkce filtrů . . . VIII-13
8.2.1 Vlastnosti soustav s přenosovou funkcí 1. řádu . . . VIII-14
8.2.2 Vlastnosti soustav s přenosovou funkcí 2. řádu . . . VIII-22
8.2.3 Rekapitulace . . . VIII-39

9 Úvod do syntézy kmitočtových filtrů **IX-1**
9.1 Jak navrhnout filtr? Motivace . . . IX-2
9.1.1 Toleranční schéma filtru typu dolní propusti (LP) . . . IX-4
9.2 Aproximace modulové charakteristiky NLP . . . IX-6
9.2.1 Kmitočtové normování dolní propusti . . . IX-6
9.2.2 Maximálně plochá charakteristika – Butterworthova aproximace . . . IX-8
9.2.3 Stejnoměrná aproximace v propustném pásmu – Čebyševova aproximace . . . IX-12
9.2.4 Stejnoměrná aproximace v nepropustném pásmu – inverzní Čebyševova aproximace . . . IX-15
9.2.5 Stejnoměrná aproximace v propustném i nepropustném pásmu – Cauerova aproximace IX-17
9.3 Porovnání vlastností základních aproximací modulové charakteristiky . . . IX-20
9.3.1 Souvislost parametrů přenosových funkcí a jejich charakteristik . . . IX-24
9.4 Kmitočtové transformace a normování . . . IX-36
9.4.1 Transformace dolní propusti . . . IX-36
9.4.2 Transformace horní propusti . . . IX-37
9.4.3 Transformace pásmové propusti . . . IX-38
9.4.4 Transformace pásmové zádrže . . . IX-42

10 Zpětnovazební soustavy **X-1**
10.1 Princip zpětné vazby . . . X-2
10.2 Klasifikace ZV podle velikosti vratného rozdílu . . . X-3
10.3 Klasifikace ZV podle obvodového uspořádání . . . X-4
10.3.1 Vliv obvodového uspořádání ZV na vstupní a výstupní odpor . . . X-5
10.4 Obecné blokové uspořádání obvodové ZV soustavy . . . X-8
10.5 Vliv ZZV na změnu zesílení zesilovače A' . . . X-16
10.6 Vliv ZZV na šumové vlastnosti . . . X-17
10.7 Vliv ZZV na linearitu obvodu . . . X-19
10.8 Vliv ZZV na dynamické vlastnosti soustavy . . . X-23
10.8.1 Kmitočtové vlastnosti napěťového zesilovače se ZZV . . . X-23
10.8.2 Kmitočtové vlastnosti transimpedančního zesilovače se ZZV . . . X-25
10.8.3 Dynamické vlastnosti zpětnovazebních struktur vyšších řádů . . . X-26
10.8.4 Stabilita zpětnovazebních soustav . . . X-31

11 Ideální operační zesilovač a operační sítě **XI-1**
11.1 Operační zesilovač – motivace . . . XI-2
11.2 Ideální operační zesilovač (OZ) . . . XI-5
11.3 Neinvertující a invertující zesilovač s ideálním OZ . . . XI-6
11.4 Analýza obvodů s ideálním OZ . . . XI-9
11.5 Sumátor signálů s ideálním OZ . . . XI-10

11.6 Invertující zesilovač s vyšším vstupním odporem . . . XI-11
11.7 Superpozice dvou signálů pomocí ideálního OZ . . . XI-13
11.8 Převodníky proud-napětí a napětí-proud . . . XI-14
11.9 Rozdílový (diferenční) zesilovač . . . XI-15
11.9.1 Vlastnosti klasického zesilovače . . . XI-15
11.9.2 Ideální rozdílový zesilovač . . . XI-17
11.9.3 Reálný rozdílový zesilovač . . . XI-19
11.9.4 Rozdílový zesilovač realizovaný pomocí operačního zesilovače . . . XI-20
11.9.5 Přístrojový zesilovač . . . XI-21
11.10 Integrátor s OZ . . . XI-22
11.11 Derivátor s OZ . . . XI-25
11.12 Zesilovač s potlačením nízkých kmitočtů . . . XI-27
11.13 Negativní impedanční konvertor . . . XI-28
11.14 Izolační zesilovač . . . XI-29
11.15 Vzorkovací (Sample & Hold) obvod . . . XI-30
11.16 Invertující operační usměrňovač . . . XI-31
11.17 Neinvertující operační usměrňovač . . . XI-33
11.18 Zesilovač absolutní hodnoty . . . XI-34
11.19 Porovnávání analogového signálu – komparátory . . . XI-36
11.19.1 Invertující komparátor s hysterezí . . . XI-39

11.19.2 Neinvertující komparátor s hysterezí XI-40

12 Reálné vlastnosti operačního zesilovače **XII-1**
12.1 Reálný operační zesilovač XII-2
12.2 Statické chyby reálného OZ XII-9
12.2.1 Vliv napěťové nesymetrie OZ na invertující zapojení XII-10
12.2.2 Vliv vstupních proudů OZ na invertující zapojení XII-11
12.2.3 Vliv napěťové nesymetrie a vstupních proudů OZ na integrátor XII-12
12.2.4 Vliv konečného zesílení OZ na základní operační sítě XII-13
12.2.5 Potlačení souhlasné složky signálu (CMRR) XII-17
12.3 Základní dynamické parametry OZ XII-19
12.3.1 Kmitočtová závislost zesílení OZ XII-19
12.3.2 Vliv kmitočtové závislosti zesílení OZ na základní zapojení XII-20
12.3.3 Časové odezvy dané dominantním pólem přenosu XII-22
12.3.4 Vliv kmitočtové závislosti zesílení OZ na ztrátový integrátor XII-25
12.3.5 Rychlost přeběhu XII-27
12.4 Makromodel operačního zesilovače XII-34
12.5 Vliv reálných vlastností OZ na nelineární zapojení XII-35
12.5.1 Vliv reálných vlastností OZ na operační usměrňovač XII-36
12.6 Příklady vyráběných OZ a jejich parametry XII-40

13 Základní elektronické prvky a jejich modely **XIII-1**
13.1 Polovodič . . . XIII-2
13.1.1 Vlastní (intrinzický) polovodič . . . XIII-2
13.1.2 Nevlastní polovodič . . . XIII-3
13.2 Vytvoření PN přechodu . . . XIII-4
13.3 Rozložení náboje v PN přechodu . . . XIII-5
13.4 PN přechod s vnější polarizací . . . XIII-6
13.5 Polovodičová dioda . . . XIII-7
13.5.1 Obvodový model diody . . . XIII-9
13.5.2 Základní použití diody jako spínače . . . XIII-10
13.6 Tranzistory . . . XIII-11
13.6.1 Struktura bipolárního tranzistoru a jeho princip . . . XIII-12
13.6.2 Obvodové modely bipolárního tranzistoru . . . XIII-14
13.6.3 Struktura unipolárního tranzistoru typu MOSFET . . . XIII-22
13.6.4 Princip funkce tranzistoru typu MOSFET . . . XIII-23
13.6.5 Statické charakteristiky tranzistoru typu MOSFET . . . XIII-24
13.6.6 Struktura unipolárního tranzistoru typu JFET a jeho princip . . . XIII-28
13.6.7 Statické charakteristiky tranzistoru typu JFET . . . XIII-30
13.6.8 Matematický popis a modelování tranzistorů FET . . . XIII-32

14 Elektronické spínače elektrických signálů **XIV-1**

14.1 Dioda – jednosměrný spínač řízený vlastním napětím . . . XIV-2
14.2 Diak – obousměrný spínač řízený vlastním napětím . . . XIV-5
14.3 Tyristor – jednosměrný spínač řízený externím signálem . . . XIV-6
14.4 Triak – obousměrný spínač řízený řídícím signálem . . . XIV-10
14.5 Tranzistor jako řízený spínač jednosměrného proudu . . . XIV-14
14.5.1 Spínání induktivní zátěže . . . XIV-20
14.5.2 H můstek – spínání stejnosměrného napětí s řízením polarity . . . XIV-21
14.5.3 IGBT – bipolární tranzistor s izolovaným hradlem . . . XIV-23
14.6 Spínání analogového signálu . . . XIV-25
14.6.1 Použití analogových spínačů pro přepínání zesílení . . . XIV-27
14.6.2 Použití analogových spínačů v konstrukci D/A převodníku . . . XIV-28
14.7 Spínací obvody digitálních systémů . . . XIV-29

15 Tranzistor jako zesilovač signálu – jednostupňové zesilovače **XV-1**
15.1 Úvod – co je zesilovač elektrického signálu . . . XV-2
15.2 Metoda linearizace (úvod do tranzistorových zesilovačů) . . . XV-4
15.2.1 Motivace . . . XV-4
15.2.2 Linearizace polovodičové diody . . . XV-5
15.2.3 Linearizace unipolárního tranzistoru . . . XV-10
15.2.4 Linearizace bipolárního tranzistoru . . . XV-16
15.3 Nastavení a stabilizace pracovního bodu tranzistorů . . . XV-24

15.3.1 Nastavení pracovního bodu bipolárních tranzistorů . . . XV-24
15.3.2 Nastavení pracovního bodu unipolárních tranzistorů . . . XV-30
15.4 Signálové parametry tranzistorových zesilovačů . . . XV-37
15.5 Základní vlastnosti jednostupňových zesilovačů . . . XV-38
15.5.1 Zesilovač se společným emitorem (SE) . . . XV-39
15.5.2 Zesilovač se společným sourcem (SS) . . . XV-47
15.5.3 Zesilovač se společnou bází (SB) . . . XV-55
15.5.4 Zesilovač se společným gatem (SG) . . . XV-59
15.5.5 Zesilovač se společným kolektorem (SC) . . . XV-63
15.5.6 Zesilovač se společným drainem (SD) . . . XV-68
15.6 Kmitočtové závislosti jednostupňových zesilovačů . . . XV-72
15.6.1 Dolní mezní kmitočet . . . XV-73
15.6.2 Kmitočtové vlastnosti lineárního modelu BJT . . . XV-80
15.6.3 Millerův teorém . . . XV-81
15.6.4 Horní mezní kmitočet . . . XV-82

16 Struktury tranzistorových zesilovačů **XVI-1**
16.1 Proudové zdroje a proudová zrcadla . . . XVI-2
16.1.1 Jednoduchý proudový zdroj s tranzistorem . . . XVI-2
16.1.2 Proudový zdroj s tranzistorem a paralelní proudovou ZV . . . XVI-4
16.1.3 Proudový zdroj s vícenásobnou ZV . . . XVI-9

16.1.4 Základní proudové zrcadlo . . . XVI-12
16.1.5 Základní zrcadlo s kompenzací bázových proudů . . . XVI-18
16.1.6 Wilsonovo proudové zrcadlo s bipolárními tranzistory . . . XVI-20
16.1.7 Wilsonovo proudové zrcadlo s unipolárními tranzistory . . . XVI-25
16.1.8 Dvojité proudové zrcadlo s bipolárními tranzistory . . . XVI-30
16.1.9 Dvojité proudové zrcadlo s unipolárními tranzistory . . . XVI-33
16.2 Zesilovač s dynamickou zátěží . . . XVI-35
16.2.1 Motivace – dosažení vysokého napěťového zesílení . . . XVI-35
16.2.2 Princip . . . XVI-36
16.3 „Bootstrap“ zesilovač SE-SC . . . XVI-39
16.4 Zapojení SE-SB (Kaskoda) . . . XVI-42
16.5 Darlingtonovo zapojení . . . XVI-47
16.6 Kombinovaný stupeň SC-SE . . . XVI-48
16.7 Kombinovaný stupeň SC-SC . . . XVI-53
16.8 „Bootstrap“ zesilovač SC . . . XVI-55
16.9 Vylepšený napěťový sledovač . . . XVI-56
16.9.1 Napěťové zesílení . . . XVI-58
16.9.2 Výstupní odpor . . . XVI-59
16.10 Kombinovaná zapojení SC-SE, SC-SB . . . XVI-60
16.11 Rozdílový (diferenční) zesilovač s BJT . . . XVI-61

16.11.1 Rozdílové zesílení . . . XVI-63
16.11.2 Souhlasné zesílení . . . XVI-66
16.12 Rozdílový zesilovač s FET . . . XVI-68
16.12.1 Rozdílové zesílení . . . XVI-70
16.12.2 Souhlasné zesílení . . . XVI-71
16.13 Rozdílový zesilovač s dynamickou zátěží . . . XVI-73
16.14 Rozdílový zesilovač s aktivní dynamickou zátěží . . . XVI-75
16.14.1 Rozdílové zesílení . . . XVI-76
16.14.2 Souhlasné zesílení . . . XVI-78
16.15 Rozdílový stupeň s využitím kaskodového zapojení . . . XVI-81
16.16 Vznik napěťové nesymetrie rozdílového zesilovače . . . XVI-82
16.16.1 Vliv nesymetrie rozdílového stupně s BJT na U_{os} . . . XVI-82
16.16.2 Vliv nesymetrie rozdílového stupně s MOSFET na U_{os} . . . XVI-83
16.16.3 Vliv H_I aktivní dynamické zátěže rozdílového stupně na U_{os} . . . XVI-84
16.17 Koncový stupeň . . . XVI-85
16.17.1 Pracovní třída A . . . XVI-85
16.17.2 Základní dělení pracovních tříd analogových zesilovačů . . . XVI-87
16.17.3 Pracovní třída B (AB) . . . XVI-88
16.17.4 Pracovní třída G, H . . . XVI-98
16.17.5 Pracovní třída C . . . XVI-99

16.17.6 Pracovní třída D XVI-100
16.17.7 Porovnání vlastností pracovní třídy B vs. D XVI-103
16.18 Struktury analogových IO – vnitřní zapojení OZ XVI-104
16.18.1 Nastavení pracovního bodu XVI-116
16.18.2 Napěťové zesílení – metoda dělení řetězce XVI-117

17 Úvod do implementace elektrických kmitočtových filtrů **XVII-1**
17.1 Realizace filtrů pomocí RC struktur XVII-3
17.2 Realizace filtrů pomocí LC struktur XVII-14
17.2.1 Realizace LC filtrů 2. řádu XVII-15
17.2.2 Obvodové funkce LC filtrů XVII-19
17.2.3 Vztah přenosových funkcí a dvojbranových parametrů filtrů XVII-21
17.2.4 Syntéza LC struktury NLP XVII-25
17.3 Aktivní prvky pro realizaci analogových filtrů XVII-40
17.3.1 Operační zesilovač XVII-40
17.3.2 Transkonduktanční zesilovač – OTA XVII-41
17.3.3 Proudový konvejor – CC XVII-43
17.3.4 Transimpedanční zesilovač – TIA XVII-47
17.4 ARC filtry – simulace prvků LC prototypu XVII-50
17.4.1 Použití konvertorů impedance pro implementaci LC filtru XVII-51
17.4.2 Použití invertorů impedance pro implementaci LC filtru XVII-57

17.5 Implementace pomocí funkční simulace LC prototypu . . . XVII-61
17.6 ARC filtry – kaskádní syntéza . . . XVII-65
17.6.1 Realizace dolní propusti obvodem s jedním OZ . . . XVII-67
17.6.2 Realizace horní propusti obvodem s jedním OZ . . . XVII-69
17.6.3 Realizace pásmové propusti obvodem s jedním OZ . . . XVII-70
17.6.4 Realizace eliptické sekce obvodem s jedním OZ . . . XVII-73
17.6.5 Realizace bikvadratické sekce pomocí Antoniova konvertoru . . . XVII-75
17.6.6 Realizace bikvadratické sekce obvodem s více OZ . . . XVII-76
17.6.7 Realizace obecné bikvadratické sekce obvodem s více OZ . . . XVII-79
17.7 Shrnutí vlastností spojitě pracujících ARC filtrů . . . XVII-86
17.8 Implementace filtrů pomocí periodicky spínaných obvodů s kapacitory (SC) . . . XVII-89
17.8.1 Implementace SC integračního článku a jeho analýza . . . XVII-92
17.8.2 Přenosové funkce a vlastnosti periodicky spínaných obvodů . . . XVII-96
17.8.3 Implementace SC integrátoru . . . XVII-101
17.8.4 Implementace ztrátového SC integrátoru . . . XVII-107
17.8.5 Bikvadratická sekce SC pro kaskádní realizaci filtrů . . . XVII-108
17.8.6 Implementace SC induktoru . . . XVII-112
17.9 Implementace filtrů obvody se spínanými proudy (SI) . . . XVII-115
17.9.1 Implementace SI integrátoru a bikvadratické přenosové funkce . . . XVII-117

18 Regenerativní soustavy **XVIII-1**

18.1 Oscilátory . . . XVIII-2
18.1.1 Princip oscilátorů s negativním dynamickým odporem . . . XVIII-2
18.1.2 Princip zpětnovazebních oscilátorů . . . XVIII-4
18.1.3 Zpětnovazební oscilátor s posouvanou fází . . . XVIII-5
18.1.4 Zpětnovazební můstkové oscilátory . . . XVIII-8
18.1.5 Oscilátory LC . . . XVIII-11
18.1.6 Krystalové oscilátory . . . XVIII-16
18.1.7 Stabilizace amplitudy výstupního signálu oscilátorů . . . XVIII-18
18.2 Obvody generující neharmonické kmity . . . XVIII-21
18.2.1 Astabilní klopný obvod (AKO) . . . XVIII-21
18.2.2 Monostabilní klopný obvod (MKO) s OZ . . . XVIII-26
18.2.3 Časovací obvod 555 . . . XVIII-27
18.2.4 Generátor funkcí . . . XVIII-31
18.2.5 Napětím řízený oscilátor (VCO) . . . XVIII-33
18.3 Fázový závěs . . . XVIII-35
18.3.1 Fázový detektor (FD) . . . XVIII-37
18.3.2 Dynamické vlastnosti FZ . . . XVIII-41
18.3.3 Aplikace fázového závěsu . . . XVIII-45

19 Elektronické napájecí zdroje **XIX-1**
19.1 Napájecí zdroje se spojitě pracujícími regulátory . . . XIX-2

19.1.1 Základní uspořádání „klasického“ zdroje . . . XIX-2
19.1.2 Usměrňovače – dioda jako spínač řízený napětím . . . XIX-3
19.1.3 Funkce a parametry spojitě pracujících regulátorů . . . XIX-7
19.1.4 Principy spojitě pracujících obvodů pro snížení velikosti napětí . . . XIX-11
19.1.5 Princip napěťových stabilizátorů se Zenerovou diodou (ZD) . . . XIX-12
19.1.6 Filtrace zvlnění vstupního napětí . . . XIX-18
19.1.7 Princip zpětnovazebních stabilizátorů . . . XIX-19
19.1.8 Výpočet základních parametrů ZV regulátorů . . . XIX-20
19.1.9 Stabilizátory pro vyšší napětí . . . XIX-25
19.1.10 Laboratorní zdroje – napěťový zdroj kombinovaný s proudovým . . . XIX-26
19.1.11 Integrované spojitě pracující (nespínané) stabilizátory . . . XIX-31
19.2 Zdroje referenčního napětí . . . XIX-35
19.2.1 Napěťová reference na základě teplotně kompenzovaného PN přechodu (Bandgap) . . . XIX-36
19.3 Zdroje se spínanými regulátory . . . XIX-40
19.3.1 Základní uspořádání a vlastnosti spínaného zdroje . . . XIX-40
19.3.2 Principy spínaných regulátorů bez induktoru – nábojové pumpy . . . XIX-41
19.3.3 Snižující měnič (Buck converter) . . . XIX-44
19.3.4 Zvyšující měnič (Boost converter) . . . XIX-49
19.3.5 Kombinovaný měnič Buck-Boost, invertor . . . XIX-54
19.3.6 Principiální zapojení galvanicky oddělených spínaných měničů . . . XIX-55

19.3.7 Pracovní režimy měničů a metody regulace XIX-60

20 Obvody s rozprostřenými parametry, základní jevy na homogenním vedení **XX-1**

A Algoritmizace analýz elektrických obvodů **1**
A.1 Textový zápis topologie obvodu a algoritmizace jeho matematického popisu 2
A.2 Sestavení matice spojitě pracujícího obvodu 3
A.2.1 Zařazení rezistoru (R) do admitanční matice obvodu 4
A.2.2 Zařazení napětím řízeného zdroje napětí (VCVS) 6
A.2.3 Zařazení proudem řízeného zdroje napětí (CCVS) 7
A.2.4 Zařazení napětím řízeného zdroje proudu (VCCS) 8
A.2.5 Zařazení proudem řízeného zdroje proudu (CCCS) 9
A.2.6 Zařazení ideálního operačního zesilovače (IOZ) 10
A.2.7 Zařazení nezávislého napěťového zdroje (V) 11
A.2.8 Zařazení kapacitoru (C) do matice obvodu 12
A.2.9 Zařazení induktoru (L) do matice obvodu 14
A.3 Výpočet charakteristických parametrů dvojbranu 16
A.4 Příklady analýz odporových obvodů s řízenými zdroji 19
A.5 Sestavení matice periodicky spínaného SC obvodu 32
A.6 Sestavení matice periodicky spínaného SI obvodu 43
A.7 Kmitočtová analýza spínaných obvodů ve Spice 56

B Měření vlastností lineárního zpětnovazebního systému **59**
B.1 Cíl měření . . . 60
B.2 Blokové schéma přípravku . . . 60
B.3 Měření základních statických parametrů přípravku . . . 61
B.4 Měření základních dynamických parametrů přípravku . . . 62
B.5 Měření kmitočtových vlastností otevřené ZV smyčky regulační soustavy . . . 63
B.6 Zapojení napájecího zdroje přípravku . . . 65

C Měření základních zapojení s operačním zesilovačem **66**
C.1 Cíle měření . . . 68

D Měření parametrů operačního zesilovače **69**
D.1 Cíl měření . . . 70
D.1.1 Měřicí přípravek pro měření parametrů OZ LM741 . . . 73
D.1.2 Měření chybových parametrů . . . 75
D.1.3 Měření statických parametrů . . . 79
D.1.4 Měření dynamických parametrů . . . 82

E Měření biologických signálů EKG **84**
E.1 Cíl měření . . . 85
E.2 Měřicí metody biologických signálů . . . 85

E.2.1 Měřicí přípravek pro měření signálů EKG 90

F Měření základních parametrů operačního usměrňovače **93**
F.1 Úkoly měření 94

G Měření vlastností jednostupňového zesilovače s bipolárním tranzistorem **98**
G.1 Cíle a postup měření 100

H Měření vlastností jednostupňového zesilovače s unipolárním tranzistorem **101**
H.1 Cíle a postup měření 103

I Měření na tranzistorovém rozdílovém zesilovači **104**
I.1 Cíle měření 105

J Měření na tranzistorovém výkonovém zesilovači **106**
J.1 Cíle měření 107

K Šum elektronických obvodů **109**
K.1 Vznik šumu a jeho druhy 112
K.2 Šumová analýza 115

L Implementace zesilovače třídy D a jeho měření **116**

L.1 Obvodová řešení zesilovačů třídy D . . . 117
L.2 Modulátory zesilovačů třídy D . . . 119
L.2.1 Kvantizační šum a SNR a analogově-číslicového (AD) převodu . . . 123
L.2.2 Kvantizační šum ideálního N-bitového AD převodníku . . . 124
L.2.3 Budič koncových tranzistorů zesilovačů třídy D . . . 133
L.2.4 „Pumpování“ napájecího napětí (Power Supply Pumping) . . . 140
L.2.5 Vznik rušení a jeho minimalizace a potlačení jeho vlivu . . . 143
L.3 Měření na výkonovém zesilovači třídy D . . . 145
L.3.1 Cíle měření . . . 145

M Chlazení elektronických prvků **149**
M.1 Teplotní poměry pro základní model čip-okolí . . . 150
M.2 Teplotní poměry pro případ čip-pouzdro-chladič-okolí . . . 152

N Měření parametrů nespínaných stabilizátů **154**
N.1 Cíle měření . . . 155
N.1.1 Popis přípravku . . . 156

O Měření parametrů spínaných DC-DC měničů **160**
O.1 Cíle měření . . . 161
O.1.1 Popis přípravku . . . 162

P Měření filtrů typu dolní propust **167**
P.1 Cíle měření . . . 170
P.2 Postup měření . . . 170
P.3 Návrh filtrů pro měření . . . 171

Q Měření filtru se spínanými kapacitory **172**
Q.1 Cíle měření . . . 175
Q.2 Postup měření . . . 175
Q.3 Parametry filtrů pro měření . . . 176

R Syntéza periodicky spínaných filtrů na základě analogové přenosové funkce **180**
R.1 Transformace roviny $s \Leftrightarrow z$ . . . 181
R.1.1 Metoda impulzní invariance . . . 183
R.1.2 Transformace pólů a nul přenosové funkce . . . 184
R.1.3 Zpětná aproximace derivace (BD) . . . 185
R.1.4 Dopředná aproximace derivace (FD) . . . 186
R.1.5 Aproximace integrace (LDI) . . . 187
R.1.6 Bilineární transformace (BL) . . . 188
R.1.7 Implementace SC integrátoru pro různé transformace . . . 205

S Optimalizace obvodů pomocí genetických algoritmů **216**

S.1 Úloha optimalizace . . . 217
S.2 Optimalizační algoritmus . . . 218
S.3 Podstata evolučních algoritmů (EA) . . . 219
S.3.1 Proces optimalizace EA . . . 220
S.3.2 Diferenciální evoluce (DE) . . . 221
S.4 Účelová funkce . . . 223
S.4.1 Optimalizace elektrických obvodů . . . 223
S.4.2 Optimalizace amplitudové charakteristiky . . . 224
S.5 Ukázky použití algoritmů DE . . . 225
S.5.1 Standardní návrh LC filtru typu dolní propusti . . . 225
S.5.2 Nestandardní návrh LC filtru typu dolní propusti . . . 227
S.5.3 Optimalizace pásmové propusti se spínanými kapacitory (SC) . . . 229
S.6 Kombinování optimalizačních algoritmů . . . 231
S.7 Hodnocení optimalizačních metod . . . 233

T Měření na fázovém závěsu **235**
T.1 Postup a cíle měření na fázovém závěsu . . . 237

U Příklady k procvičení **239**
U.1 Obvody pro analýzu ve stejnosměrném ustáleném stavu . . . 240
U.1.1 Elementární příklady . . . 240

U.1.2 Jednoduché příklady . . . 243
U.1.3 Složitější příklady . . . 247
U.2 Základní zapojení s ideálním operačním zesilovačem . . . 249
U.3 Obvody pro analýzu přechodných dějů . . . 253
U.3.1 Elementární příklady . . . 253
U.3.2 Jednoduché příklady . . . 254
U.3.3 Složitější příklady obvodů 1. řádu . . . 256
U.3.4 Příklady elementárních obvodů 2. řádu . . . 258
U.4 Obvody pro analýzu v harmonickém ustáleném stavu . . . 259
U.4.1 Elementární příklady . . . 259
U.5 Obvody v harmonickém ustáleném stavu – kmitočtové charakteristiky . . . 260
U.5.1 Elementární příklady . . . 260
U.5.2 Jednoduché příklady RC a RL obvodů . . . 261
U.5.3 Jednoduché příklady obvodů s ideálními operačními zesilovači . . . 263
U.5.4 Složitější příklady RC a RL obvodů . . . 266
U.5.5 Příklady s rezonančními obvody . . . 267
U.6 Přenosové charakteristiky základních systémů/filtrů . . . 268
U.7 Příklady na sestavování obvodových rovnic . . . 279
U.7.1 Odporové obvody ve stejnosměrném ustáleném stavu . . . 279
U.7.2 Obvody buzené časově proměnnými signály . . . 282

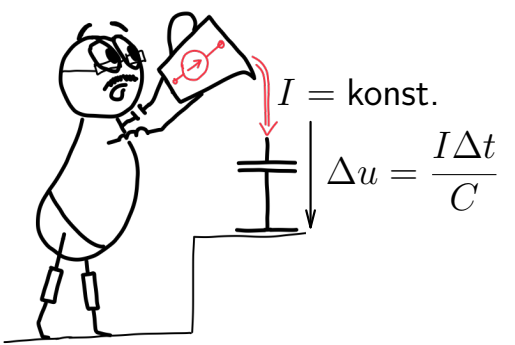
U.8 Jednostupňové tranzistorové zesilovače 283
U.9 Kombinované (vícestupňové) tranzistorové zesilovače 296

Literatura **304**

Rejstřík **307**

Kapitola 1
Veličiny a prvky elektrických obvodů

Tato kapitola popisuje základní elektrické veličiny a prvky. Uživatel se seznámí s elektrickým napětím, proudem i výkonem a dále s popisem základních elektrických prvků, tj. rezistorem, kapacitorem, induktorem, včetně induktorů vázaných a ideálních nezávislých i řízených zdrojů napětí a proudu. Jsou definovány vztahy mezi obvodovými veličinami těchto prvků, na kterých je spolu se zákony analýzy založeno chování všech elektrických obvodů od elementárních, až po složitější tranzistorové struktury nebo aplikace typu spínané zdroje.



1.1. Elektrické veličiny

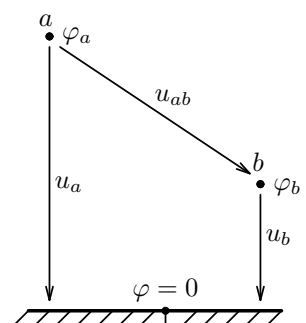
1.1.1. Elektrické napětí

$$\boxed{u_{ab}} = \varphi_a - \varphi_b = \int_a^b \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l} \boxed{= \frac{A}{Q}}; \qquad [\mathrm{V}] = \frac{[\mathrm{V}]}{[\mathrm{m}]} \cdot [\mathrm{m}] = \frac{[\mathrm{J}]}{[\mathrm{C}]}. \tag{1.1}$$

Elektrické napětí

Elektrické napětí je rozdíl dvou elektrických potenciálů $\varphi\,[\mathrm{V}]$, které lze vyjádřit ze známého rozložení intenzity elektrického pole $\vec{E}\,[\mathrm{V/m}]$ ($\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi$) podle dráhy $\vec{l}\,[\mathrm{m}]$, přičemž toto napětí odpovídá práci $A\,[\mathrm{J}]$ potřebné k přemístění jednotkového náboje $Q\,[\mathrm{C}]$ z bodu a do bodu b.

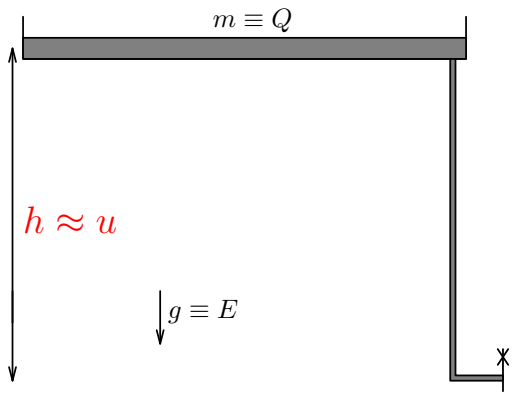
Čím větší je náboj, tím větší práci je nutné vynaložit pro jeho přemístění mezi daným rozdílem potenciálů.



Obrázek 1.1: Znázornění elektrického napětí.

Analogie k elektrickému napětí

Hmotnost vody m (náboj Q), kterou vypumpujeme (dodáme energii) do výšky h v gravitačním poli g (elektrickém poli E), přičemž napětí u odpovídá potenciálu gravitačního pole (výšce h).



Obrázek 1.2: Mechanická analogie k elektrickému napětí.

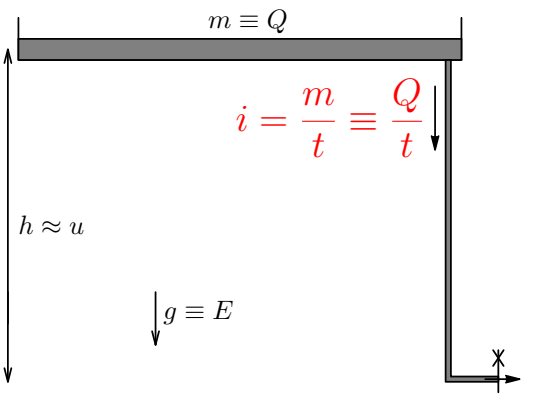
1.1.2. Elektrický proud

Pokud umožníme náboji procházet mezi rozdílem potenciálů (od kladnějšího k zápornějšímu) protéká elektrický proud.

$$i = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}; \qquad [\mathrm{A}] = \frac{[\mathrm{C}]}{[\mathrm{s}]}. \tag{1.2}$$

Elektrický proud

$i\,[\mathrm{A}]$ Elektrický proud je velikost elektrického náboje přeneseného za jednotku času (uspořádaný pohyb elektricky nabitých částic).



Obrázek 1.3: Znázornění toku elektricky nabitých částic a jeho analogie s tokem vody.

1.1.3. Okamžitý výkon

$$p(t) = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = u(t)i(t)\,; \qquad [\mathrm{W}] = \frac{[\mathrm{J}]}{[\mathrm{s}]} = \frac{[\mathrm{J}]}{[\mathrm{C}]}\frac{[\mathrm{C}]}{[\mathrm{s}]} = [\mathrm{V}]\cdot[\mathrm{A}]. \tag{1.3}$$

1.1.4. Práce elektrického proudu a napětí

$$A = \int_{t_1}^{t_2} p(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} i(t)u(t)\,\mathrm{d}t\,; \qquad [\mathrm{J}] = [\mathrm{W}]\cdot[\mathrm{s}] = [\mathrm{A}]\cdot[\mathrm{V}]\cdot[\mathrm{s}]. \tag{1.4}$$

Příklad 1.1

Zadání: Akumulátor A má kapacitu $C_{QA} = 75\,\mathrm{Ah}$ při napětí $12\,\mathrm{V}$ a akumulátor B má kapacitu $C_{QB} = 5\,\mathrm{Ah}$ při napětí $200\,\mathrm{V}$. Který z akumulátorů je schopen dodat více energie?

Řešení: Vypočteme maximální kapacitu a z ní uloženou energii:

$$Q_A = C_{QA}t = 75\cdot 3600 = 270\,\mathrm{kC}, \quad W_A = Q_A U_A = 3{,}24\,\mathrm{MJ}$$
$$Q_B = C_{QB}t = 5\cdot 3600 = 18\,\mathrm{kC}, \quad W_B = Q_B U_B = 3{,}6\,\mathrm{MJ}$$

Baterie B je schopna dodat větší energii (3,6 MJ).

1.2. Rozdělení elektrických obvodových veličin

Obvodové veličiny (signály) rozdělujeme podle časového průběhu na deterministické a nedeterministické (náhodné, šumové). Dále se budeme zabývat pouze deterministickými veličinami, které budeme dále dělit dle uvedené tabulky 1.1. Toto rozdělení je klíčové pro analýzu obvodů jak bude dále patrné.

typ	časový průběh	výkon veličin
stacionární (stejnosměrné)	$i(t) = I = \text{konst.}$	$P = UI$
periodické (střídavé)	$i(t) = i(t + nT)$	$P = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} i(t)u(t)\,\mathrm{d}t$
impulzní (jednorázové)	$i(t) = \begin{cases} f(t), & t \in \langle t_1,\, t_2\rangle \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$	$P = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} i(t)u(t)\,\mathrm{d}t$

Tabulka 1.1: Dělení deterministických obvodových veličin (signálů), kde T je perioda a $n \in Z$ je celé číslo.

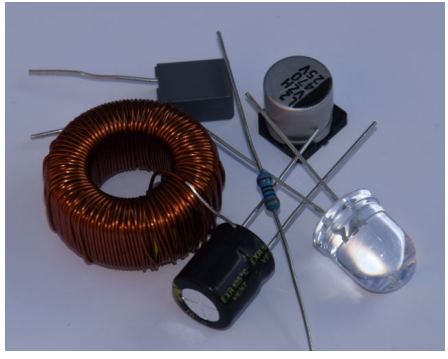
U střídavých veličin je dále významný harmonický časový průběh $\Longrightarrow$ harmonický ustálený stav v elektrických lineárních obvodech.

1.3. Základní elektrické prvky

Dále se budeme zabývat obvodovými modely se soustředěnými parametry (energie je soustředěna v jednotlivých prvcích elektrického obvodu, které jsou propojeny ideálními vodiči).
Toto zjednodušení lze aplikovat, pokud rychlost změn signálu je relativně malá (nejkratší vlnová délka signálů $\lambda = v/f$ je podstatně větší než délka nejdelšího spoje, kde v je rychlost šíření signálu a f je jeho kmitočet).

Elektrický systém lze pak sestavit z následujících prvků:

- rezistor,
- kapacitor,
- induktor,
- nezávislý zdroj napětí nebo proudu,
- zdroj napětí nebo proudu řízený napětím nebo proudem (4 typy).

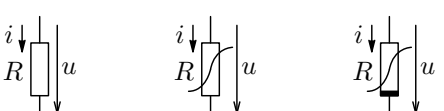


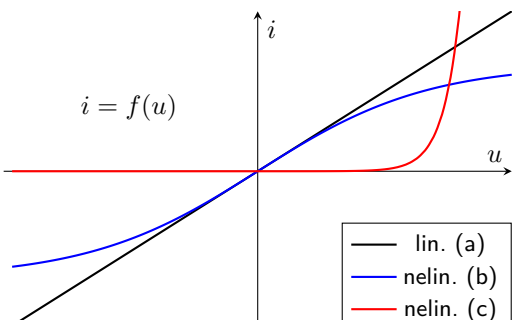
1.3.1. Rezistor – elektrický odpor

Rezistor

Rezistor je prvek nevratně měnící elektrickou energii na tepelnou. Jedná se o časově nesetrvačný prvek (vztah mezi proudem a napětím neobsahuje čas).





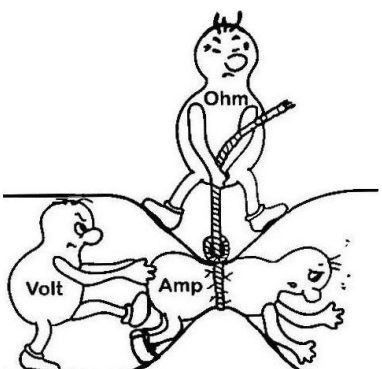


Obrázek 1.4: Schématická značka lineárního (a), nelineárního bipolárního (b) a unipolárního (c) rezistoru a jejich voltampérové charakteristiky (d).

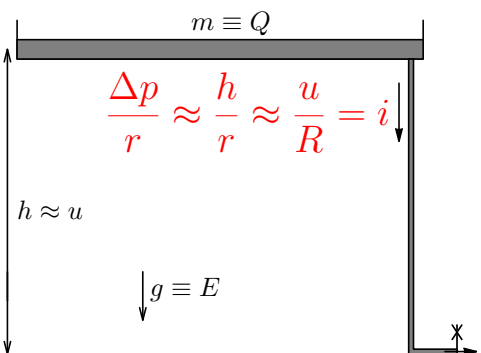
Ohmův zákon je definován na lineárním rezistoru vztahem 1.5 mezi u a i, kde G je vodivost a R je odpor rezistoru.

$$i = uG = \frac{u}{R}; \qquad [\mathrm{A}] = [\mathrm{V}] \cdot [\mathrm{S}] = \frac{[\mathrm{V}]}{[\Omega]} \qquad \text{v orientaci veličin } i \text{ a } u \text{ dle obrázku 1.4.} \tag{1.5}$$

Analogii Ohmova zákona lze opět ukázat na případu proudění vody, kde elektrické napětí u je analogií rozdílu tlaků Δp (úměrnému výšce vody h) a elektrický odpor R odporu proudění r.



převzato z http://www.sengpielaudio.com/calculator-ohmslaw.htm



Obrázek 1.5: Znázornění toku elektricky nabitých částic a jeho analogie s tokem vody.

Ztrátový výkon na lineárním rezistoru vyplývá ze vztahu (1.3) a (1.5), tj. pro stejnosměrné veličiny je

$$P = UI = \frac{U^2}{R} = I^2 R \tag{1.6}$$

a pro periodický průběh proudu, resp. napětí:

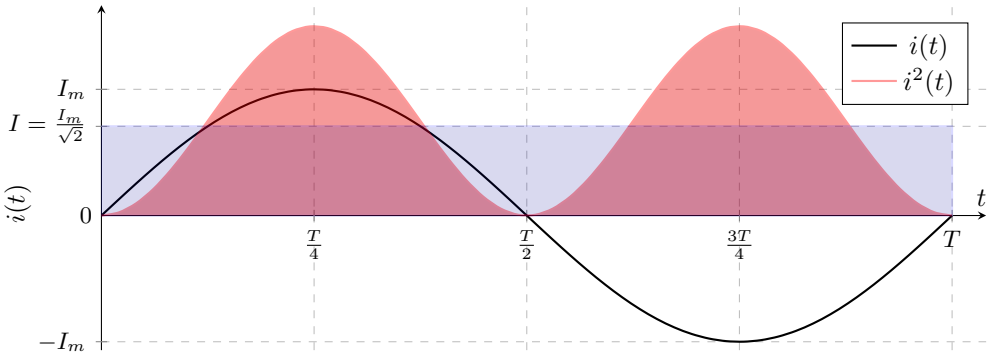
$$P = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} i(t)u(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \frac{u^2(t)}{R}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} i^2(t)R\,\mathrm{d}t = I_{\mathrm{RMS}}^2 R \tag{1.7}$$

$$I_{\mathrm{RMS}} = I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} i^2(t)\,\mathrm{d}t} \tag{1.8}$$

kde I_{RMS} je efektivní hodnota (Root-Mean-Square) střídavého proudu, která odpovídá stejnosměrné hodnotě proudu se stejnými tepelnými (výkonovými) účinky.[1]

Je zřejmé, že rezistor je nesetrvačný prvek – nemá „paměť“ a v jakémkoli okamžiku je součin napětí a proudu kladný. Z toho vyplývá, že rezistor tuto elektrickou energii (výkon v čase) přeměňuje na teplo.

[1] V dalším textu budeme pro efektivní hodnotu užívat stejné značení jako v případě stejnosměrné hodnoty, tj. I a U.



Obrázek 1.6: Grafické znázornění části výpočtu efektivní hodnoty sinusového průběhu.

Mimo efektivní hodnotu se udává i střední hodnota $I_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} i(t)\,\mathrm{d}t$ střídavého proudu, která odpovídá stejnosměrné hodnotě proudu se stejnými elektrochemickými účinky (přenosu náboje).

Pro harmonický, sinusový průběh proudu, resp. napětí $i(t) = I_m \sin(2\pi f t)$, kde $2\pi f = \omega = \frac{2\pi}{T}$ lze snadno vypočítat $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$. Střední hodnota uvedeného časového průběhu vyjde samozřejmě nulová, proto se někdy uvádí střední hodnota za polovinu periody $I_0 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} i(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2I_m}{\pi}$.

Příklad 1.2

Zadání: Rezistorem o odporu $R = 8\,\Omega$ je ponořen ve vodě (tepelná kapacita $c = 4180\,\mathrm{J/kg/K}$) o objemu $V = 0{,}1$ litrů včetně rezistoru a protéká jím stejnosměrný proud $I = 1{,}5\,\mathrm{A}$. Určete, o kolik se ohřeje daný objem vody za čas $t = 10\,\mathrm{min}$. Zanedbejte všechny parazitní vlivy, jako je ochlazování vody prostředím, rozdílnou tepelnou kapacitu vody a rezistoru, ...

Řešení a experiment: viz. přednáška, včetně ukázky v geec.

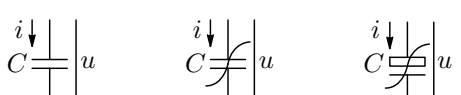
Ukázky analýz příkladů této kapitoly v interaktivní aplikaci geec, viz toto video.

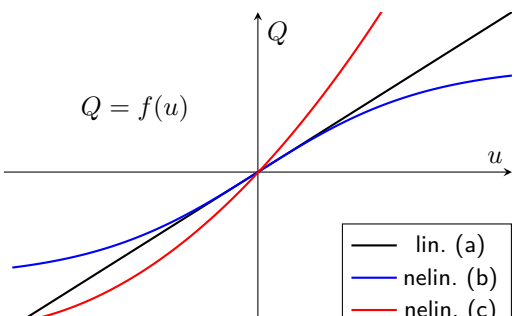
1.3.2. Kapacitor

Kapacitor

Kapacitor je prvek schopný akumulovat elektrický náboj, který je dodáván protékajícím proudem (v čase) ⇒ je časově setrvačný prvek.







Obrázek 1.7: Schématická značka lineárního (a), nelineárního bipolárního (b) a unipolárního (c) kapacitoru a jejich volt-columbové charakteristiky (d).

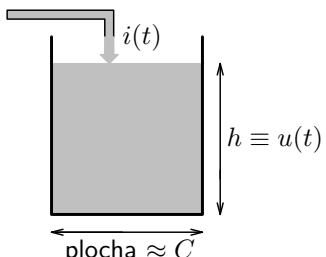
Lineární kapacitor určuje svojí kapacitou lineární vztah mezi nábojem uloženým v kapacitoru a napětím na jeho svorkách:

$$Q = Cu; \qquad [\mathrm{C}] = [\mathrm{F}] \cdot [\mathrm{V}], \tag{1.9}$$

přičemž vztah mezi proudem a napětím lze pak získat pomocí vztahu (1.2):

$$i = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \tag{1.10}$$

$$u(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,\mathrm{d}\tau + u(0) \tag{1.11}$$



Obrázek 1.8: Znázornění napouštění/vypouštění nádrže proudem vody jako analogie s nabíjením/vybíjením kapacitoru elektrickým proudem.

Akumulovaná energie v lineárním kapacitoru pak vyplývá ze vztahu (1.4):

$$W_C = \int_0^{t_x} ui\,\mathrm{d}t = \int_{Q(0)}^{Q(t_x)} u\ \mathrm{d}Q = \int_{u(0)}^{u(t_x)} uC\,\mathrm{d}u = C\int_0^{u_x} u\ \mathrm{d}u = \frac{1}{2}Cu_x^2 \tag{1.12}$$

Příklad 1.3

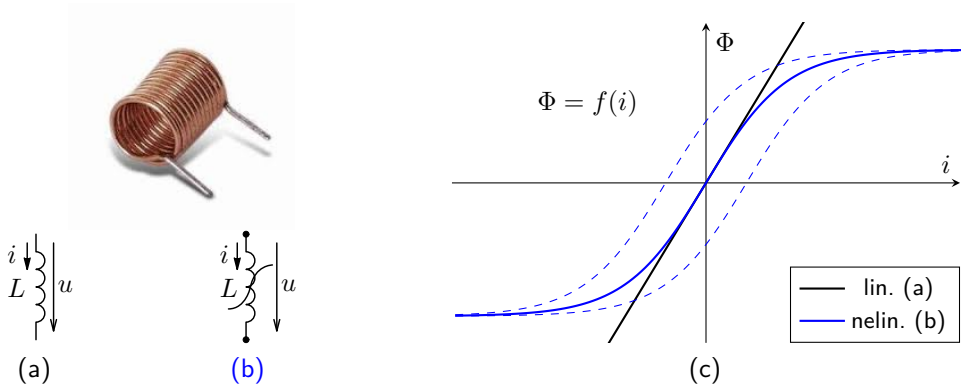
Zadání: Kapacitor o kapacitě $C = 10\,\mathrm{mF}$ je nabit na napětí $U_1 = 16\,\mathrm{V}$. Jaké napětí (U_2) bude na tomto kapacitoru, pokud byl vybíjen konstantním proudem $I = 20\,\mathrm{mA}$ (např. svícení LED) po dobu $\Delta t = 4\,\mathrm{s}$? Viz také ilustraci na začátku této kapitoly 1. Jakou energii odevzdal kapaitor zátěži? Energii určete jak z rozdílu energie kapacitoru, tak z výkonu na zátěži.

Řešení a experiment: viz. přednáška, včetně ukázky v geec.

1.3.3. Induktor

Induktor

Induktor je prvek vytvářející magnetický tok, daný protékajícím proudem, přičemž v magnetickém toku je uložena energie ⇒ je časově setrvačný prvek.



Obrázek 1.9: Schématická značka lineárního (a) a nelineárního (b) induktoru a jejich ampér-weberové charakteristiky (c).

Lineární induktor určuje svou indukčností lineární vztah mezi magnetickým tokem a protékajícím proudem:

$$\Phi = Li; \qquad [\mathrm{Wb}] = [\mathrm{H}] \cdot [\mathrm{A}], \tag{1.13}$$

přičemž vztah mezi proudem a napětím lze vyjádřit následovně:

$$u = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}i}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{1.14}$$

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t u(\tau)\,\mathrm{d}\tau + i(0) \tag{1.15}$$

Akumulovaná energie v lineárním induktoru opět vyplývá ze vztahu (1.4):

$$W_L = \int_0^{t_x} iu\,\mathrm{d}t = \int_{\Phi(0)}^{\Phi(t_x)} i\,\mathrm{d}\Phi = \int_{i(0)}^{i(t_x)} iL\,\mathrm{d}i = L\int_0^{i_x} i\,\mathrm{d}i = \frac{1}{2}Li_x^2 \tag{1.16}$$

Ztráty

Ideální induktor je stejně jako ideální kapacitor bezeztrátový prvek, který akumuluje energii, ale nerozptyluje ji (nepřeměňuje na teplo). Nahromaděnou energii může odevzdat zpět do obvodu. U reálného prvku je část energie spotřebována – převedena na teplo.

Příklad 1.4

Zadání: Induktor o indukčnosti $L = 0{,}1\,\mathrm{H}$ je v čase $t = 0$ připojen na elektrické napětí o velikosti $U = 10\,\mathrm{V}$. Jaký proud bude protékat induktorem a jaká energie bude v induktoru akumulovaná po čase $t_x = 5\,\mathrm{ms}$, pokud před připojením napětí neprocházel induktorem žádný proud. Jaké by byly důsledky odpojení napěťového zdroje v čase t_x? Jak lze induktor „bezpečně vybít“.

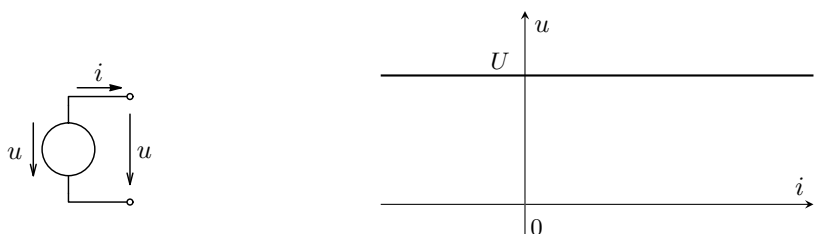
Řešení: viz. přednáška, včetně ukázky v geec.

Vlastnosti uvedených prvků si lze jednoduše ověřit pomocí analýzy.

1.3.4. Ideální napěťový zdroj

Ideální napěťový zdroj

Ideální napěťový zdroj je prvek udržující mezi svorkami definované napětí nezávisle na odebíraném proudu. Napětí může být konstantní $u = U$ pro stejnosměrný zdroj nebo s časem se měnící $u = u(t)$. Orientace zdroje určuje šipka od kladné k záporné svorce, pokud $u > 0$.



Obrázek 1.10: Schématická značka ideálního napěťového zdroje a jeho zatěžovací charakteristika.

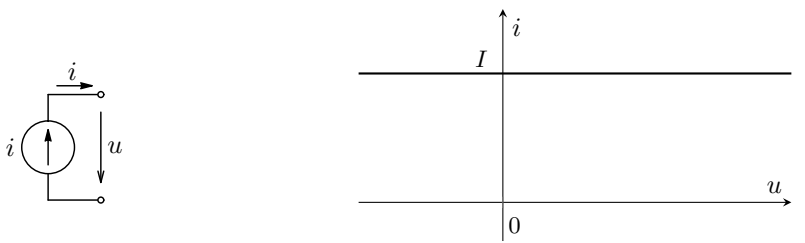
Vnitřní odpor definovaný jako podíl změny napětí ku změně zatěžovacího proudu je pro ideální zdroj nulový (prakticky nelze realizovat – do zkratu dodává nekonečný proud):

$$R_i = \frac{\Delta u}{\Delta i} = 0 \qquad \text{tj. pro jakoukoli } \Delta i \text{ je vždy } \Delta u = 0, \text{ jelikož } u = U = \text{konst.} \tag{1.17}$$

1.3.5. Ideální proudový zdroj

Ideální proudový zdroj

Ideální proudový zdroj je prvek udržující mezi svorkami definovaný proud nezávisle na napětí mezi svorkami. Proud může být konstantní $i = I$ pro stejnosměrný zdroj nebo s časem se měnící $i = i(t)$. Orientace kladného směru proudu určuje šipka, pokud $i > 0$.



Obrázek 1.11: Schématická značka ideálního proudového zdroje a jeho zatěžovací charakteristika.

Vnitřní odpor definovaný jako podíl změny napětí ku změně proudu je pro ideální zdroj nekonečný (prakticky nelze realizovat – při rozpojení je na svorkách nekonečné napětí):

$$R_i = \frac{\Delta u}{\Delta i} \to \infty \qquad \text{tj. pro jakoukoli } \Delta u \text{ je vždy } \Delta i = 0, \text{ jelikož } i = I = \text{konst.} \tag{1.18}$$

1.3.6. Ideální řízené zdroje

Zdroj napětí a proudu řízený napětím nebo proudem

Napětím řízený zdroj napětí a proudu jsou ideální zdroje napětí či proudu, jejichž hodnota je dána řídícím napětím u_r a převodní konstantou – v případě zdroje napětí A (napěťové zesílení), v případě zdroje proudu G (převodní vodivost – transkonduktance).

Proudem řízený zdroj napětí a proudu jsou ideální zdroje napětí či proudu, jejichž hodnota je dána řídícím proudem i_r a převodní konstantou – v případě zdroje napětí R (převodní odpor – transrezistance), v případě zdroje proudu F (proudové zesílení).

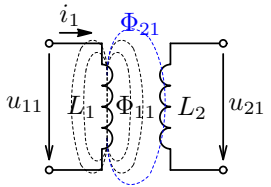


Obrázek 1.12: Napětím řízený zdroj napětí (a) a proudu (b), a proudem řízený zdroj napětí (c) a proudu (d).

Řízené zdroje se používají pro modelování zejména aktivních elektronických prvků a obvodů.

1.3.7. Lineární vázané induktory

Lineární vázané induktory s buzením induktoru L_1



Obrázek 1.13: Vázané induktory, kdy pouze první z nich je protékán proudem $i_1(t)$.

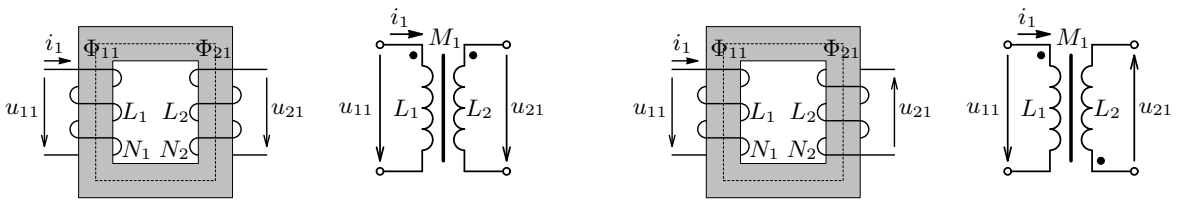
$$\Phi_{11} = L_1 i_1, \qquad \Phi_{21} = M_1 i_1, \tag{1.19}$$

$$u_{11} = \frac{\mathrm{d}\Phi_{11}}{\mathrm{d}t} = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}, \qquad u_{21} = \frac{\mathrm{d}\Phi_{21}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\Phi_{21}}{\mathrm{d}i_1}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = M_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}, \tag{1.20}$$

kde Φ_{11} je celkový magnetický tok indukčnosti L_1 vyvolaný proudem i_1,
Φ_{21} celkový magnetický tok indukčnosti L_2 vyvolaný proudem i_1 a
$M_1 = \frac{\Phi_{21}}{i_1}$ je tzv. vzájemná indukčnost [H].

Je zřejmé, že na L_2 se indukuje napětí $u_{21} \neq 0$ (i při $i_2 = 0$), které je úměrné rychlosti změn proudu i_1 a vzájemné indukčnosti M_1. Toho se využívá např. v transformátorech, ale je to také zdrojem indukovaných rušivých signálů.

Pokud je indukčnost L_1 tvořena N_1 závity vodiče, označme ${}^1\Phi_{11}$ tok cívkou L_1 vyvolaný jedním závitem. Celkový magnetický tok je pak $\Phi_{11} = N_1 {}^1\Phi_{11}$. Podobně pak i $\Phi_{21} = N_2 {}^1\Phi_{21} = N_2 \kappa_1 {}^1\Phi_{11}$, kde $\kappa_1 = \frac{{}^1\Phi_{21}}{{}^1\Phi_{11}} \leq 1\,[-]$ je tzv. činitel vazby, udávající poměr magnetických toků. Napětí u_{21} lze pak snadno vyjádřit v níže uvedeném vztahu.

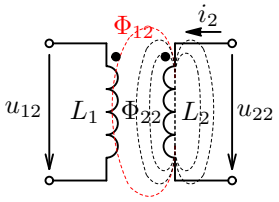


Obrázek 1.14: Vázané lineární induktory s magnetickým obvodem se shodným (a) a různým (c) směrem závitů a jejich schématické značky (b) a (d).

$$\boxed{u_{21}} = N_2 \frac{\mathrm{d}^1\Phi_{21}}{\mathrm{d}t} = \kappa_1 N_2 \frac{\mathrm{d}^1\Phi_{11}}{\mathrm{d}t} = \kappa_1 \frac{N_2}{N_1} \frac{\mathrm{d}\Phi_{11}}{\mathrm{d}t} \boxed{= \frac{\kappa_1}{N} L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\kappa_1}{N} u_{11} = M_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}}, \tag{1.21}$$

kde $N = \frac{N_1}{N_2}$ je tzv. převod. Je zřejmé, že pokud $\frac{\kappa_1}{N} > 1$, bude indukované napětí $u_{21} > u_{11}$. Pokud navíc budeme uvažovat ideální vazbu ($\kappa_1 = 1$, tj. nulový rozptyl magnetických toků ${}^1\Phi_{21} = {}^1\Phi_{11}$ pro ideální magnetický obvod), je výstupní napětí u_{21} úměrné pouze u_{11} a podílu počtu závitů, tj. převrácené hodnotě převodu $1/N$.

Lineární vázané induktory s buzením induktoru L_2 Podobně jako v předchozím případě i zde platí:



$$\Phi_{22} = L_2 i_2, \qquad \Phi_{12} = \kappa_2 \Phi_{22} = M_2 i_2, \tag{1.22}$$

$$u_{22} = \frac{\mathrm{d}\Phi_{22}}{\mathrm{d}t} = L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}, \quad u_{12} = \frac{\mathrm{d}\Phi_{12}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\Phi_{12}}{\mathrm{d}i_2}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = \kappa_2 \frac{N_1}{N_2} \underbrace{L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}}_{u_{22}}. \tag{1.23}$$

kde Φ_{22} je celkový magnetický tok indukčnosti L_2 vyvolaný proudem i_2,
Φ_{12} magnetický tok indukčnosti L_1 vyvolaný proudem i_2.

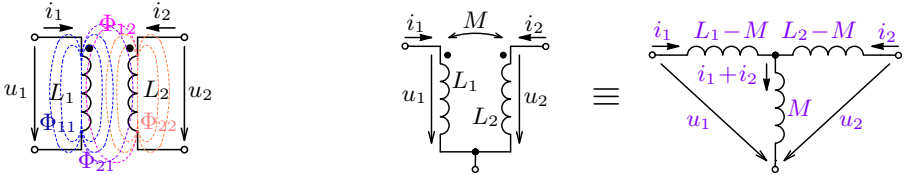
Obrázek 1.15: Vázané induktory, kdy pouze druhý z nich je protékán proudem $i_2(t)$.

$$N = \frac{N_1}{N_2} = \kappa_1 \frac{u_{11}}{u_{21}} = \frac{1}{\kappa_2}\frac{u_{12}}{u_{22}} = \kappa_1 \frac{L_1}{M_1} = \frac{1}{\kappa_2}\frac{M_2}{L_2} \Rightarrow M_1 M_2 = \kappa_1 \kappa_2 L_1 L_2 \tag{1.24}$$

Pokud budeme uvažovat stejnou mechanickou konfiguraci (shodný magnetický obvod), je pro obě varianty buzení stejná hodnota jak vzájemné indukčnosti $M_1 = M_2 = M$, tak činitele vazby $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$. Pak platí:

$$\boxed{N = \frac{N_1}{N_2}} = \frac{M}{\kappa L_2} \boxed{= \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}}, \qquad \text{pro} \quad M_1 = M_2 = \boxed{M = \kappa\sqrt{L_1 L_2}} \quad \text{a} \quad \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa. \tag{1.25}$$

Lineární vázané induktory s buzením obou induktorů



Obrázek 1.16: Vázané lineární induktory, kdy oba jsou protékány proudy.

$$\Phi_1 = \Phi_{11} \pm \Phi_{12} = L_1 i_1 \pm M i_2, \qquad \Phi_2 = \Phi_{22} \pm \Phi_{21} = L_2 i_2 \pm M i_1 \tag{1.26}$$

$$u_1 = \frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \pm M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \qquad u_2 = \frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} = L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \pm M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \tag{1.27}$$

kde Φ_1, resp. Φ_2 je celkový magnetický tok indukčnosti L_1, resp. L_2 vyvolaný proudy i_1 a i_2 (kladná znaménka platí pro uvedené orientace). Pro proudy lze pak z napětí pomocí inverzních vztahů psát:

$$i_1(t) = \Gamma_1 \int_0^t u_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \Gamma_M \int_0^t u_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau + i_1(0), \tag{1.28}$$

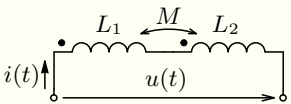
$$i_2(t) = \Gamma_2 \int_0^t u_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \Gamma_M \int_0^t u_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau + i_2(0), \tag{1.29}$$

kde $\Gamma_1 = \dfrac{L_2}{L_1L_2 - M^2}$, $\Gamma_2 = \dfrac{L_1}{L_1L_2 - M^2}$, $\Gamma_M = \dfrac{-M}{L_1L_2 - M^2}$ $[\mathrm{H}^{-1}]$ jsou tzv. inverzní indukčnosti.

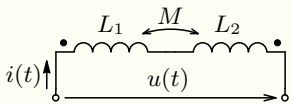
Příklad 1.5

Zadání: Jaká je celková indukčnost L_c dvou sériově spojených induktorů $L_1 = L_2 = 14\,\mathrm{mH}$ s vzájemnou vazbou $\kappa = 0{,}996$ zapojených v obou konfiguracích dle obrázku.

(a)



(b)



Řešení a ověření experimentem: viz. přednáška

$$u(t) = L_1\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + L_2\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = \underbrace{(L_1 + L_2 + 2M)}_{L_{c_a}}\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(a)}$$

$$u(t) = L_1\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + L_2\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = \underbrace{(L_1 + L_2 - 2M)}_{L_{c_b}}\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(b)}$$

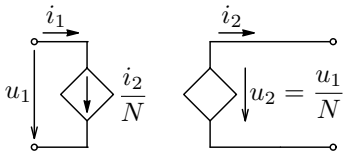
kde $L_{c_a} = L_1 + L_2 + 2M \doteq 56\,\mathrm{mH}$, resp. $L_{c_b} = L_1 + L_2 - 2M \doteq 112\,\mu\mathrm{H}$ je celková indukčnost sériového, resp. „antisériového“ spojení, kde $M = \kappa\sqrt{L_1 L_2} \doteq 13{,}9\,\mathrm{mH}$.

Experiment: viz přednáška a analýza.

Transformátor představují v nejjednodušším případě 2 vázané induktory.

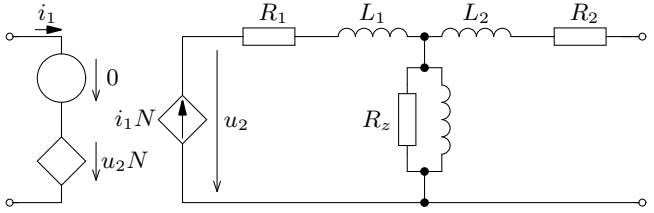


V ideálním případě pak $\kappa = 1$, $L_1 \to \infty$, $L_2 \to \infty$, což vede na tento limitní model.



Obrázek 1.17: Ilustrační obrázek transformátoru a model ideálního transformátoru.

Aby transformátor realizovaný vázanými induktory měl fungoval, je nutné, aby obvodové veličiny byly střídavé. V případě reálného transformátoru je nutné modelovat i ztráty.



Obrázek 1.18: Lineární model reálného transformátoru pro simulační program.

Příklad 1.6

Zadání: Ideální transformátor s převodem $N = 9 : 1$ je na sekundárním vinutí zatížen rezistorem o odporu $R_z = 30\,\Omega$. Určete obvodové veličiny U_2, I_2 a I_1, pokud je primární vinutí připojeno na napěťový zdroj o velikosti[a] $U_1 = 230\,\mathrm{V}$. Dále určete, jak se transformuje zátěž ze sekundárního na primární vinutí (vnitřní odpor R_i z pohledu zdroje U_1).

[a] Jedná se o efektivní hodnoty střídavého (harmonického) průběhu.

Řešení: Dle modelu 1.17 je

$$U_2 = \frac{U_1}{N} \doteq 25\,\mathrm{V}, \quad I_2 = \frac{U_2}{R_z} = \frac{U_1}{NR_z} \doteq 0{,}85\,\mathrm{A},$$

$$I_1 = \frac{I_2}{N} = \frac{U_1}{N^2 R_z} \doteq 95\,\mathrm{mA} \Rightarrow \boxed{R_i = \frac{U_1}{I_1} = R_z N^2} = 2430\,\Omega,$$

Ideální transformátor je bezeztrátový: $P_1 = U_1 I_1 = P_2 = U_2 I_2 \doteq 22\,\mathrm{W}$.

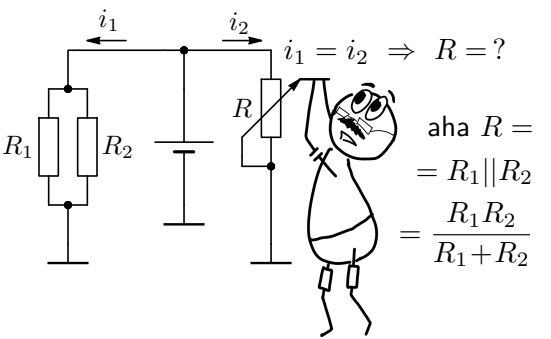
Experiment: viz přednáška, případně viz i simulaci.

Poznámky I

Kapitola 2

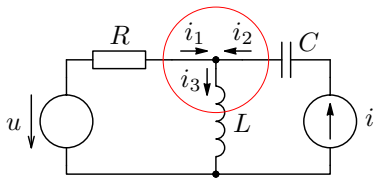
Základní metody analýzy elektrických obvodů, stejnosměrný ustálený stav (SUS)

Tato kapitola představuje fundamentální zákony, na kterých je založena analýza elektrických obvodů, tj. matematický popis jejich funkce. Uživatel se naučí základním technikám analýzy elektrických obvodů, které využije na zjednodušování a řešení elementárních obvodů. Zákony jsou pak aplikovány na zjednodušování rezistivních obvodů pomocí řazení elektrických prvků a použití náhradních zapojení.



2.1. Kirchhoffovy zákony

2.1.1. První Kirchhoffův zákon



Podle rovnice kontinuity $\oint_S \mathbf{J}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = 0$:

$$i_3 - i_1 - i_2 = 0$$

Obrázek 2.1: Znázornění proudů pro 1. Kirchhoffův zákon.

1. Kirchhoffův zákon (KZ)

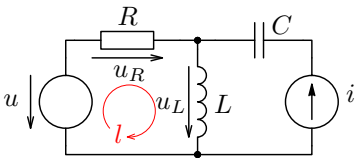
Součet všech proudů vytékajících z uzlu je roven 0.

$$\sum_k i_k = 0 \tag{2.1}$$

Pro uvedený příklad pak podle 1. Kirchhoffova zákona platí:

$$\boxed{i_3 = i_1 + i_2}$$

2.1.2. Druhý Kirchhoffův zákon



Podle rovnice $\oint_l \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = 0$:

$$-u + u_R + u_L = 0$$

Obrázek 2.2: Znázornění napětí v uzavřené smyčce pro 2. Kirchhoffův zákon.

2. Kirchhoffův zákon

Součet všech napětí v uzavřené smyčce je roven 0.

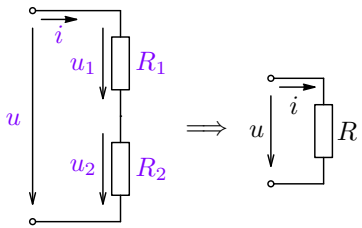
$$\sum_k u_k = 0 \tag{2.2}$$

Pro uvedený příklad pak podle 2. Kirchhoffova zákona platí:

$$\boxed{u = u_R + u_L}$$

2.2. Řazení základních elektrických prvků

2.2.1. Sériové řazení rezistorů



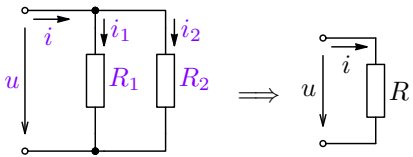
Dle 2. KZ platí: $u = u_1 + u_2 = R_1 i + R_2 i = (R_1 + R_2) i = Ri \quad \Longrightarrow \quad \boxed{R = R_1 + R_2}$

Sériové řazení rezistorů

Výsledný odpor sériově řazených rezistorů je dán součtem jednotlivých odporů.

$$R = \sum_k R_k \tag{2.3}$$

2.2.2. Paralelní řazení rezistorů



Dle 1. KZ platí: $i = i_1 + i_2 = \frac{u}{R_1} + \frac{u}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) u = \frac{1}{R} u$, resp. $i = (G_1 + G_2)u = Gu$

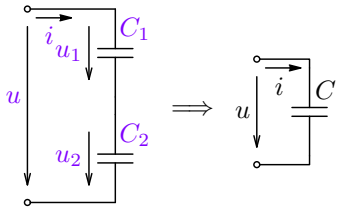
$$\Longrightarrow \quad \boxed{\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = R_1 || R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}, \quad \text{resp.} \quad \boxed{G = G_1 + G_2}$$

Paralelní řazení rezistorů

Výsledná vodivost paralelně řazených rezistorů je dána součtem jednotlivých vodivostí.

$$G = \sum_k G_k = \frac{1}{R} = \sum_k \frac{1}{R_k} \tag{2.4}$$

2.2.3. Sériové řazení kapacitorů



$$u = u_1 + u_2 = \frac{1}{C_1}\int_0^t i(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{C_2}\int_0^t i(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big|_{u_{C_k}(0)=0} =$$

$$= \left(\frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}\right) = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = Q\frac{1}{C} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

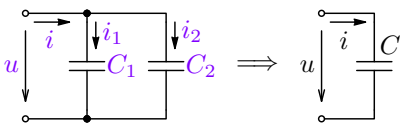
Sériové řazení kapacitorů

Převrácená hodnota celkové kapacity sériově řazených kapacitorů je rovna součtu převrácených hodnot jednotlivých kapacit.

$$\frac{1}{C} = \sum_k \frac{1}{C_k} \tag{2.5}$$

Poznámka: Analýzy zapojení s kapacitory a induktory v simulačním programu jsou zde uvedeny pouze ilustrativně, vyžadují totiž znalosti následných partií kurzu (5 and 7).

2.2.4. Paralelní řazení kapacitorů



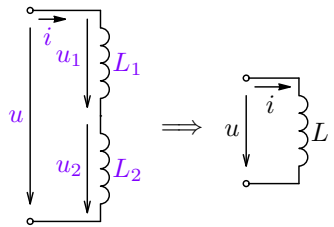
$$i = i_1 + i_2 = C_1\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + C_2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = (C_1 + C_2)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{C = C_1 + C_2}$$

Paralelní řazení kapacitorů

Hodnota celkové kapacity paralelně řazených kapacitorů je rovna součtu hodnot jednotlivých kapacit.

$$C = \sum_k C_k \tag{2.6}$$

2.2.5. Sériové řazení induktorů



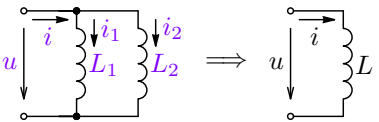
$$u = u_1 + u_2 = L_1\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L_2\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = (L_1 + L_2)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{L = L_1 + L_2}$$

Sériové řazení induktorů

Hodnota celkové indukčnosti sériově řazených induktorů je rovna součtu hodnot jednotlivých indukčností.

$$L = \sum_k L_k \tag{2.7}$$

2.2.6. Paralelní řazení induktorů



$$i = i_1 + i_2 = \frac{1}{L_1}\int_0^t u(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{L_2}\int_0^t u(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big|_{i_{L_k}(0)=0} =$$

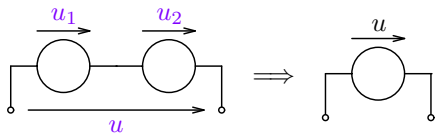
$$= \left(\frac{\Phi}{L_1} + \frac{\Phi}{L_2}\right) = \Phi\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right) = \Phi\frac{1}{L} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}}$$

Paralelní řazení induktorů

Převrácená hodnota celkové indukčnosti paralelně řazených induktorů je rovna součtu převrácených hodnot jednotlivých indukčností.

$$\frac{1}{L} = \sum_k \frac{1}{L_k} \tag{2.8}$$

2.2.7. Řazení ideálních napěťových zdrojů



Opět dle 2. Kirchhoffova zákona platí:

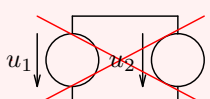
$$u = u_1 + u_2$$

Sériové spojení ideálních napěťových zdrojů

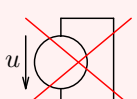
Sériově spojení shodně orientovaných ideálních napěťových zdrojů lze nahradit jedním ideálním napěťovým zdrojem jehož napětí je dáno součtem napětí jednotlivých zdrojů.

$$u = \sum_k u_k \tag{2.9}$$

Paralelní spojení ideálních napěťových zdrojů

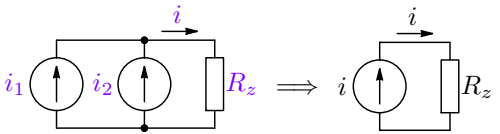


je NEPŘÍPUSTNÉ!



Zkrat je vlastně ideální zdroj napětí o velikosti $0\,\mathrm{V}$. Obvodem by pak tekl limitní proud $\to \infty$.

2.2.8. Řazení ideálních proudových zdrojů



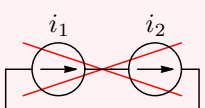
Opět dle 1. Kirchhoffova zákona platí:
$$i = i_1 + i_2$$

Paralelní spojení ideálních proudových zdrojů

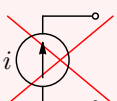
Paralelní spojení shodně orientovaných ideálních proudových zdrojů lze nahradit jedním ideálním proudovým zdrojem jehož proud je dán součtem proudů jednotlivých zdrojů.

$$i = \sum_k i_k \tag{2.10}$$

Sériové spojení ideálních proudových zdrojů



je NEPŘÍPUSTNÉ!

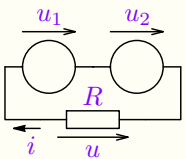


Rozpojený obvod je vlastně ideální zdroj proudu o velikosti 0 A. Na zdroji by pak bylo limitní napětí $u = iR_z \to \infty|_{R_z \to \infty}$.

Příklad 2.1

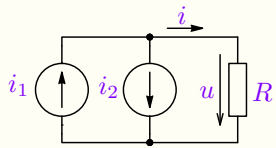
Zadání: Určete proud a napětí na rezistoru R pro zapojení (a) i (b), jsou-li dány následující hodnoty prvků:

(a)



$u_1 = 5\,\mathrm{V}$
$u_2 = -3\,\mathrm{V}$
$R = 2\,\mathrm{k\Omega}$

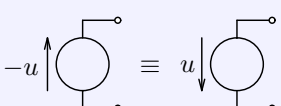
(b)

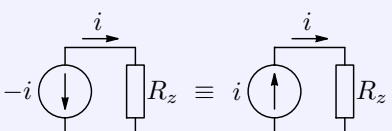


$i_1 = -10\,\mathrm{mA}$
$i_2 = -20\,\mathrm{mA}$
$R = 500\,\Omega$

Řešení (a): $u = u_1 + u_2 = 5 - 3 = 2\,\mathrm{V}$, $i = -\frac{u}{R} = -1\,\mathrm{mA}$
Řešení (b): $i = i_1 - i_2 = -10 - (-20) = 10\,\mathrm{mA}$, $u = iR = 5\,\mathrm{V}$

Změna znaménka u zdroje znamená změnu orientace





2.3. Analýza elementárních obvodů ve stejnosměrném ustáleném stavu (SUS)

Stejnosměrný ustálený stav (SUS)

SUS v obvodu znamená, že budicí zdroje jsou stejnosměrné (konstantní) a dále, že všechny přechodné děje (nabíjení C a L) jsou ukončeny a obvod je v ustáleném stavu – **všechny obvodové veličiny jsou konstantními funkcemi času.** Pak pro napětí na induktoru a proud kapacitorem platí:

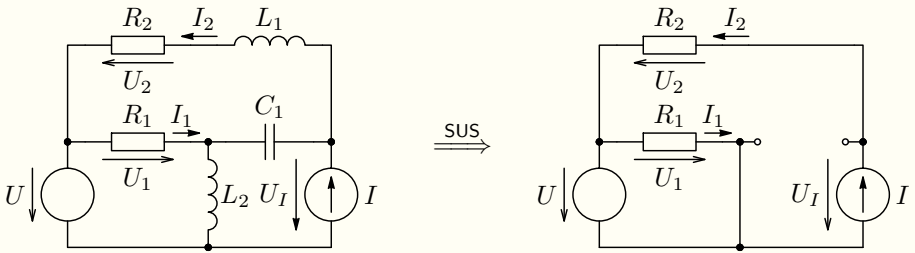
$$u_L = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\bigg|_{i_L=\text{konst.}} = 0, \qquad i_C = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\bigg|_{u_C=\text{konst.}} = 0$$

To znamená, že **induktor lze v případě SUS nahradit zkratem a kapacitor rozpojeným obvodem a poměry v celém obvodu se nezmění**.

Příklad 2.2

Zdání: Určete napětí U_1, U_2, U_I a proudy I_1 I_2 pro zapojení uvedené níže, pokud je obvod v SUS.

Řešení: Obvod v SUS překreslíme tak, že **induktor nahradíme zkratem** a **kapacitor rozpojeným obvodem**. Z překresleného obvodu je zřejmé, že:



$U_1 = U$, jelikož R_1 je paralelně ke zdroji napětí U a

$I_2 = I$, jelikož R_2 je v sérii se zdrojem proudu I, pak

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U}{R_1}, \qquad U_2 = I_2 R_2 = I R_2, \quad \text{a} \quad U_I = U + U_2 = U + I R_2.$$

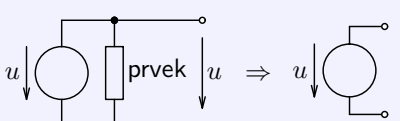
Proud napěťového zdroje a napětí proudového zdroje

Proud napěťového zdroje je dán hodnotou napětí a vnějším obvodem. Podobně napětí na proudovém zdroji je dáno hodnotou proudu a vnějším obvodem. Tyto veličiny nelze určit bez znalosti „zátěže“.

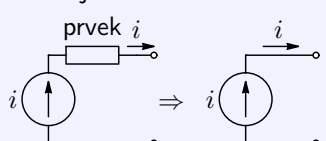
Prvky paralelně k napěťovému zdroji nebo v sérii s proudovým zdrojem

Prvek zapojený paralelně k ideálnímu napěťovému zdroji ovlivňuje pouze proud tímto zdrojem. Prvek zapojený v sérii s ideálním proudovým zdrojem ovlivňuje pouze napětí na tomto zdroji. Tyto prvky nemají vliv na žádnou jinou obvodovou veličinu ⇒

Jakýkoli obvodový prvek mimo napěťový zdroj zapojený paralelně k ideálnímu napěťovému zdroji lze odpojit, pokud není třeba určit proud napěťovým zdrojem.



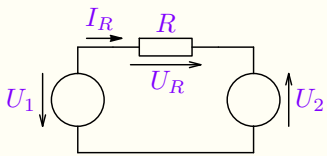
Jakýkoli obvodový prvek mimo proudový zdroj zapojený v sérii s proudovým zdrojem lze nahradit zkratem, pokud není třeba určit napětí na proudovém zdroji.

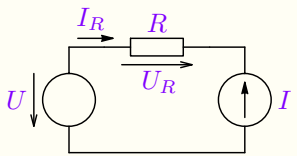


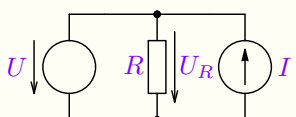
2.3.1. Elementární příklady s řazením zdrojů

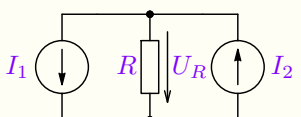
Příklad 2.3

Zadání: Určete napětí U_R na rezistoru R a případně i proud proud I_R tímto rezistorem pro zapojení uvedená níže.









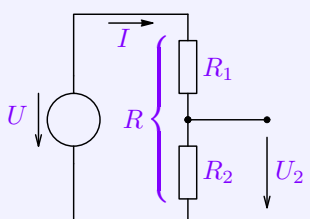
Řešení: viz přednáška a analýzu (odkazy na jednotlivých obrázcích).
Řešte i pro případ různých orientací zdrojů.

2.3.2. Metoda postupného zjednodušování

Ohmův zákon a Kirchhoffovy zákony s výše uvedenými pravidly řazení prvků lze přímo využít při analýze elementárních obvodů ve SUS.

Odporový dělič napětí

Zadání: Vypočítejte napětí U_2 na výstupu odporového děliče napětí.



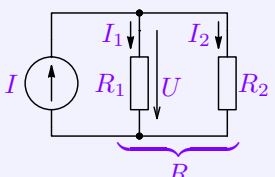
$$I = \frac{U}{R} = \frac{U}{R_1 + R_2},$$

$$\boxed{U_2 = IR_2 = U\frac{R_2}{R_1 + R_2}} \tag{2.11}$$

Použití: Vstupní obvody měřicích přístrojů, snímání a přizpůsobení napětí (ZV stabilizátorů – bude ukázáno v závěru kurzu), ...

Odporový dělič proudu

Zadání: Vypočítejte proud I_1 a I_2 odporového proudového děliče.



$$U = IR = I\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2},$$

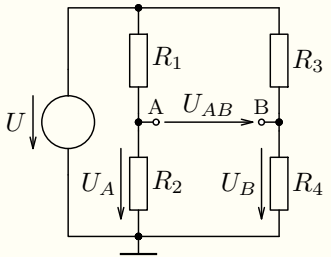
$$\boxed{I_1 = \frac{U}{R_1} = I\frac{R_2}{R_1 + R_2}} \quad (2.12)$$

$$\boxed{I_2 = \frac{U}{R_2} = I\frac{R_1}{R_1 + R_2}} \quad (2.13)$$

Použití: Vstupní obvody měřicích přístrojů (proudové bočníky).

Příklad 2.4

Zadání: Určete výstupní napětí U_{AB} odporového můstku dle obrázku níže, pokud jsou zadány následující hodnoty prvků:



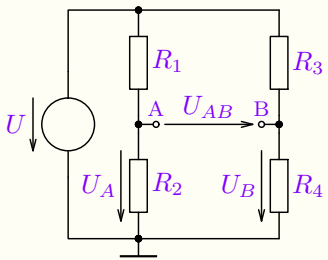
$U = 6\,\mathrm{V}$,
$R_1 = 4\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 2\,\mathrm{k\Omega}$,
$R_3 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_4 = 5\,\mathrm{k\Omega}$.

Řešení:

$$U_A = U\frac{R_2}{R_1 + R_2} = 2\,\mathrm{V}, \quad U_B = U\frac{R_4}{R_3 + R_4} = 5\,\mathrm{V}$$

$$U_{AB} = U_A - U_B = -3\,\mathrm{V}$$

Označení zemní svorkou se často objevuje pro určení referenčního bodu s nulovým potenciálem. Toto je nutné např. v simulačních programech.



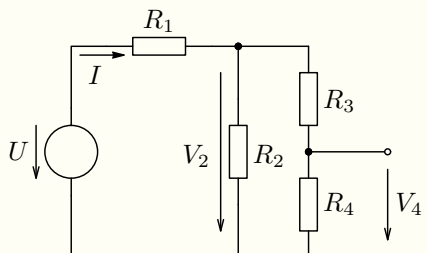
$U = 6\,\mathrm{V}$,
$R_1 = 4\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 2\,\mathrm{k\Omega}$,
$R_3 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_4 = 5\,\mathrm{k\Omega}$.

Diskuse:
Kdy je výsledek nezávislý na velikosti napájecího napětí U?
Jak by se řešil stejný obvod napájený zdrojem proudu $I = 2\,\mathrm{mA}$?,
Lze řešit stejný obvod zatížený rezistorem $R_z = 5/6\,\mathrm{k\Omega}$ pouze s využitím metody postupného zjednodušování?

viz. přednáška a analýza.

Příklad 2.5

Zadání: Určete výstupní napětí U_4 na rezistoru R_4 pro zapojení uveden níže, pokud jsou zadány následující hodnoty prvků:

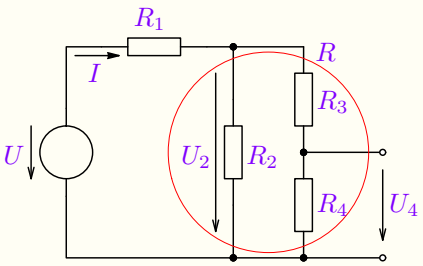


$U = 6\,\mathrm{V}$,
$R_1 = R_3 = R_4 = 1\,\mathrm{k\Omega}$,
$R_2 = 2\,\mathrm{k\Omega}$.

Řešení: pomocí řazení odporů

Zadání: Určete výstupní napětí U_4 na rezistoru R_4 pro zapojení uveden níže, pokud jsou zadány následující hodnoty prvků:

Řešení:



$$U = 6\,\mathrm{V},$$
$$R_1 = R_3 = R_4 = 1\,\mathrm{k\Omega},$$
$$R_2 = 2\,\mathrm{k\Omega}.$$

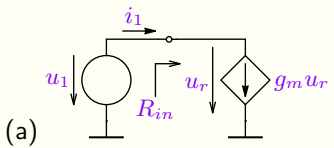
$$R = R_2||(R_3 + R_4) = 1\,\mathrm{k\Omega}, \quad U_2 = U\frac{R}{R_1 + R} = \frac{U}{2} = 3\,\mathrm{V}$$

$$U_4 = U_2\frac{R_4}{R_3 + R_4} = \frac{U_2}{2} = 1{,}5\,\mathrm{V}$$

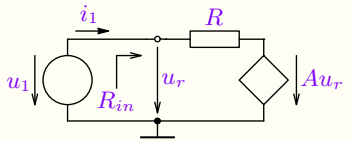
viz také přednášku a analýzu.

Příklad 2.6 Elementární příklady s řízenými zdroji

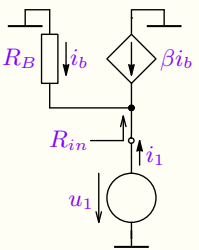
Zadání: Určete vstupní odpor R_{in} jako poměr $\frac{u_1}{i_1}$ pro zapojení uvedená níže pro $g_m > 0$ a $\beta > 0$.



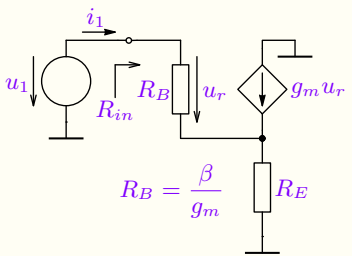
(a)



(b)



(c)

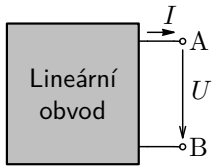


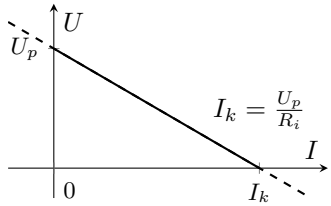
(d)

Řešení: viz přednáška včetně komentáře k praktickému využití (dynamická zátěž/bootstrap/Millerův efekt (b), náhradní linearizovaný model tranzostoru (b), (d) pro princip zesilovače, apod).

2.3.3. Theveninův a Nortonův teorém

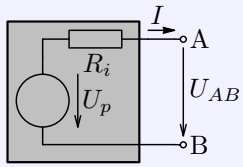
Lineární obvod (dvojpól) vykazující následující volt-ampérovou charakteristiku lze na svorkách A–B nahradit náhradním obvodem dle Theveninova nebo Nortonova teorému.





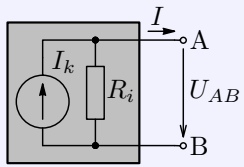
Theveninův teorém

Lineární aktivní odporový dvojpól lze nahradit napěťovým zdrojem U_p v sérii s rezistorem R_i, kde U_p je napětí na svorkách A–B naprázdno (bez zátěže) a odpor $R_i = \frac{U_p}{I_k}$, přičemž I_k je proud svorkami A–B nakrátko (do zkratu).

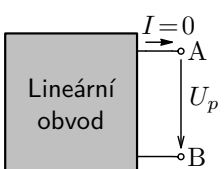


Nortonův teorém

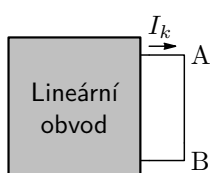
Lineární aktivní odporový dvojpól lze nahradit proudovým zdrojem I_k paralelně s rezistorem R_i, kde I_k je proud svorkami A–B nakrátko (do zkratu) a odpor $R_i = \frac{U_p}{I_k}$, přičemž U_p je napětí na svorkách A–B naprázdno (bez zátěže).



Napětí U_p se určí jako napětí naprázdno nahrazovaného obvodu, viz následující obrázek (a) a proud I_k se určí jako proud nakrátko nahrazovaného obvodu, viz následující obrázek (b):



(a)

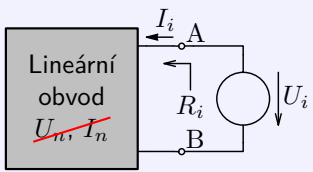


(b)

Alternativní určení odporu R_i

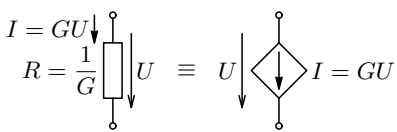
Vnitřní odpor R_i Theveninova či Nortonova obvodu lze určit alternativně, jako odpor mezi mezi svorkami A–B, přičemž se vnitřní nezávislé zdroje nulují – jejich velikost se uvažuje nulová ($U_n = 0$, $I_n = 0$) $\Rightarrow$ napěťové zdroje se nahradí zkratem a proudové zdroje se nahradí rozpojeným obvodem.

Pokud obvod **neobsahuje řízené zdroje**, lze určit vnitřní odpor metodou postupného zjednodušování. **Obecně** je třeba obvod na svorkách A–B vybudit buď nezávislým zdrojem napětí (U_i) nebo proudu (I_i) a odpor určit pomocí Ohmova zákona:



$$R_i = \frac{U_i}{I_i}$$

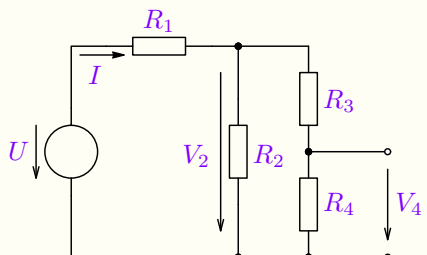
Poznámka: Řízené zdroje nelze nulovat, jelikož mohou modelovat např. rezistor, viz zapojení (a) příkladu 2.6 a obrázek vpravo.



Obrázek 2.3: Náhrada rezistoru řízeným zrojem.

Příklad 2.7

Zadání: Určete výstupní napětí U_4 na rezistoru R_4 zjednodušením části obvodu pro zapojení uvedené níže pomocí Theveninova či Nortonova teorému, pokud jsou zadány následující hodnoty prvků:

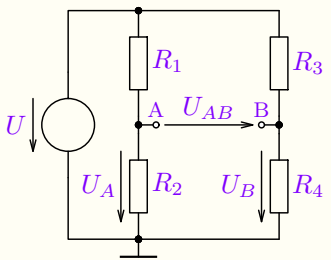


$U = 6\,\mathrm{V}$,
$R_1 = R_3 = R_4 = 1\,\mathrm{k\Omega}$,
$R_2 = 2\,\mathrm{k\Omega}$.

Řešení: viz přednáška.

Příklad 2.8

Zadání: Určete výstupní napětí U_{AB} odporového můstku dle obrázku níže, pokud jsou zadány následující hodnoty prvků a pokud je můstek na svorkách A–B zatížen rezistorem $R_5 = 5/6\,\mathrm{k\Omega}$. Využijte Theveninova náhradního obvodu.



$U = 6\,\mathrm{V}$,
$R_1 = 4\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 2\,\mathrm{k\Omega}$,
$R_3 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_4 = 5\,\mathrm{k\Omega}$.

Řešení: Lze řešit buď náhradou celého zapojení mimo zatěžovací rezistor jedním nebo dvěma Theveninovými obvody – viz přednáška.

Dále lze řešit pomocí metody transfigurace „trojúhelník-hvězda“, což však přesahuje rámec tohoto materiálu. Lze použít i metodu superpozice při dvojnásobném zapojení U, a dále obecné metody sestavování rovnic, jak bude uvedeno dále.

2.3.4. Princip superpozice

Princip superpizice se využívá pro řešení lineárních obvodů buzených několika nezávislými zdroji.

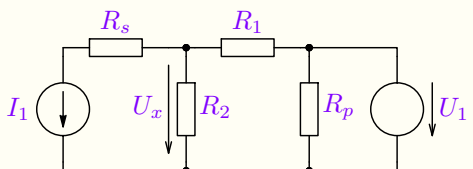
Princip superpozice

- Lineární obvod buzený N nezávislými zdroji (napětí, proudu) lze řešit separátně jako N obvodů, přičemž v každém z nich figuruje aktivně právě jeden z N nezávislých zdrojů s nenulovou hodnotou a všechny ostatní se uvažují s nulovou hodnotou (všechny ostatní napěťové zdroje se nahradí zkratem a proudové zdroje se nahradí rozpojeným obvodem).
- Řízené zdroje zůstávají beze změny v každém z N obvodů (řízený zdroj se může chovat i jako pasivní prvek, viz např. zapojení (a) příkladu 2.6).
- **Hledaná obvodová veličina (napětí, proud) je součtem N příspěvků od jednotlivých zdrojů.**

- **Metoda superpozice neplatí pro výkony!** Vysvětlení: zdroj se může chovat i jako spotřebič energie (např. při nabíjení akumulátoru), výkon na odporu je dán $\frac{U_R^2}{R} = I_R^2 R$, což je nelineární operace a je zřejmé, že $(U_{1R} + U_{2R})^2 \neq U_{1R}^2 + U_{2R}^2$, kde U_{xR} jsou příspěvky k U_R jednotlivých zdrojů.
- **Metoda superpozice neplatí pro nelineární obvody!** Vysvětlení: viz výše uvedený případ a dále např. skutečnost, že každý samostatný zdroj nemusí nelineární prvek „saturovat“, společně však mohou.

Příklad 2.9

Zadání: Určete napětí U_x na rezistoru R_2 pro zapojení uvedené níže, pokud jsou zadány následující hodnoty prvků:



$U_1 = 10\,\mathrm{V}$,
$I_1 = 20\,\mathrm{mA}$,
$R_1 = R_2 = 1\,\mathrm{k\Omega}$,
$R_s = R_p = 2\,\mathrm{k\Omega}$.

Řešení: viz přednáška.
analyzátor: viz výsledky symbolické analýzy – výsledek není funkcí R_p ani R_s.

Dále řešte obvody z příkladu 2.3 s použitím metody superpozice.

2.3.5. Výkon v SUS

Zdrojová a spotřebičová orientace udává orientaci napětí a proudů, přičemž pro uvedenou orientaci a kladné hodnoty výkonů platí, že zdrojová orientace znamená, že prvek výkon (energii) dodává a při spotřebičové orientaci prvek energii spotřebovává (mění v teplo) nebo akumuluje.

Zdrojová a spotřebičová orientace

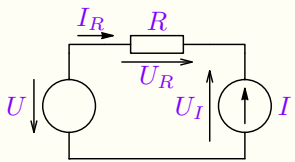


V uvedené orientaci mají zdroje zdrojovou orientaci a dodávají výkon $P = UI$ do obvodu, rezistory mají spotřebičovou orientaci a vždy spotřebovávají výkon[a] – v tomto případě spotřebovávají také výkon $P = UI$.

[a] Pokud by orientace jedné veličiny na rezistoru byla opačná vyjde opačně i její znaménko.

Příklad 2.10

Zadání: Určete výkonovou bilanci jednotlivých prvků obvodu uvedeného níže, pokud jsou zadány následující hodnoty prvků.
Jakou hodnotu musí mít zdroj proudu I, aby jeho dodávaný/odebíraný výkon byl nulový? Pro jaké hodnoty se chová jako zdroj dodávající energii a pro jaké jako spotřebič.



$U = 10\,\mathrm{V},$
$R = 100\,\Omega,$
$I = 0{,}3\,\mathrm{A}.$

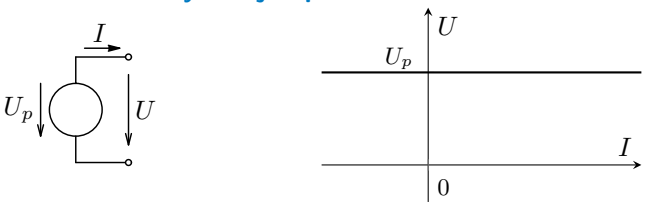
Řešení: viz přednáška včetně analýzy.

Analogicky lze řešit otázku, jakou hodnotu musí mít zdroj napětí U, aby dodávaný/odebíraný výkon zdroje proudu I byl nulový.

Čtenář může samostatně řešit otázku výkonů pro schéma, kde jsou jednotlivé prvky zapojeny paralelně.

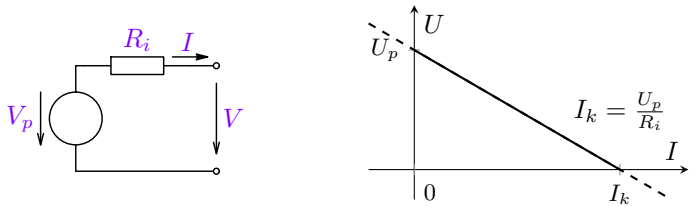
2.3.6. Reálné zdroje napětí a proudu

Ideální a reálný zdroj napětí



Jakýkoli reálný lineární zdroj nemůže, na rozdíl od zdroje ideálního, dodat do zátěže nekonečný výkon. V případě napěťového zdroje modelujeme tuto skutečnost jeho vnitřním odporem R_i, který je zapojen v sérii, viz obrázek níže.

Obrázek 2.4: Schématická značka ideálního zdroje konstantního napětí a jeho zatěžovací charakteristika.



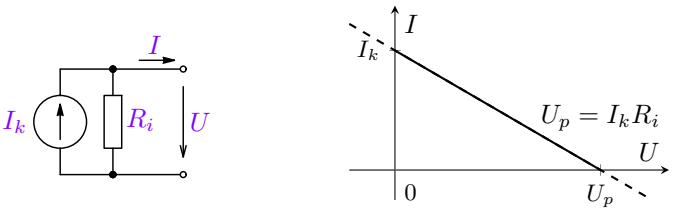
Napětí naprázdno reálného napěťového zdroje je pak napětím vlastního zdroje U_p, jelikož úbytek napětí na R_i je nulový. Proud do zkratu je pak konečný (proud nakrátko I_k) a výkon $U_p I_k$ se celý spotřebuje ve vnitřním odporu zdroje.

Obrázek 2.5: Náhradní lineární obvod reálného stejnosměrného napěťového zdroje a jeho zatěžovací charakteristika.

Ideální a reálný zdroj proudu



Obrázek 2.6: Schématická značka ideálního zdroje konstantního proudu a jeho zatěžovací charakteristika.

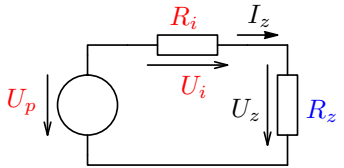


V případě proudového zdroje modelujeme tuto skutečnost jeho vnitřním odporem R_i zapojeným paralelně. Napětí naprázdno reálného proudového zdroje je pak konečné U_p a proud do zkratu I_k je dán hodnotou proudového zdroje.

Obrázek 2.7: Náhradní lineární obvod reálného stejnosměrného proudového zdroje a jeho zatěžovací charakteristika.

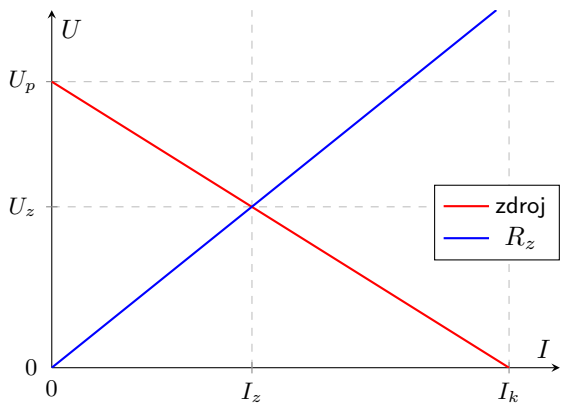
Obvodové veličiny zatíženého reálného zdroje

Analyzujme obvodové veličiny reálného napěťového zdroje s napětím naprázdno U_p a vnitřním odporem R_i zatíženého zatěžovacím rezistorem o odporu R_z.



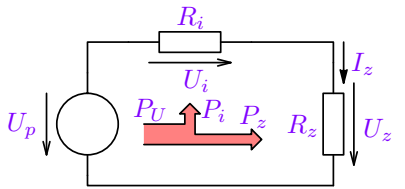
$$I_z = \frac{U_p}{R_i + R_z}, \qquad U_z = I_z R_z = U_p \frac{R_z}{R_i + R_z}$$

Analýzu lze provést i graficky, pokud vyneseme do jednoho grafu závislost výstupního napětí reálného zdroje na zatěžovacím proudu I_z, tzv. volt-ampérovou charakteristiku zdroje, resp. zatěžovací přímku a závislost napětí zatěžovacího rezistoru na zatěžovacím proudu I_z, tj. volt-ampérovou charakteristiku rezistoru R_z. Tam kde se obě charakteristiky protnou se nalézá řešení (výsledné U_z a I_z).



Obrázek 2.8: Zatěžovací charakteristika (závislost výstupního napětí na proudu) reálného zdroje a volt-amérová charakteristika zátěže R_z.

Výkonová bilance zatíženého reálného zdroje



Výkony jednotlivých prvků označme:
P_U: výkon dodávaný zdrojem,
P_i: výkon spotřebovaný na R_i a
P_z: výkon dodaný do zátěže R_z.

Obrázek 2.9: Výkonová bilance reálného zdroje napětí s vnitřním odporem R_i zatíženého rezistorem R_z.

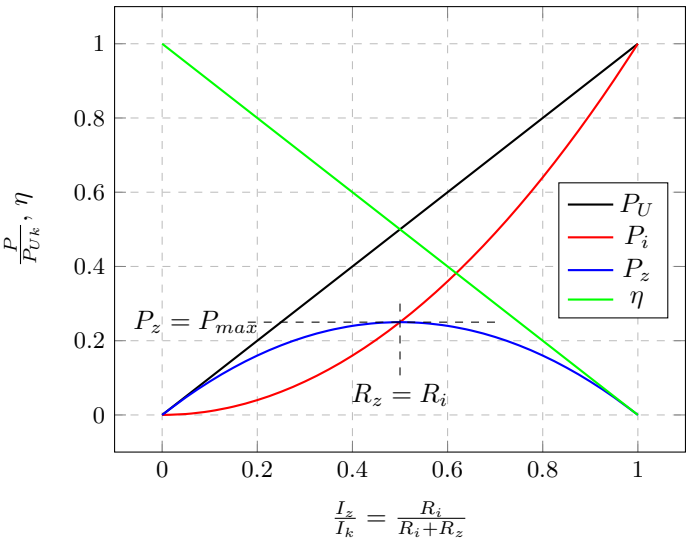
$$P_U = U_p I_z = U_p I_k \frac{I_z}{I_k} = P_{Uk}\frac{I_z}{I_k}, \qquad P_i = R_i I_z^2 = R_i I_k^2 \left(\frac{I_z}{I_k}\right)^2 = P_{Uk}\left(\frac{I_z}{I_k}\right)^2,$$

$$P_z = U_z I_z = P_U - P_i = P_{Uk}\left(\frac{I_z}{I_k} - \left(\frac{I_z}{I_k}\right)^2\right), \qquad \eta = \frac{P_z}{P_U} = 1 - \frac{I_z}{I_k},$$

kde $P_{Uk} = U_p I_k$ je výkon dodávaný zdrojem při zkratu na výstupu ($R_z = 0$), tj. při proudu nakrátko $I_k = \frac{U_p}{R_i}$,
přičemž $I_z = \frac{U_p}{R_i + R_z} \Rightarrow \frac{I_z}{I_k} = \frac{R_i}{R_i + R_z}$ a

η je tzv. účinnost předání výkonu z reálného zdroje do zátěže (výkon na zátěži/příkon ze zdroje).

Výkonové přizpůsobení



Obrázek 2.10: Výkony v obvodu 2.9 v závislosti na R_z.

Vyjděme z výkonové bilance zatíženého reálného zdroje, tj. reálného zdroje napětí nebo proudu s vnitřním odporem R_i zatíženého rezistorem R_z (viz obrázek 2.9). Závislost výše uvedených výkonů a účinnosti na velikosti zátěže R_z je pak uvedena na obrázku 2.10. Maximální výkon dodaný reálným zdrojem je pak $P_{max} = P_{Uk}/4$ pro $R_z = R_i$ při účinnosti $\eta = 1/2$, jak je odvozeno níže. Tento případ je označován jako výkonové přizpůsobení.

$$\left.\frac{\mathrm{d}P_z(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\frac{I_z}{I_k}} = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; P_z = P_{max} = \frac{1}{4}P_{Uk}, \qquad (2.14)$$

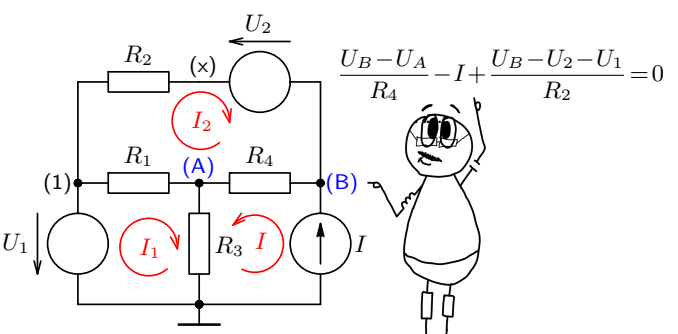
$$\frac{I_z}{I_k} = \frac{1}{2} \;\Rightarrow R_z = R_i, \quad \eta = \frac{1}{2}. \qquad (2.15)$$

Poznámky II

Kapitola 3

Obvodové rovnice pro analýzu elektrických obvodů

Tato kapitola uvádí postupy sestavení rovnic pro matematické řešení elektrických obvodů. Tyto postupy jsou založeny na fundamentálních Kirchhoffových zákonech, definovaných v minulé kapitole. Uživatel se seznámí se základy topologie elektrických obvodů a systematickým postupem sestavení rovnic popisující daný obvod. Tyto postupy jsou zcela obecné a platí pro jakékoli obvody se soustředěnými parametry. Jsou využívány i programy pro analýzu, které nejen sestaví matematický popis obvodu, ale výsledné rovnice dokáží řešit.



V případě rozsáhlejších obvodů se pro analýzu využívá systematického matematického popisu. Ten vychází z Kirchhoffových zákonů (KZ) a vede na sestavení obecných obvodových rovnic, jejichž řešením lze pak vyjádřit napětí a proudy analyzovaného obvodu. Pro sestavení obvodových (vlastní aplikaci KZ) je třeba systematicky obvod označit: pojmenovat tzv. uzly nebo smyčky.

Topologie elektrického obvodu

- **Uzel** je vodivé spojení dvou a nebo více obvodových prvků.
- **Větev** je vodivá cesta spojující dva uzly.
- **Smyčka** je uzavřená dráha spojená větvemi, přičemž v každém uzlu se smí stýkat pouze 2 větve, které jsou součástí dané smyčky.

Podrobný rozbor topologie obvodů přesahuje rámec tohoto kurzu a čtenář ho nalezne např. v [3].

Popis elektrického obvodu

Matematické vyjádření vztahů mezi obvodovými veličinami pomocí nezávislých rovnic, jejich řešením dostaneme vyjádření všech obvodových veličin (napětí a proudů). Nezávislé rovnice lze sestavit 2 metodami:

- **Metoda uzlových napětí** vychází z aplikace 1. Kirchhoffova zákona.
- **Metoda smyčkových proudů** vychází z aplikace 2. Kirchhoffova zákona.

3.1. Metoda uzlových napětí

Postup sestavení nezávislých rovnic pro metodu uzlových napětí

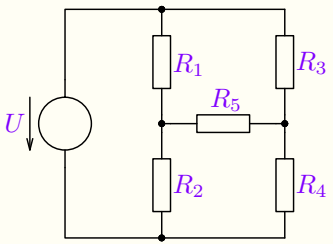
- Označíme jeden uzel jako referenční (zvolíme „zemní“ uzel s nulovým potenciálem) k němuž budou všechna napětí v ostatních uzlech vztažena...
  U všech galvanicky oddělených částí obvodu označíme rovněž jeden z uzlů jako referenční.
- Označíme napětí v ostatních uzlech (např. u_1, u_2, ..., u_{N-1}.), přičemž na zdroji napětí (dva uzly) je maximálně jedno neznámé napětí. Pokud je jeden uzel napěťového zdroje volen jako referenční, jsou napětí v obou uzlech, mezi kterými je zdroj zapojen známá nebo pro ně v tomto uzlu nesestavujeme rovnici (případ řízeného zdroje).
- Výsledný počet nezávislých rovnic X_u pro metodu uzlových napětí je pak:

$$\boxed{X_u = N - 1 - N_u} \tag{3.1}$$

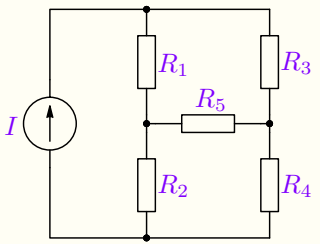
  kde N je počet uzlů obvodu a N_u je počet zdrojů napětí (i řízených).
- V X_u uzlech (pro každé neznámé uzlové napětí) aplikujeme 1. Kirchhoffův zákon – sestavíme rovnici. Předpokládáme přitom, že pro uzlové napětí, pro které právě sestavujeme rovnici je v obvodu nejvyšší (všechny proudy s výjimkou proudových zdrojů tečou z tohoto uzlu $\rightarrow$ některé proudy budou záporné).

Příklad 3.1

Zadání: Sestavte obvodové rovnice metodou uzlových napětí pro zatížený odporový můstek napájený jak (a) ze zdroje napětí $U = 6\,\mathrm{V}$, tak (b) ze zdroje proudu $I = 2\,\mathrm{mA}$ dle obrázku. Rovnice řešte pro následující hodnoty obvodových prvků: $R_1 = 4\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $R_3 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_4 = 5\,\mathrm{k\Omega}$ a $R_5 = 5/6\,\mathrm{k\Omega}$.



(a)



(b)

Řešení: viz přednáška (včetně řešení v GEEC i sestavených rovnic – odkazy z uvedených schémat).

3.2. Metoda smyčkových proudů

Postup sestavení nezávislých rovnic pro metodu smyčkových proudů

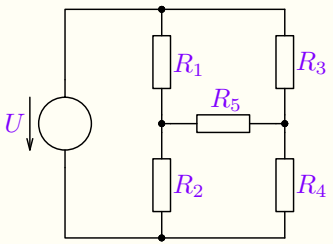
- Počet nezávislých rovnic X_i pro metodu smyčkových proudů je:

$$X_i = N_v - N + 1 - N_i \tag{3.2}$$

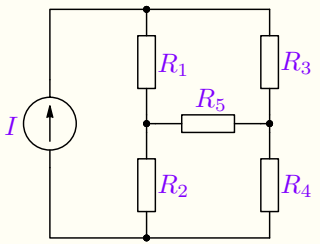
  kde N_v je počet větví obvodu, N je počet uzlů obvodu a N_i je počet zdrojů proudu (i řízených). Obsahuje-li obvod více jak jednu galvanicky oddělenou část, přičteme jejich počet zmenšený o 1 k X_i.
- Každým proudovým zdrojem vedeme pouze jednu známou smyčku, pro kterou pak nesestavujeme rovnici (proud smyčkou je známý; napětí zdroje proudu, které by pro sestavení bylo třeba, je neznámé).
- Dále označíme neznámé nezávislé smyčky, přičemž **nezávislá smyčka** musí procházet právě jednou větví nebo „sériově řazenými větvemi“ (tj. bez dělení proudu) jako jediná a každou větví, mimo větve s proudovým zdrojem, musí vést alespoň jedna nezávislá smyčka. Proudy v těchto neznámých smyčkách označíme (např. i_1, i_2, …, i_M, kde $M = X_i + N_i$). Jejich směr lze volit libovolně.
- Pro každou z neznámých smyček X_i, sestavíme rovnici aplikací 2. Kirchhoffova zákona, přičemž v dané smyčce pro kterou rovnici sestavujeme předpokládáme napěťové úbytky na prvcích ve stejné orientaci, jako má smyčkový proud dané smyčky. Proudy tekoucí jednotlivými větvemi jsou dle orientace součtem nebo rozdílem smyčkových proudů, které danou větví vedou.

Příklad 3.2

Zadání: Sestavte obvodové rovnice pomocí metody smyčkových proudů pro zatížený odporový můstek napájený jak (a) ze zdroje napětí $U = 6\,\mathrm{V}$, tak (b) ze zdroje proudu $I = 2\,\mathrm{mA}$ dle obrázku. Rovnice řešte pro následující hodnoty obvodových prvků: $R_1 = 4\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $R_3 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_4 = 5\,\mathrm{k\Omega}$ a $R_z = 5/6\,\mathrm{k\Omega}$.



(a)

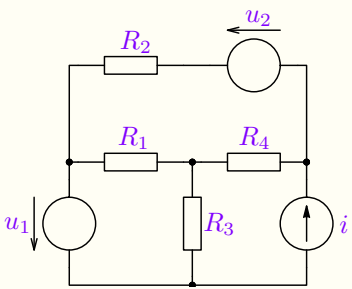


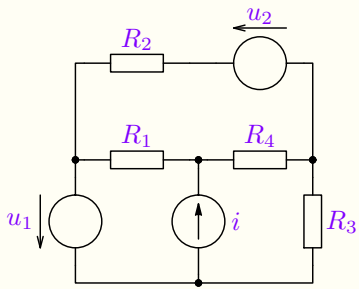
(b)

Řešení: viz přednáška (včetně řešení v GEEC i sestavených rovnic – odkazy z uvedených schémat).

Příklad 3.3

Zadání: Sestavte obvodové rovnice pomocí vhodné metody pro obvod a případně pro jeho alternaci uvedené níže.

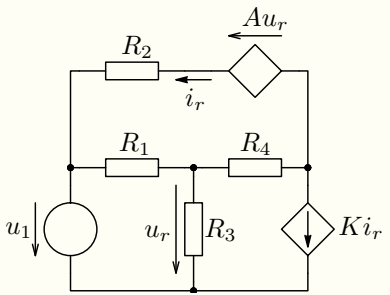




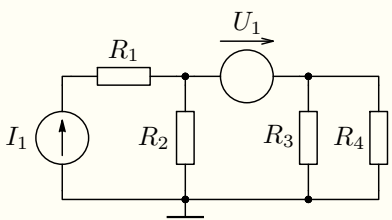
Řešení: viz přednáška a řešení v GEEC.

Příklad 3.4

Zadání: Sestavte obvodové rovnice pomocí vhodné metody následující obvody.



(a)

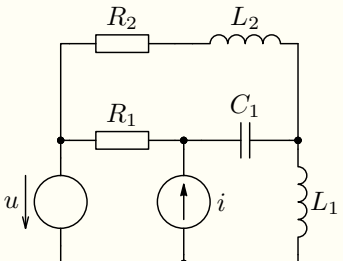


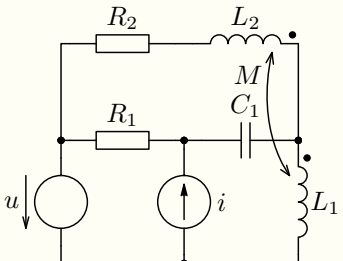
(b)

Řešení: (a) prakticky stejné jako v předchozím případě – viz přednáška, (b) sestavte samostatně a výsledky ověřte v GEEC.

Příklad 3.5

Zadání: Sestavte obvodové rovnice pomocí vhodné metody pro obvod uvedený na obrázku (a), případně jeho modifikaci s uvažováním vzájemné vazby induktorů (b).





Řešení: viz přednáška.

Při nenulových počátečních podmínkách se počáteční napětí kapacitorů, resp. proudy induktory zapíší přímo do rovnic v případě metody smyčkových proudů, resp. uzlových napětí. Zbývající podmínky se uplatní při řešení integro-diferenciálních rovnic. V případě sestavení rovnic v obrazové oblasti (viz kapitolu 7.3.2, obrázek 7.10) se do rovnic zapíší všechny počáteční podmínky bez ohledu na metodu. Viz také další příklady v dodatku U.7 a algoritmizaci sestavování rovnic, resp. analýz elektrických obvodů v dodatku A.

3.3. Typy obvodových rovnic podle

V případě SUS se jedná soustava algebraických rovnic jejíž řešení je jednoduché. V případě obecného obvodu se jedná o diferenciální rovnice. V případě nelineárního obvodu o nelineární, v případě lineárního obvodu o lineární, které lze pomocí LT převést na algebraické. Speciálním případem je pak harmonický ustálený stav (HUS) v lineárních obvodech, kde se jedná o algebraické rovnice s komplexními koeficienty (viz kapitola 5). Klasifikace obvodových modelů se soustředěnými parametry podle rychlosti a velikosti změn obvodových veličin, popis v časové oblasti:

změny		pomalé	rychlé
	modely	odporové	s akumulačními prvky
malé	lineární	lineární algebraické rovnice s konstantními koeficienty: $\mathbf{a}\mathbf{y}(t) = \mathbf{u}(t)$	obyčejné lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty: $\mathbf{a}\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} + \mathbf{b}\mathbf{y}(t) = \mathbf{u}(t)$
velké	nelineární	nelineární algebraické rovnice: $\mathbf{F}\big(\mathbf{y}(t)\big) = 0$	obyčejné nelineární diferenciální rovnice: $\mathbf{F}\left(\mathbf{y}(t), \frac{d\mathbf{y}(t)}{dt}\right) = 0$
malé i velké	parametrické	lineární algebraické rovnice s časově proměnnými koeficienty: $\mathbf{a}(t)\mathbf{y}(t) = \mathbf{u}(t)$	lineární diferenciální diferenciální rovnice s časově proměnnými koeficienty: $\mathbf{a}(t)\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} + \mathbf{b}(t)\mathbf{y}(t) = \mathbf{u}(t)$

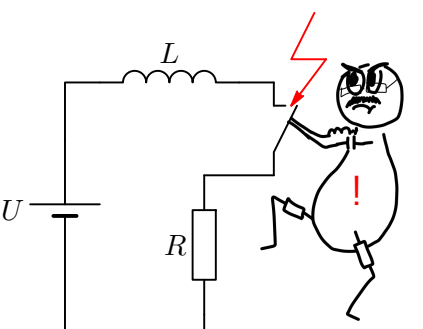
Pro velmi rychlé signály musíme uvažovat obvody s rozprostřenými parametry (viz kapitola 20). Mimo uvedené veličiny se vyskytují proměnné závislé na souřadnici $x = \langle 0, l \rangle$, tj. $\mathbf{y}(t,x)$ i derivace podle této souřadnice $\frac{\partial \mathbf{y}(t,x)}{\partial x}$.

Poznámky III

Kapitola 4

Přechodné děje 1. a 2. řádu

Tato kapitola představuje řešení elementárních elektrických obvodů v časové oblasti, tj. výpočet časové odezvy (funkce) obvodových veličin obvodu na jeho buzení jako je připojení zdroje, vybíjení akumulačních prvků, ... Uživatel se seznámí s použitím znalostí z minulých kapitol (definice základních prvků a zákony pro analýzu obvodů) k řešení časových odezev obvodů. Řešení bude ukázáno pro lineární obvody prvního i druhého řádu. Obvody vyšších řádů se řeší obtížně a mnohdy pouze s využitím programů pro analýzu, které nabízejí numerické řešení složitých, i nelineárních obvodů.



Doposud jsme se zabývali obvody buzenými konstantními, tj. stejnosměrnými signály (zdroji) a navíc byly tyto obvody v ustáleném stavu – všechny veličiny v obvodu jsou ustálené (v tomto případě konstantní).

1. Jaké velikosti budou mít obvodové veličiny, v okamžiku připojení (zapnutí) stejnosměrných zdrojů do obvodu s akumulačními prvky a jaký následný časový průběh, tzv. přechodový děj, dokud obvod nedosáhne ustáleného stavu? Víme, že vztahy mezi obvodovými veličinami základních lineárních prvků jsou:

$$\begin{aligned}
&\text{Rezistor:} && i_R(t) = \frac{u_R(t)}{R}, && u_R(t) = i_R(t)R \\
&\text{Kapacitor:} && i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}, && u_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(\tau)\,\mathrm{d}\tau + u_C(0) \\
&\text{Induktor:} && i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t u_L(\tau)\,\mathrm{d}\tau + i_L(0), && u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

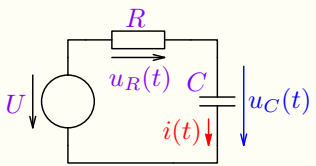
2. Jaké časové průběhy budou mít obvodové veličiny v ustáleném stavu, pokud budicí zdroje obvodu budou mít periodický časový průběh?
3. Jaké časové průběhy budou mít obvodové veličiny včetně přechodového děje, tj. při připojení zdrojů do obvodu, pokud budicí zdroje obvodu budou mít obecný časový průběh?

V této kapitole se budeme zabývat prvním případem, přičemž budeme uvažovat pouze **lineární obvody**.

4.1. Přechodné děje 1. řádu

Příklad 4.1

Zadání: Určete časový průběh napětí $u_C(t)$ a proudu $i_C(t)$ kapacitoru $C = 10\,\mathrm{mF}$, který byl ve vybitém stavu $u_C(0) = 0$ připojen přes rezistor $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$ ke zdroji stejnosměrného napětí $U = 10\,\mathrm{V}$ – nabíjení kapacitoru integračního článku.



$U = 10\,\mathrm{V},$
$R = 1\,\mathrm{k\Omega},$
$C = 10\,\mathrm{mF},$
$u_C(0) = 0\,\mathrm{V}.$

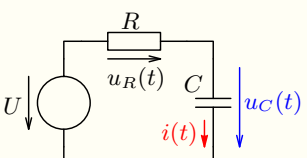
Experiment: viz přednáška, včetně analýzy v GEEC.

Řešení: Je zřejmé, že $u_C(\infty) = U = 10\,\mathrm{V}$, vzhledem k tomu, že $i(\infty) = i_C(\infty) = 0\,\mathrm{A}$. Dále víme, že energetické veličiny, tj. napětí na kapacitoru, resp. proud induktorem se nemohou měnit skokově (pokud tyto prvky nejsou přímo buzeny Diracovým pulzem proudu, resp. napětí), proto pro počáteční hodnotu napětí na kapacitoru platí $u_C(0_-) = u_C(0_+) = u_C(0) = 0\,\mathrm{V}$.

Řešení bez diferenciálního počtu: Kapacitor se v $t = 0$ chová jako napěťový zdroj o velikosti $u_C(0) = 0\,\mathrm{V}$ (zkrat):

$$i_C(0_+) = \frac{u_R(0)}{R} = \frac{U - u_C(0)}{R} = \frac{10 - 0}{1000} = 10\,\mathrm{mA}.$$

Dále předpokládejme, že pro $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$ bude změna obvodových veličin malá a lze je po těchto kvantech uvažovat jako konstanty, tj. $U_C(0..1) \doteq u_C(0)$, $I_C(0..1) \doteq i_C(0_+)$. Pak $\Delta Q = \Delta U_c C = I_C \Delta t$ a dále lze psát:



$U = 10\,\mathrm{V}$, $u_C(0) = 0\,\mathrm{V}$
$R = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $C = 10\,\mathrm{mF}$

$$U_C(0..1) \doteq u_C(0) = 0\,\mathrm{V}, \quad I_C(0..1) = \frac{U - U_C(0..1)}{R} = 10\,\mathrm{mA},$$

$$\Delta U_C(0..1) = \frac{\Delta Q(0..1)}{C} = \frac{I_C(0..1)\Delta t}{C} = 1\,\mathrm{V},$$

$$U_C(1..2) \doteq U_C(0..1) + \Delta U_c(0..1) = 1\,\mathrm{V}, \quad I_C(1..2) = \frac{U - u_C(1..2)}{R} = 9\,\mathrm{mA},$$

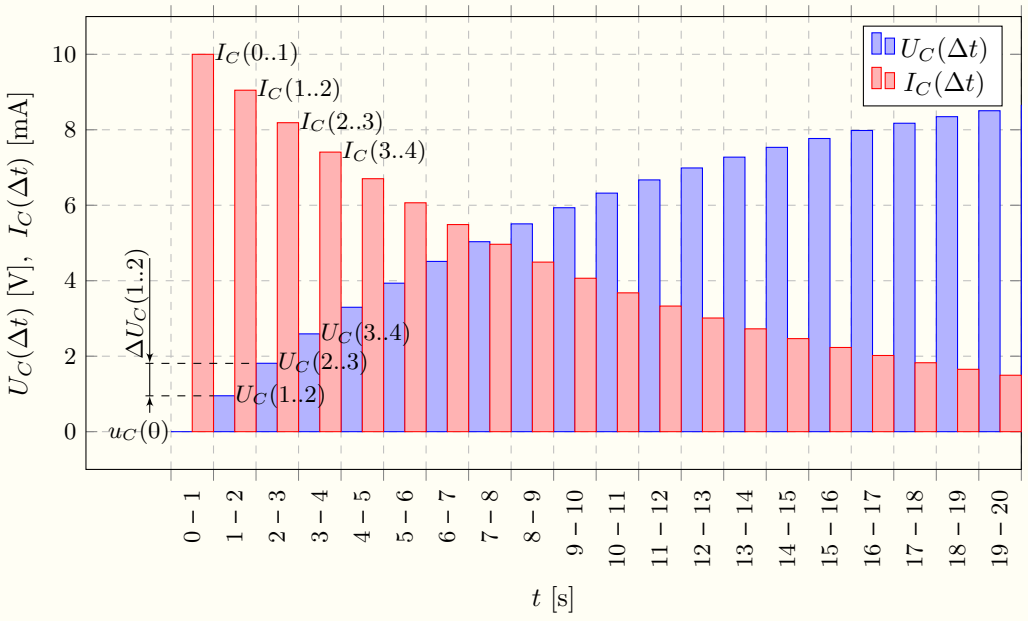
$$\Delta U_C(1..2) = \frac{I_C(1..2)\Delta t}{C} = 0{,}9\,\mathrm{V},$$

$$U_C(2..3) \doteq U_C(1..2) + \Delta U_c(1..2) = 1{,}9\,\mathrm{V}, \quad I_C(2..3) = \frac{U - u_C(2..3)}{R} = 8{,}1\,\mathrm{mA},$$

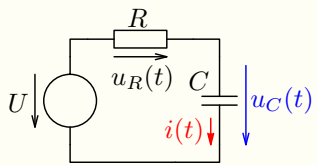
$$\Delta U_C(2..3) = \frac{I_C(2..3)\Delta t}{C} = 0{,}81\,\mathrm{V},$$

$$\vdots$$

Pokud vyneseme uvedené hodnoty do časového grafu, dostaneme:


$U_C(\Delta t)$
$I_C(\Delta t)$
$I_C(0..1)$
$I_C(1..2)$
$I_C(2..3)$
$I_C(3..4)$
$U_C(3..4)$
$U_C(2..3)$
$U_C(1..2)$
$\Delta U_C(1..2)$
$u_C(0)$
$U_C(\Delta t)$ [V], $I_C(\Delta t)$ [mA]
0
2
4
6
8
10
0 – 1
1 – 2
2 – 3
3 – 4
4 – 5
5 – 6
6 – 7
7 – 8
8 – 9
9 – 10
10 – 11
11 – 12
12 – 13
13 – 14
14 – 15
15 – 16
16 – 17
17 – 18
18 – 19
19 – 20
t [s]

Řešení pomocí diferenciálního počtu z metody uzlových napětí:



$$\frac{u_C(t)-U}{R}+C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}=0 \;\Rightarrow\; CR\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}+u_C(t)=U$$

$$\tau\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}+u_C(t)=0 \quad \text{homogenní rovnice}$$

$$\tau\lambda+1=0\Rightarrow\lambda=-\frac{1}{\tau} \quad n\text{-tá derivace} \rightarrow \lambda^n$$

$$u_C(t)=K\mathrm{e}^{\lambda t} \quad \text{řešení homogenní rovnice}$$

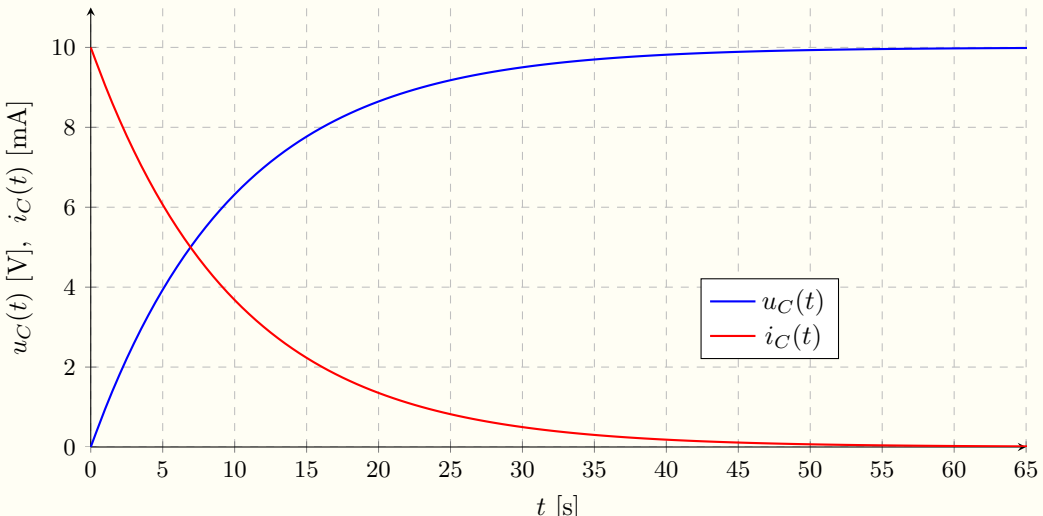
$$u_C(t)=K\mathrm{e}^{\lambda t}+u_p(t) \quad \text{řešení obecné rovnice}$$

Partikulární řešení $u_p(t)$ je při buzení stejnosměrným zdrojem konstanta, tj. $u_p(t)=u_C(\infty)=U=10\,\mathrm{V}=u_p(0)$, konstantu K lze určit z rovnice pro $u_C(0)$ a výsledné řešení pro tento případ, tj. $u_C(0)=0$ je pak:

$$u_C(0)=K\mathrm{e}^0+u_p(0)\Rightarrow K=u_C(0)-u_p(0)=u_C(0)-u_C(\infty),$$

$$\boxed{u_C(t)=\big(u_C(0)-u_p(0)\big)\mathrm{e}^{-t/\tau}+u_p(t)}=U\big(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}\big)=10-10\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}\ [\mathrm{V}], \tag{4.1}$$

$$i_C(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{CU}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau}=\frac{U}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau}=10\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}\ [\mathrm{mA}],\quad \text{kde}\quad \tau=RC=10\,\mathrm{s}. \tag{4.2}$$

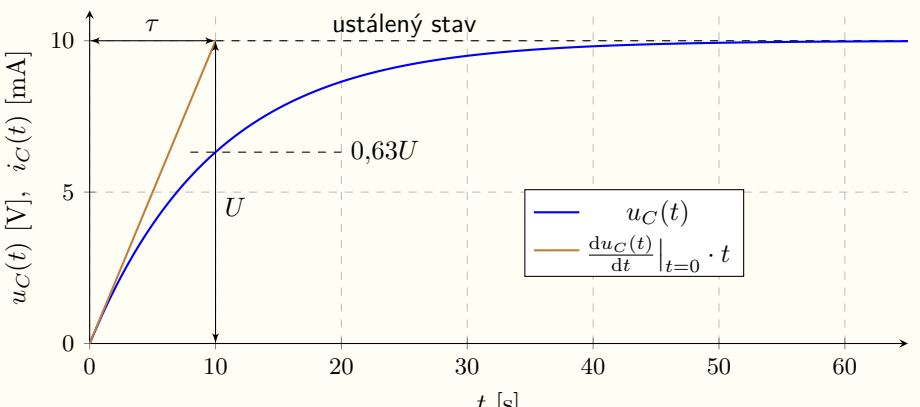


Obrázek 4.1: Časový průběh napětí $u_C(t)$ na kapacitoru a proudu $i_C(t)$ kapacitorem $C = 10\,\mathrm{mF}$ při jeho nabíjení ze zdroje stejnosměrného napětí $U = 10\,\mathrm{V}$ přes rezistor $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$ při $u_C(0) = 0$.

Význam časové konstanty τ:

Pokud určíme směrnici časového průběhu $u_C(t)$ v čase $t = 0$, tj. $\left.\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \frac{U}{\tau}$, pak:

$u_C(\tau) \doteq 0{,}63U = 63\,\%$ ustáleného stavu, $u_C(3\tau) \doteq 0{,}95U$, $u_C(5\tau) \doteq 0{,}99U$, $u_C(10\tau) \doteq 1U$



Komentář: význam pro praxi (např. u digitální linky) a potvrzení experimentem: viz přednáška a analýza.

Řešení pomocí diferenciálního počtu z metody smyčkových proudů:

$$i_C(t)R + \frac{1}{C}\int_0^t i_C(x)\,\mathrm{d}x + u_C(0) - U = 0 \;\Big|C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \;\Rightarrow\quad CR\frac{\mathrm{d}i_C(t)}{\mathrm{d}t} + i_C(t) = 0$$

Dostáváme přímo homogenní rovnici, jejíž řešení je opět $i_C(t) = K\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

Partikulární řešení je skutečně $i_p(t) = 0$, jelikož $i_C(\infty) = 0$ a konstantu K lze určit z rovnice je nutné určit z počátečních podmínek, ale pozor: zatímco $u_C(0_-) = u_C(0_+) = u_C(0)$, tak $i_C(0_-) = 0 \neq i_C(0_+)$!

$$i_C(0_+) = \frac{u_R(0)}{R} = \frac{U - u_C(0)}{R} = \frac{10-0}{1000} = 10\,\mathrm{mA},$$
$$i_C(0_+) = K\mathrm{e}^0 \Rightarrow K = i_C(0_+) = 10\,\mathrm{mA}$$

a výsledné řešení je pro $\tau = RC = 10\,\mathrm{s}$, $u_C(0) = 0\,\mathrm{V}$ a $U = 10\,\mathrm{V}$:

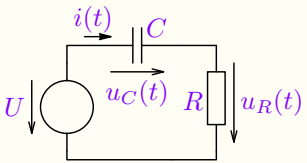
$$i_C(t) = K\mathrm{e}^{-t/\tau} = 10\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}\ [\mathrm{mA}]$$

$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(x)\,\mathrm{d}x + u_C(0) = U\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) = 10 - 10\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}\ [\mathrm{V}]$$

Nebo jedodušeji $u_C(t) = U - i_C(t)R$, což samozřejmě vede na stejný výsledek.

Příklad 4.2

Zadání: Určete časový průběh napětí $u_R(t)$ na rezistoru $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$ derivačního článku dle obrázku s kapacitorem $C = 10\,\mathrm{mF}$, který je nabit v $t = 0$ na napětí $u_C(0) = -5\,\mathrm{V}$ a připojen ke zdroji stejnosměrného napětí $U = 10\,\mathrm{V}$.



$U = 10\,\mathrm{V}$,
$R = 1\,\mathrm{k\Omega}$,
$C = 10\,\mathrm{mF}$,
$u_C(0) = -5\,\mathrm{V}$.

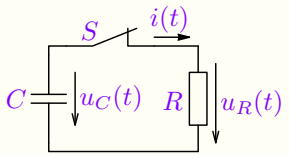
Řešení: Je zřejmé, že se jedná o prakticky totožný příklad s předchozím (rovnice pro smyčkový proud je stejná a pokud bychom zvolili referenční uzel na spojení kapacitoru s rezistorem, dostaneme schodnou rovnici i pro u_C). Jediná změna je v počáteční podmínce $u_C(0) = -5\,\mathrm{V}$. Požadované napětí u_R tedy vypočítáme z proudu $i(t)$, který je jako v předchozím případě dán rovnicí $i(t) = K\mathrm{e}^{-t/\tau}$, kde $\tau = RC = 10\,\mathrm{s}$ a konstantu K určíme opět z počátečních podmínek $K = i(0_+) = \frac{U - u_C(0)}{R} = \frac{10+5}{1000} = 15\,\mathrm{mA}$. Pak

$$i(t) = 15\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}\ [\mathrm{mA}] \Rightarrow u_R(t) = i(t)R = 15\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}\ [\mathrm{V}].$$

Časový průběh $i(t)$, resp. $u_R(t)$ je až na počáteční hodnotu shodný s průběhem $i_C(t)$ na obrázku 4.1.

Příklad 4.3

Zadání: Určete časový průběh napětí $u_C(t)$ a proudu $i_C(t)$ kapacitoru $C = 10\,\mathrm{mF}$, který byl nabit na $u_C(0) = 10\,\mathrm{V}$ a v čase $t = 0$ připojen prostřednictvím spínače S k rezistoru $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$.



$R = 1\,\mathrm{k\Omega}$,
$C = 10\,\mathrm{mF}$,
$u_C(0) = 10\,\mathrm{V}$.

Experiment: viz přednáška, včetně analýzy v GEEC.

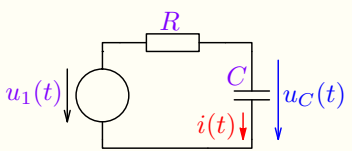
Řešení: Opět se jedná o modifikaci příkladu 4.1 a to jednodušší , jelikož $u_C(t) = u_R(t) = i(t)R$. Je zřejmé, že výsledné řešení bude ve tvaru $u_C(t) = K\mathrm{e}^{-t/\tau}$, vzhledem k tomu, že $u_C(\infty) = 0\,\mathrm{V}$. Konstanta K je opět daná počátečními podmínkami, v tomto případě jednodušeji – přímo energetickou veličinou $K = u_C(0) = 10\,\mathrm{V}$. Výsledné řešení pak je dáno předpisem:

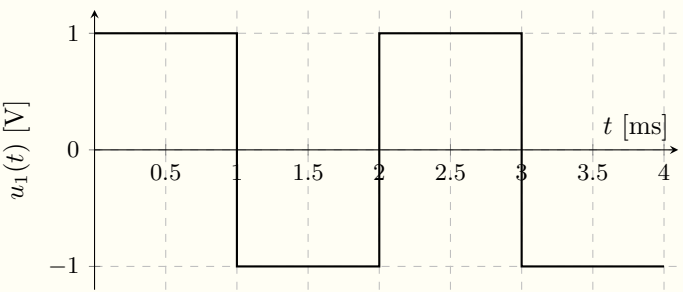
$$u_C(t) = 10\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}\ [\mathrm{V}], \qquad i(t) = \frac{u_C(t)}{R} = 10\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}\ [\mathrm{mA}]$$

Časový průběh $i_C(t)$ je evidentně shodný s průběhem na obrázku 4.1.

Příklad 4.4

Zadání: Určete časový průběh napětí $u_C(t)$ kapacitoru $C = 1\,\mu\mathrm{F}$, který je v $t = 0$ nabit na $u_C(0) \doteq -0.4621\,\mathrm{V}$ a připojen přes rezistor $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$ ke zdroji napětí $u_1(t)$ s obdélníkovým časovým průběhem o kmitočtu $f = 500\,\mathrm{Hz}$ a hodnotě „špička-špička“ $U_{pp} = 2\,\mathrm{V}$ dle následujícího obrázku.





Experiment: viz přednáška včetně analýzy v GEEC.

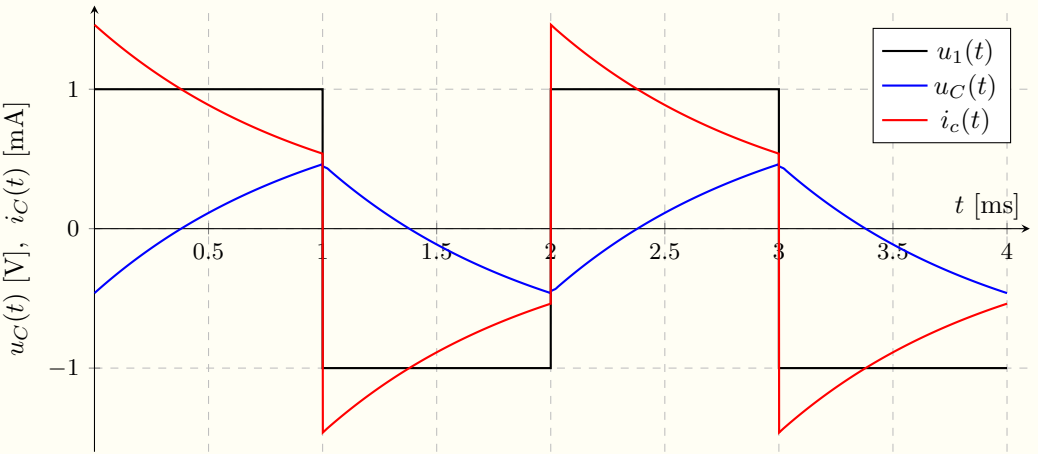
Řešení: Časový průběh lze řešit po částech se znalostí nabíjení a vybíjení kapacitoru z předchozích případů. V tomto případě je $\tau = RC = 1\,\mathrm{ms}$ a kapacitor se nabíjí střídavě ze zroje napětí $\pm 1\,\mathrm{V}$. Jednotlivé časové úseky lze přímo popsat s využitím vztahu 4.1, kde partikulární řešení je právě $u_p(t) = u_1(t) \to \pm 1\,\mathrm{V}$.

1. pro $t \in \langle 0, 1\rangle\,\mathrm{ms}$ platí $u_{C_1}(0) = u_C(0) = -0.4621\,\mathrm{V}$ a $u_p = 1\,\mathrm{V}$, pak
$$u_{C_1}(t) = -1{,}4621\,\mathrm{e}^{-1000t} + 1\ [\mathrm{V}], \qquad t \in \langle 0, 1\rangle\,\mathrm{ms},$$
2. pro $t \in \langle 1, 2\rangle\,\mathrm{ms}$ platí $u_{C_2}(0) = u_{C_1}(1 \cdot 10^{-3}) \doteq 0.4621\,\mathrm{V}$ a $u_p = -1\,\mathrm{V}$,
$$u_{C_2}(t) = 1{,}4621\,\mathrm{e}^{1-1000t} - 1\ [\mathrm{V}], \qquad t \in \langle 1, 2\rangle\,\mathrm{ms},$$
3. pro $t \in \langle 2, 3\rangle\,\mathrm{ms}$ platí $u_{C_3}(0) = u_{C_2}(2 \cdot 10^{-3}) \doteq -0.4621\,\mathrm{V}$ a $u_p = 1\,\mathrm{V}$,
$$u_{C_3}(t) = -1{,}4621\,\mathrm{e}^{2-1000t} + 1\ [\mathrm{V}], \qquad t \in \langle 2, 3\rangle\,\mathrm{ms},$$
atd.

Poznámka: Každá exponenciála platí pro různý čas a je nutné ji posunout, tj. např. $u_{C_2}(t) = 1{,}4621\,\mathrm{e}^{-1000(t-1\cdot 10^{-3})} - 1 = 1{,}4621\,\mathrm{e}^{1-1000t} - 1\ [\mathrm{V}]$, atd.

Proudy pro jednotlivé případy lze určit z výrazu $i_C(t) = \frac{u_1(t) - u_C(t)}{R}$, tj. např. pro $t \in \langle 0, 1\rangle\,\mathrm{ms}$ je $i_{C_1}(t) = -1{,}4621\,\mathrm{e}^{1000t}\ [\mathrm{mA}]$, atd.

První počáteční hodnota $u_{C_1}(0) = u_C(0)$ byla zvolena tak, aby průběh byl vertikálně symetrický od počátku a nedošlo k celkovému přechodnému ději (lze demonstrovat simulací).



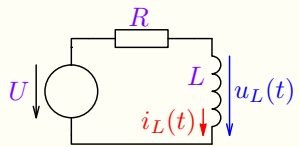
Obrázek 4.2: Časový průběh napětí $u_C(t)$ na kapacitoru a proudu $i_C(t)$ kapacitorem $C = 1\,\mu\mathrm{F}$ při jeho nabíjení ze zdroje napětí s obdélníkovým časovým průběhem o kmitočtu $f = 500\,\mathrm{Hz}$ a hodnotě „špička-špička“ $U_{pp} = 2\,\mathrm{V}$ přes rezistor $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$ při $u_C(0) = -0.4621\,\mathrm{V}$, viz analýza.

Příklad 4.5

Zadání: Digitální linka je buzena z generátoru o vnitřním odporu $50\,\Omega$ a výstupním napětím obdélníkového časového průběhu s úrovněmi 0 až $3{,}3\,\mathrm{V}$. Dodržíme maximální přípustné zpoždění $5\,\mathrm{ns}$ při přechodu z $0\,\mathrm{V}$ do úrovně log. 1, která je definovaná napěťovým rozsahem $\langle 2{,}5;\ 3{,}3\rangle\,\mathrm{V}$ a linka je zatížena kapacitní zátěží $15\,\mathrm{pF}$?

Řešení: Popište časovou funkcí průběh napětí mezi log. 0 a $3{,}3\,\mathrm{V}$. Vypočtěte, v jakém čase dosáhne tato funkce úrovně log. 1. Výpočet viz přednáška, včetně potvrzení analyzátorem GEEC.

Zadání: Určete časový průběh napětí $u_L(t)$ a proudu $i_L(t)$ induktoru $L = 10\,\mathrm{mH}$, který byl ve vybitém stavu $i_L(0) = 0$ připojen přes rezistor $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$ ke zdroji stejnosměrného napětí $U = 10\,\mathrm{V}$ – nabíjení induktoru LR článku.



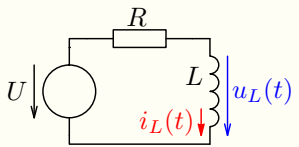
$U = 10\,\mathrm{V}$,
$R = 1\,\mathrm{k\Omega}$,
$L = 10\,\mathrm{mH}$,
$i_L(0) = 0\,\mathrm{A}$.

Experiment: ($f = 10\,\mathrm{kHz}$) pro L i „$2L + 2M$“ viz přednáška, včetně analýzy v GEEC.

Pozn.: Řešení bez diferenciálního počtu, tj. v tomto případě pomocí konstantních kvant magnetického toku $\Delta\Phi = U_L \Delta t = L \Delta I_L$ lze provést analogicky případu s RC článkem. Vzhledem k tomu, že je situace zcela analogická, není zde toto řešení provedeno. Dále je uvedeno pouze řešení pomocí diferenciálního počtu.

Řešení: Energetická veličina je zde i_L, proto zadáno $i_L(0) = 0$. Z toho důvodu bude výhodnější sestavit popis pomocí smyčkového proudu $i_L(t)$. Dále je zřejmé, že $i_L(\infty) = U/R = 10\,\mathrm{mA}$, vzhledem k tomu, že $u_L(\infty) = 0\,\mathrm{V}$.

Řešení pomocí diferenciálního počtu z metody smyčkových proudů:



$$L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} + i_L(t)R - U = 0 \;\Rightarrow\; \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} + i_L(t) = \frac{U}{R}$$

$$\tau\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} + i_L(t) = 0 \quad \text{homogenní rovnice}$$

$$\tau\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{\tau} \quad n\text{-tá derivace} \rightarrow \lambda^n$$

$$i_L(t) = K\mathrm{e}^{\lambda t} \quad \text{řešení homogenní rovnice}$$

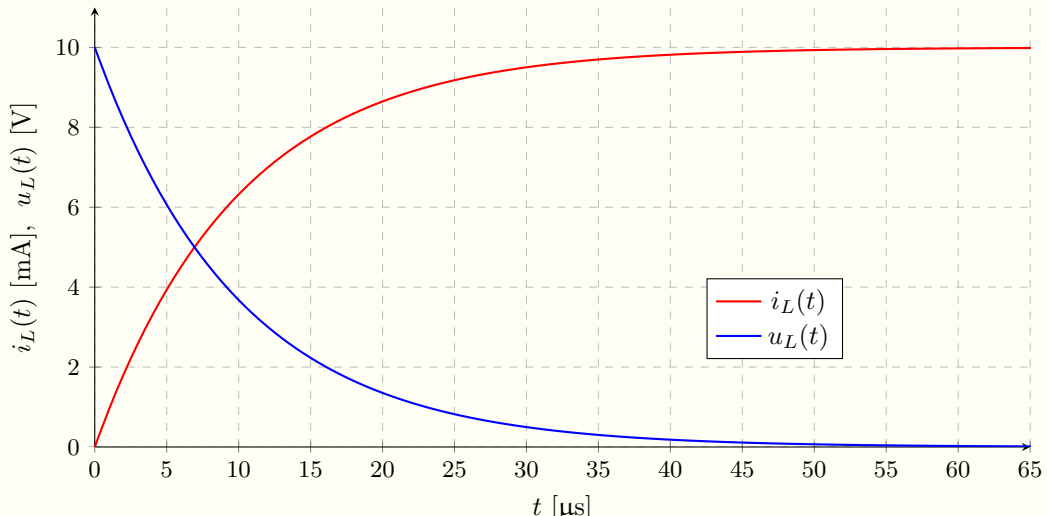
$$i_L(t) = K\mathrm{e}^{\lambda t} + i_p(t) \quad \text{řešení obecné rovnice}$$

Partikulární řešení $i_p(t)$ je při buzení stejnosměrným zdrojem konstanta, tj. $i_p(t) = i_L(\infty) = U/R = 10\,\mathrm{mA} = i_p(0)$, konstantu K lze určit z rovnice pro $i_L(0)$ a výsledné řešení pro tento případ, tj. $i_L(0) = 0$ je pak:

$$i_L(0) = K\mathrm{e}^0 + i_p(0) \Rightarrow K = i_L(0) - i_p(0) = i_L(0) - i_L(\infty)$$

$$\boxed{i_L(t) = \big(i_L(0) - i_p(0)\big)\mathrm{e}^{-t/\tau} + i_p(t)} = \frac{U}{R}\big(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\big) = 10 - 10\,\mathrm{e}^{-10^5 t}\ [\mathrm{mA}] \qquad (4.3)$$

$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{LU}{R\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau} = U\mathrm{e}^{-t/\tau} = 10\,\mathrm{e}^{-10^5 t}\ [\mathrm{V}], \quad \text{kde} \quad \tau = L/R = 10\,\mu\mathrm{s}. \qquad (4.4)$$

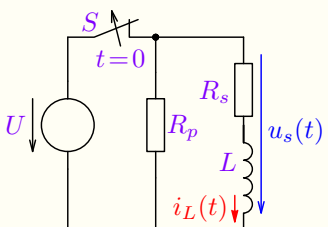


Obrázek 4.3: Časový průběh proudu $i_L(t)$ induktorem a napětí $u_L(t)$ na induktoru $L = 10\,\mathrm{mH}$ při jeho nabíjení ze zdroje stejnosměrného napětí $U = 10\,\mathrm{V}$ přes rezistor $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$ při $i_L(0) = 0$, viz analýza.

Vzhledem k tomu, že celé řešení je analogické příkladu s kapacitorem, jelikož $i_L(t)$ odpovídá $u_C(t)$ a $u_L(t)$ odpovídá $i_C(t)$, nejsou řešení dalších modifikací tohoto zapojení uvedena. Následují pouze další dva příklady, jeden praktický a jeden se „složitějším“ zapojením.

Příklad 4.6

Zadání: Cívka relé o sériové indukčnosti $L_s = 100\,\mathrm{mH}$ a odporu $R_s = 100\,\Omega$ je napájena z napěťového zdroje $U = 5\,\mathrm{V}$. Určete časový průběh napětí $u_s(t)$ na cívce (sériové kombinaci L_s a R_s), pokud byl v čase $t = 0$ napěťový zdroj U odpojen, přičemž na svorkách cívky je svodový odpor $R_p = 1\,\mathrm{M\Omega}$. Dále vypočítejte energii akumulovanou v cívce v době $t = 0$ a ověřte, že se spotřebuje v rezistorech při odeznění přechodného děje.

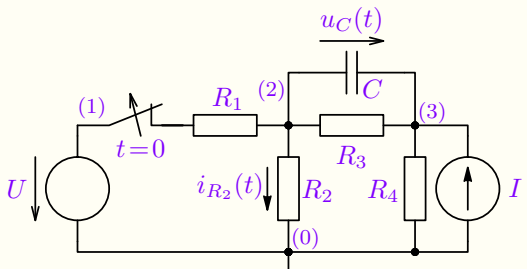


Řešení: viz přednáška, včetně analýzy v GEEC (i výpočtu počáteční podmínky).

Viz také ilustraci na začátku této kapitoly 4.

Příklad 4.7

Zadání: Obvod uvedený na obrázku byl v čase $t < 0$ v ustáleném stavu a v čase $t = 0$ byl odpojen zdroj stejnosměrného napětí U. Určete časový průběh napětí na rezistoru R_2 i proudu $i_{R_2}(t)$.



$U = 20\,\mathrm{V}$, $I = 4\,\mathrm{mA}$
$R_1 = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 2\,\mathrm{k\Omega}$,
$R_3 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_4 = 1\,\mathrm{k\Omega}$,
$C = 1\,\mu\mathrm{F}$.

Řešení: Lze řešit soustavu rovnic nebo lépe nejprve energetickou veličinu u_C, při zjednodušení obvodů (pro $t < 0$ a $t > 0$) např. pomocí Theveninova náhradního schématu.

Kompletní řešení s komentářem viz přednáška, včetně analýzy v GEEC.

4.1.1. Shrnutí řešení přechodných dějů 1. řádu

V případě odporových obvodů s jedním akumulačním prvkem (C nebo L) lze vyjádřit obecné řešení hledané obvodové veličiny jednoduchým vztahem.

Obecné řešení obvodové veličiny přechodného děje 1. řádu lze vyjádřit funkcí

$$y(t) = \big(y(0_+) - y_p(0)\big)\mathrm{e}^{-t/\tau} + y_p(t) \tag{4.5}$$

kde $y(0_+)$ je konstanta – počáteční hodnota obvodové veličiny,
$y_p(t)$ je konečná funkce obvodové veličiny v ustáleném stavu ($t \to \infty$) a
τ je časová konstanta ($\tau = CR$ pro obvody s kapacitorem a $\tau = \frac{L}{R}$ pro obvody s induktorem).

Řešení v případě buzení stejnosměrnými (v čase konstantními) zdroji:

$$y(t) = \big(y(0_+) - y(\infty)\big)\mathrm{e}^{-t/\tau} + y(\infty) \tag{4.6}$$

kde $y(\infty)$ je konstanta – konečná hodnota obvodové veličiny v $t \to \infty$.

Výše uvedené řešení platí pro všechny obvody 1. řádu, kde lze odporovou část včetně zdrojů nahradit na svorkách akumulačního prvku náhradním Theveninovým, resp. Nortonovým zapojením s konečnou, nenulovou hodnotou vnitřního odporu. Viz také příklad 7.4 (stranu VII-31) **přechodného děje s nestacionárním buzením**.

4.1.2. Časové děje při buzení akumulačního prvku ideálním zdrojem napětí nebo proudu

V případě připojení ideálního kapacitoru C k ideálnímu napěťovému zdroji U se jedná v čase připojení o paralelní zapojení dvou napěťových zdrojů, což by vedlo v případě $u_C(0) \neq U$ k Diracově proudovému pulzu[1], který by kapacitor přebil v čase (a za čas) $t = 0$ na napětí zdroje.

Podobně ideální induktor L připojený k proudovému I zdroji vyvolá v čase připojení pro případ $i_L(0) \neq I$ Diracův napěťový pulz[2], který by induktor přebil v čase (a za čas) $t = 0$ na proud zdroje (jedná se v čase spojení o sériové zapojení dvou proudových zdrojů).

Z tohoto důvodu se budeme dále zabývat případy, kdy je kapacitor buzen ideálním zdrojem proudu nebo induktor ideálním zdrojem napětí. Navíc budeme uvažovat zdroj pouze stejnosměrný (konstantní v čase).

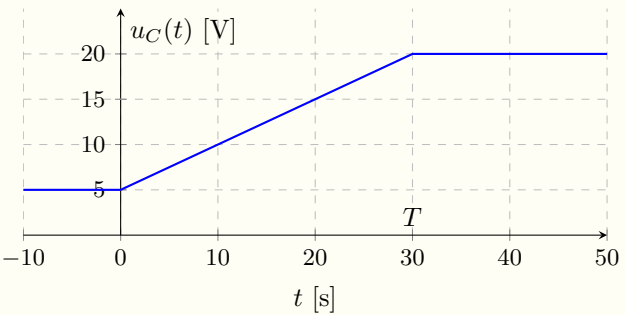
[1] V ideálním případě, kdy neuvažujeme magnetické účinky takového pulzu.

[2] V ideálním případě, kdy neuvažujeme elektrické účinky takového pulzu.

Příklad 4.8

Zadání: Určete časový průběh napětí $u_C(t)$ na kapacitoru $C = 10\,\mathrm{mF}$, který byl v čase $t = 0$ nabit na $u_C(0) = 5\,\mathrm{V}$ a připojen ke zdroji proudu $I = 5\,\mathrm{mA}$, kterým byl protékán po dobu $T = 30\,\mathrm{s}$. Kdy dosáhne napětí na kapacitoru napětí $u_C = 10\,\mathrm{V}$?

Řešení: Lze využít základní rovnice (v případě stejnosměrného proudu I v neintegrálním tvaru) $Q(t) = Cu_C(t) = It \Rightarrow u_C(t) = \frac{I}{C}t = \frac{t}{2}$. Průběh napětí na kapacitoru je tedy **lineární funkce času** a $10\,\mathrm{V}$ **dosáhne** v $t = 10\,\mathrm{s}$.



Komentář: použití – viz přednáška, analýza v GEEC.

Příklad 4.9

Zadání: Určete hodnotu indukčnosti induktoru tak, aby jeho proud $i_L(t)$ dosáhl z nulové hodnoty ($i_L(0) = 0$) hodnoty $i_L = 0{,}5\,\mathrm{A}$ za čas $T = 10\,\mu\mathrm{s}$, po který byl připojen ke zdroji napětí $U = 5\,\mathrm{V}$. Určete také časový průběh proudu $i_L(t)$ induktorem, který byl bezprostředně po odpojení napájení zkratován.

Řešení: Podobně jako v předchozím případě lze pro induktor využít základní rovnice $\Phi(t) = Li_L(t) = Ut \Rightarrow i_L(t) = \frac{U}{L}t$. Průběh proudu induktorem je tedy **lineární funkce času** a při $U = 5\,\mathrm{V}$ a $i_L(0) = 0$ dosáhne v $t = T = 10\,\mu\mathrm{s}$ velikosti $i_L(T) = 0{,}5\,\mathrm{A}$ při hodnotě indukčnosti $L = \frac{U}{i_L(T)}T = 100\,\mu\mathrm{H}$.

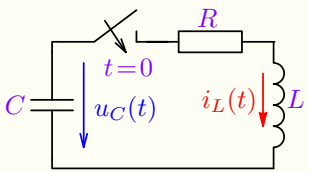


Komentář: k reálnému induktoru a použití – viz přednáška, analýza v GEEC.

4.2. Přechodné děje 2. řádu

Příklad 4.10

Zadání: Určete časový průběh napětí $u_C(t)$ kapacitoru $C = 1\,\mu\mathrm{F}$, který byl v čase $t = 0$ nabit na $u_C(0) = 10\,\mathrm{V}$ a připojen na sériovou kombinaci induktoru $L = 10\,\mathrm{mH}$ a rezistoru $R = 10\,\Omega$, přičemž induktor byl ve vybitém stavu $i_L(0) = 0$. Dále určete proud $i_L(t)$ induktoru.

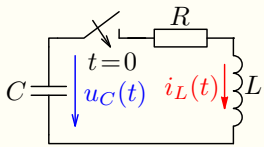


$C = 1\,\mu\mathrm{F}$,
$u_C(0) = 10\,\mathrm{V}$,
$L = 10\,\mathrm{mH}$,
$R = 10\,\Omega$.

Experiment: viz přednáška (buzení pouze 2 V), včetně analýzy v GEEC.

Řešení: Obvod popíšeme. Z důvodu jedné rovnice pro MSP a dvou rovnic pro MUN bude výhodnější sestavit popis pomocí smyčkového proudu $i_L(t)$. Dále je zřejmé, že $i_L(\infty) = 0$ i $u_C(\infty) = 0$.

Řešení pomocí diferenciálního počtu z metody smyčkových proudů:



$$L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} + Ri_L(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i_L(\tau)\,\mathrm{d}\tau - u_C(0) = 0 \quad \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right. \tag{4.7}$$

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 i_L(t)}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} + i_L(t) = 0 \tag{4.8}$$

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0 \tag{4.9}$$

Vzhledem k derivaci integro-diferenciální rovnice (4.7) v 1. kroku jsme dostali již homogenní rovnici (4.8), jejíž řešení je závislé na charakteru kořenů λ_1 a λ_2 charakteristické rovnice (4.9):

$$i_L(t) = K_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + K_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t} + i_p(t), \qquad \text{pro } \lambda_{12} \text{ reálné, různé}$$

$$i_L(t) = (K_1 + K_2 t)\mathrm{e}^{\lambda t} + i_p(t), \qquad \text{pro } \lambda \text{ reálný, dvojnásobný}$$

$$i_L(t) = \big(K_1\cos(\omega t) + K_2\sin(\omega t)\big)\mathrm{e}^{\sigma t} + i_p(t), \qquad \text{pro } \lambda_{12} = \sigma \pm j\omega$$

Partikulární řešení $i_p(t)$ určíme analýzou ustáleného stavu pro $t \to \infty$. Konstanty K_1 a K_2 je nutné určit z počátečních hodnot $i_L(0)$, $i'_L(0)$.

V našem případě vyjde:

$$\lambda_{12} \doteq -500 \pm j9987{,}5$$

$$i_L(t) \doteq \big(K_1 \cos(9987{,}5t) + K_2 \sin(9987{,}5t)\big)\mathrm{e}^{-500t} + i_p(t) \tag{4.10}$$

Partikulární řešení je evidentně $i_p(t) = i_L(\infty) = 0$. Konstanty K_1 a K_2 určíme tak, že:

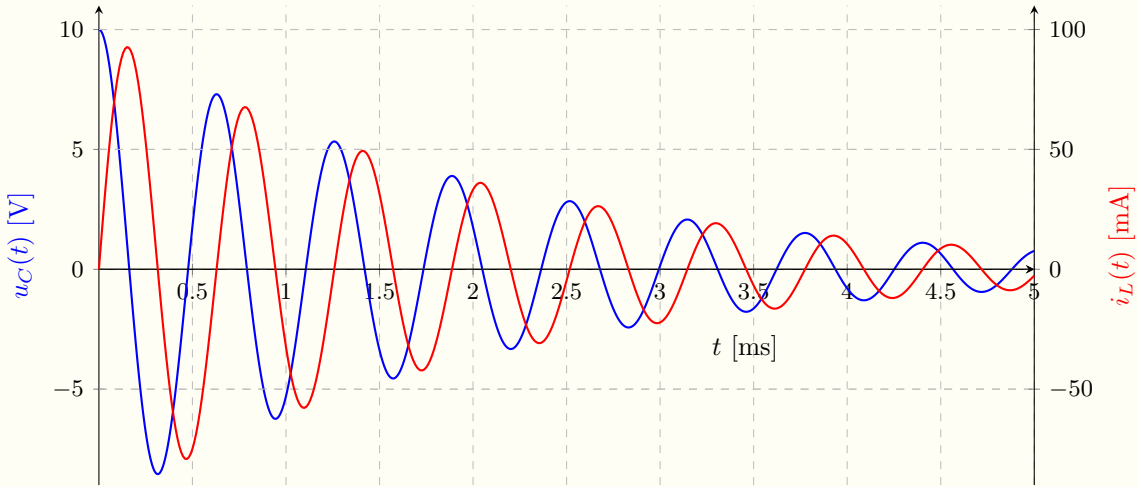
1. Dosadíme $t = 0$ do vztahu (4.10) a položíme rovno $i_L(0) = 0$,
2. Dosadíme $t = 0$ do zderivovaného vztahu (4.10) a položíme rovno $i'_L(0)$, což vyčíslíme z rovnice (4.7) rovněž pro $t = 0$, tj. $i'_L(0) = u_C(0)/L$.
3. Takto vzniklé rovnice řešíme – najdeme numerické hodnoty konstant K_1 a K_2.

Dostaneme

$$K_1 = 0, \qquad K_2 \doteq 0{,}1$$

$$i_L(t) \doteq 0{,}1\mathrm{e}^{-500t} \sin(9987{,}5t)$$

$$u_c(t) = -\frac{1}{C}\int_0^t i_L(\tau)\,\mathrm{d}\tau + u_C(0) \doteq \big(10\cos(9987{,}5t) + 0{,}5\sin(9987{,}5t)\big)\mathrm{e}^{-500t}$$



Obrázek 4.4: Časový průběh napětí $u_C(t)$ na kapacitoru a proudu $i_L(t) = -i_C(t)$ při jeho vybíjení do sériové kombinace induktoru a rezistoru při $u_C(0) = 10\,\mathrm{V}$, viz analýza.

Další možností řešení rovnic je použití Laplaceovy transformace, které zmíníme v kapitole 7. Obvody vyšších řádů se řeší obdobně – výsledkem je suma exponenciálních funkcí s exponenty danými kořeny charakteristické rovnice. Pokud jsou obvody buzené časově proměnnými zdroji, je nutné řešit jak vlastní přechodový děj vyvolaný buzením a počátečními podmínkami, tak ustálený stav (partikulární řešení), jak ukazuje závěr příkladu 7.4. Pro další studium lze vyjít např. z [4].

Všimněme si zajímavých skutečností uvedeného příkladu 4.10:

- Obvod generuje (tlumený) harmonický signál – vlastní signál lineárních systémů.
- Lze ukázat, že všechny obvodové veličiny mají shodný charakter časového průběhu, tj. tlumený harmonický signál, který by v případě absence tlumícího odporu, jediné součástky v obvodu měnící elektrickou energii v tepelnou, nebyl tlumený – viz. řešení rovnice (4.9), kde by pak platilo $\lambda_{12} = j\frac{1}{\sqrt{LC}} = j\omega$, kde $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ je pak úhlový kmitočet generovaných kmitů.
- Napětí a proud kapacitoru (i induktoru) jsou vzájemně posunuty o úhel $\pi/2$.

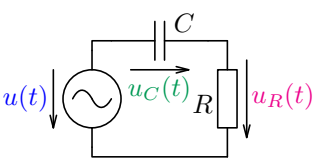
Těmito skutečnostmi, kdy jsou obvodové veličiny v ustáleném stavu dány časovými funkcemi harmonického průběhu, se budeme zabývat v další části kurzu.

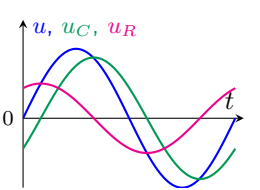
Poznámky IV

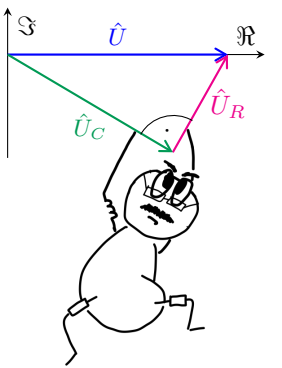
Kapitola 5

Řešení obvodů v harmonickém ustáleném stavu (HUS), kmitočtové charakteristiky

Tato kapitola uvádí řešení elementárních elektrických obvodů v harmonickém ustáleném stavu, tj. výpočet obvodových veličin lineárních obvodů buzených harmonickými zdroji. Uživatel se seznámí jednak se základními pojmy této problematiky jako je impedance, admitance, . . . , jednak se naučí technice symbolicko-komplexní metody analýzy, která je v tomto případě velmi efektivní. Dále porozumí kmitočtovým charakteristikám a jejich vykreslování. Na konci této kapitoly je pak zařazena velmi důležitá vlastnost obvodů a systémů, tj. rezonance.







V této kapitole budeme jako doposud uvažovat pouze lineární obvody. Budeme se však zabývat případem, kdy jsou tyto obvody buzeny zdroji s harmonickým časovým průběhem. Dále budeme předpokládat, že obvod je v ustáleném stavu, tj. všechny přechodové děje vyvolané připojením zdrojů či obvodových prvků, změnou hodnot, ... ustaly a obvodové veličiny vykazují ustálený stav. Závěr minulé části naznačil skutečnosti, které nyní dokážeme.

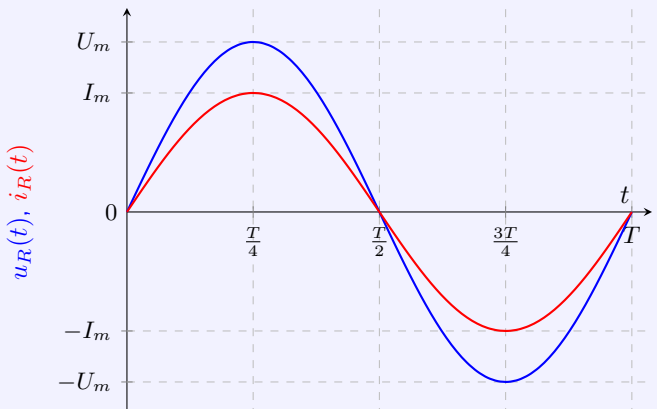
- U lineárního obvodu buzeného harmonickým signálem platí, že všechny obvodové veličiny mají harmonický charakter.
- Napětí a proud kapacitoru (i induktoru) jsou vzájemně posunuty o úhel $\pi/2$. To má mimo jiné za následek, že takový prvek nerozptyluje energii.
- Ukážeme jak lze matematicky tyto děje popsat a takové obvody jednoduše analyzovat – pomocí analýzy v kmitočtové oblasti, byť se se budeme zajímat o průběhy časové.
- Pokud bude v obvodu působit více zdrojů najednou, lze využít principu superpozice a výše uvedené principy lze aplikovat na působení každého zdroje zvlášť nezávisle na ostatních. Hledaná veličina je pak dána součtem příspěvků od jednotlivých zdrojů.

I v případě neharmonického periodického časového průběhu signálu zdrojů lze zde uvedenou metodu analýzy v lineárních obvodech použít, jak bude ukázáno v další části kurzu.

5.1. Chování základních elektrických prvků v HUS

Chování rezistoru v obvodech střídavého buzení

Rezistor nemá vliv na časový průběh signálu, jelikož vztah mezi napětím na rezistoru a jeho proudem je dán Ohmovým zákonem, tj. konstantou nezávislou na čase o velikosti rezistance, viz graf.

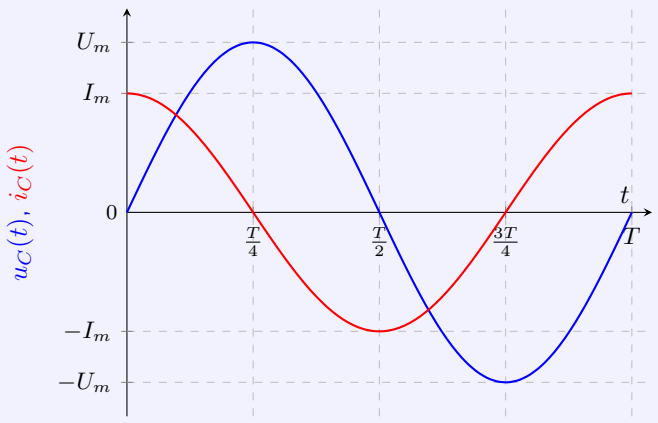


Je zřejmé, že se na rezistoru nemění se tvar proudu oproti napětí ani pro jiné než harmonické signály. Obvod složený pouze z rezistorů, např. odporový dělič, dělí signál konstantou nezávislou na čase, resp. násobí konstantou menší než 1.

Lineární řízené zdroje se z tohoto pohledu chovají stejně jako rezistory: násobí signál konstantou nezávislou na čase.

Chování kapacitoru v obvodech střídavého harmonického buzení

Kapacitor je setrvačný prvek akumulující energii, tj. vztah mezi napětím a proudem na kapacitoru je dán integrálem resp. derivací podle času a tím ovlivňuje časový průběh signálu.



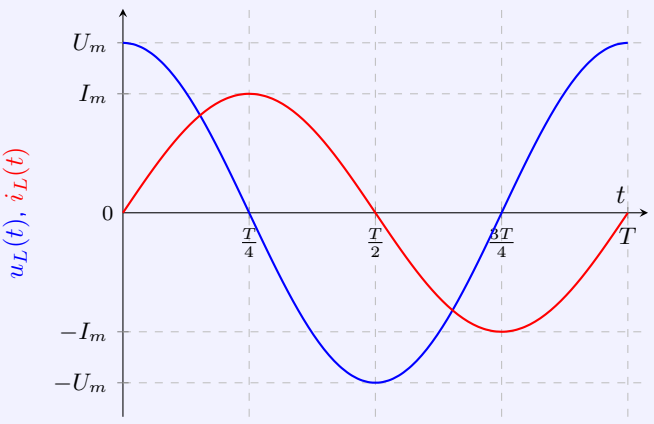
Pokud je kapacitor buzen ze zdroje napětí s časovým průběhem $u_C(t) = U_m \sin(\omega t)$, je jeho proud dán:

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = U_m \omega C \cos(\omega t) = \\ = I_m \sin(\omega t + \pi/2) \quad (5.1)$$

Proud kapacitorem je dán derivací napětí, což pro harmonické signály znamená, že proud kapacitorem předbíhá napětí na kapacitoru o fázový posun $\pi/2$. Vztah mezi velikostí napětí a proudu kapacitoru je pak dán relací $I_m = U_m \omega C$.

Chování induktoru v obvodech střídavého harmonického buzení

Induktor je stejně jako kapacitor setrvačný prvek akumulující energii, jeho vztah mezi napětím a proudem je také dán integrálem resp. derivací podle času a tím také ovlivňuje časový průběh signálu.



Pokud je induktor buzen ze zdroje proudu s časovým průběhem $i_L(t) = I_m \sin(\omega t)$, je napětí na něm dáno:

$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} = I_m \omega L \cos(\omega t) = \\ = U_m \sin(\omega t + \pi/2) \quad (5.2)$$

Napětí induktoru je dáno derivací jeho proudu, což pro harmonické signály znamená, že napětí na induktoru předbíhá proud induktorem o fázový posun $\pi/2$. Vztah mezi velikostí napětí a proudu induktoru je pak dán relací $U_m = I_m \omega L$.

5.2. Metoda popisu obvodových veličin pro analýzu lineárních obvodů v HUS

Metody analýzy uvedené v předchozích částech kurzu platí pro jakékoli časové průběhy obvodových veličin. Nicméně bez zjednodušení vedou na diferenciální, případně algebraické rovnice s goniometrickými funkcemi, jejichž řešení není triviální.

Pro HUS však platí řada zjednodušení:

> Lineární akumulační obvodové prvky (kapacitor a induktor) zachovávají tvar harmonického signálu, nemění jeho kmitočet, mění pouze jeho velikost a fázový posun mezi napětím a proudem. Vztah mezi velikostí napětí a proudu je dán hodnotou C, resp. L a úhlovým kmitočtem $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ signálu, kde f je kmitočet signálu v $[\mathrm{Hz}]$ a $T = 1/f$ je perioda signálu v $[\mathrm{s}]$.

Z uvedeného je zřejmé, že lze využít jednoduššího popisu obvodových veličin než časového vyjádření a to popisu v kmitočtové oblasti, pomocí tzv. fázorů.

Fázorové vyjádření harmonické funkce

Pro popis goniometrické funkce lze využít Eulerův vztah:

$$\mathrm{e}^{jx} = \cos(x) + j\sin(x) \Rightarrow$$

$$U_m \sin(\omega t + \varphi) = \Im\{U_m(\cos(\omega t + \varphi) + j\sin(\omega t + \varphi))\} = \Im\left\{U_m \mathrm{e}^{j(\omega t + \varphi)}\right\} \tag{5.3}$$

Fázor $\hat{U}$ je pro harmonickou veličinu $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$ definován výrazem

$$\boxed{\hat{U} = U_m \mathrm{e}^{j\varphi}} \tag{5.4}$$

Fázor je transformací harmonické časové funkce do komplexní roviny a budeme ho v tomto materiálu značit „stříškou“, tj. například $\hat{U}$ pro napětí. V obvodu složeném z lineárních prvků se mění pouze amplituda a fáze harmonických obvodových veličin, které fázor popisuje. Proto fázor nedává informaci o kmitočtu, ale přísluší k danému kmitočtu. Kmitočet je pak pro všechny obvodové veličiny společný daný budicími zdroji. V případě více zdrojů o různých kmitočtech je nutné použít metodu superpozice a hledanou veličinu vyjádřit jako součet časových funkcí – příspěvků od jednotlivých zdrojů, které byly řešeny pomocí fázorů.

Pozor, nelze provádět matematické operace fázorů, příslušejících k různým kmitočtům!

Výše uvedené zjednodušení (transformace) vede na komplexní vyjádření zobecněného Ohmova zákona pro fázory v HUS. Dle 5.2 a 5.4 lze pomocí 5.5 vyjádřit fázory veličin induktoru a podobně pak dle 5.1 i fázory pro kapacitor:

$$i_L(t) = I_m \sin(\omega t) \Rightarrow \hat{I}_L = I_m, \qquad u_L(t) = I_m \omega L \sin(\omega t + \pi/2) \Rightarrow \hat{U}_L = I_m \omega L \mathrm{e}^{j\pi/2} = \hat{I}_L j\omega L. \tag{5.5}$$

Zobecněný Ohmův zákon pro harmonický ustálený stav

$$\hat{U}_R = R\hat{I}_R = \frac{\hat{I}_R}{G}, \quad \hat{U}_C = \frac{\hat{I}_C}{j\omega C} = \frac{\hat{I}_C}{\hat{Y}_C} = \hat{Z}_C \hat{I}_C, \quad \hat{U}_L = j\omega L \hat{I}_L = \hat{Z}_L \hat{I}_L = \frac{\hat{I}_L}{\hat{Y}_L} \tag{5.6}$$

kde $\hat{Z} = \dfrac{\hat{U}}{\hat{I}} = R + jX$ nazýváme impedancí („komplexním odporem“), kde

$R = \Re\{\hat{Z}\}$ je rezistance a $X = \Im\{\hat{Z}\}$ je reaktance,

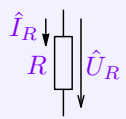
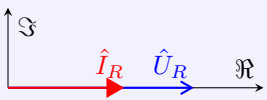
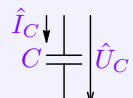
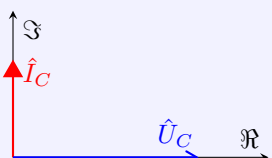
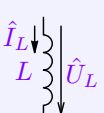
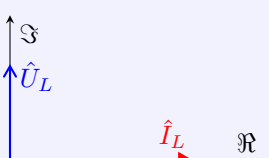
$\hat{Y} = \dfrac{\hat{I}}{\hat{U}} = G + jB$ nazýváme admitancí („komplexní vodivostí“), kde

$G = \Re\{\hat{Y}\}$ je konduktance a $B = \Im\{\hat{Y}\}$ je susceptance.

} imitancí nazýváme společné označení pro impedanci a admitanci.

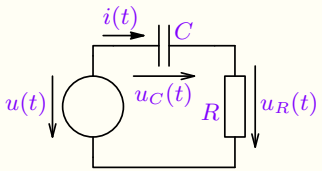
Výpočty v obvodech v HUS lze díky této transformaci provádět stejně jako v SUS. Kapacitory a induktory lze modelovat jejich impedancemi či admitancemi a numerické operace z oboru reálných čísel se přesouvají do oboru čísel komplexních. **Pozor, fázory nemohou vystupovat v matematických vztazích spolu s časovými funkcemi!**

Tabulka 5.1: Vztahy mezi obvodovými veličinami základních prvků v HUS a jejich vyjádření pomocí fázorů

prvek	popis	fázorový diagram
rezistor 	$\hat{U}_R = R\hat{I}_R$ $\hat{I}_R = G\hat{U}_R$	
kapacitor 	$\hat{U}_C = \hat{Z}_C\hat{I}_C = \frac{1}{j\omega C}\hat{I}_C$ $\hat{I}_C = \hat{Y}_C\hat{U}_C = j\omega C\,\hat{U}_C$	
induktor 	$\hat{U}_L = \hat{Z}_L\hat{I}_L = j\omega L\,\hat{I}_L$ $\hat{I}_L = \hat{Y}_L\hat{U}_L = \frac{1}{j\omega L}\hat{U}_L$	

Příklad 5.1

Zadání: Obvod na obrázku je napájen ze zdroje napětí s časovým průběhem $u(t) = U_m \sin(\omega t)$. Určete časové vyjádření proudu obvodem i napětí na všech prvcích. Dále nakreslete orientační fázorový diagram fázorů obvodových veličin.



$C = 128\,\mu\mathrm{F}$,
$R = 14{,}4\,\Omega$,
$U = 24\,\mathrm{V}$[a],
$f = 50\,\mathrm{Hz}$.

[a] U střídavých harmonických průběhů se obvykle udává efektivní hodnota, která se často ani neznačí zvláštním symbolem (U_{RMS}, $\mathrm{V}_{\mathrm{RMS}}$, případně V_{ef}), ale pouze U, [V] jako v tomto případě ($U_m = \sqrt{2} \cdot U$). Důvodem udávání efektivních hodnot je výpočet výkonů ve střídavě buzených obvodech jak bude patrné v další části kurzu.

Experiment: viz přednáška, včetně analýzy v GEEC.

Řešení: Nejprve převedeme časový průběh napěťového zdroje na fázor, vyřešíme požadované veličiny ve fázorovém vyjádření (v efektivních hodnotách), které nakonec převedeme na časové průběhy.

Fázor napětí $u(t)$ je dle vztahu (5.4) $\hat{U} = 24\mathrm{e}^{0} = 24$ a $\omega = 2\pi f \doteq 314\,[\mathrm{rad/s}]$.
Nejprve určíme $\hat{Z}$ jako celkovou impedanci sériového spojení R a C:

$$\hat{Z} = R + \hat{Z}_C = R + \frac{1}{j\omega C} \doteq 14{,}4 - j24{,}9 = 28{,}7\mathrm{e}^{j(-1{,}05)} = 28{,}7\mathrm{e}^{j(-60^\circ)}\,[\Omega].$$

Fázor proudu pak vypočítáme dle

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{\hat{Z}} \doteq 0{,}419 + j0{,}723 = 0{,}835\mathrm{e}^{j1{,}05} = 0{,}835\mathrm{e}^{j60^\circ}\,[\mathrm{A}]. \tag{5.7}$$

A fázor napětí $\hat{U}_R$ na rezistoru a $\hat{U}_C$ na kapacitoru

$$\hat{U}_R = \hat{I}R \doteq 6 + j10{,}4 = 12\mathrm{e}^{j1{,}05} = 12\mathrm{e}^{j60^\circ}\,[\mathrm{V}], \tag{5.8}$$

$$\hat{U}_C = \hat{I}\hat{Z}_C \doteq 18 - j10{,}4 = 20{,}8\mathrm{e}^{j(-0{,}525)} = 20{,}8\mathrm{e}^{j(-30^\circ)}\,[\mathrm{V}]. \tag{5.9}$$

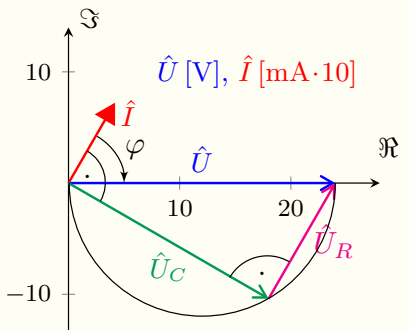
Časové průběhy pak určíme z fázorů dle 5.3:

$$i(t) \doteq \sqrt{2}\cdot 0{,}835\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)\,[\mathrm{A}],\ u_R(t) \doteq \sqrt{2}\cdot 12\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)\,[\mathrm{V}],\ u_C(t) \doteq \sqrt{2}\cdot 20{,}8\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)\,[\mathrm{V}].$$

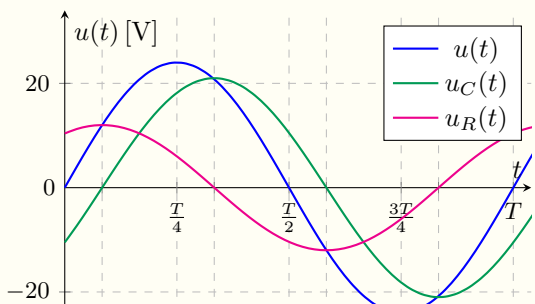
Poznámka: Pro sčítání komplexních čísel je výhodný složkový tvar, zatímco pro násobení a dělení tvar exponenciální.

A proč „nevyšel“ 2. Kirchhoffův zákon v experimentu? Vyšel, ale je nutné vzít v úvahu i fázové posuny jednotlivých napětí, viz analýzu, experiment viz fázorový diagram. Pak platí:

$$\hat{U} = \hat{U}_R + \hat{U}_C = 6 + j10{,}4 + 18 - j10{,}4 = 24\,[\mathrm{V}], \quad |\hat{U}| = \sqrt{|\hat{U}_R|^2 + |\hat{U}_C|^2} \doteq \sqrt{12^2 + 20{,}8^2} \doteq 24\,[\mathrm{V}]$$



(a)



(b)

Obrázek 5.1: Fázorový diagram obvodových veličin (a) a jejich časové průběhy (b).

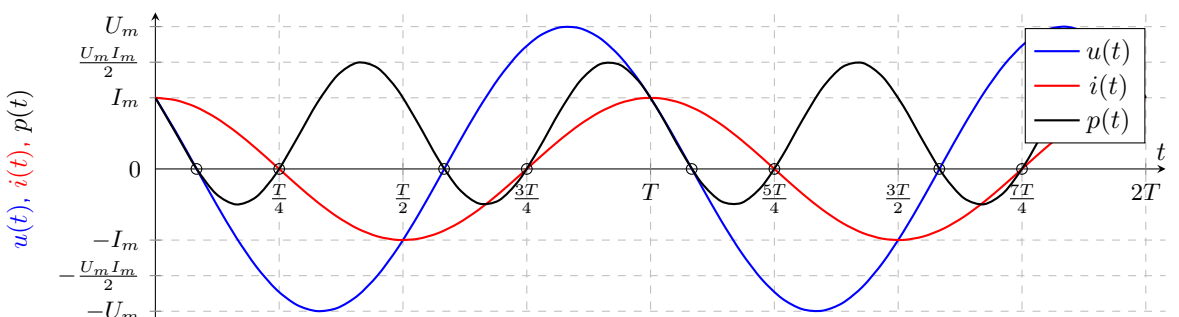
Jak kreslit obecně fázorový diagram? viz. přednáška.

5.3. Výkony v obvodech HUS

Okamžitý výkon harmonického napětí $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$ a proudu $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$ je

$$p(t) = u(t)i(t) = \underbrace{UI\cos(\varphi)\Big(1 + \cos\big(2(\omega t + \varphi_i)\big)\Big)}_{p_P(t)} + \underbrace{UI\sin(\varphi)\Big(-\sin\big(2(\omega t + \varphi_i)\big)\Big)}_{p_Q(t)} \tag{5.10}$$

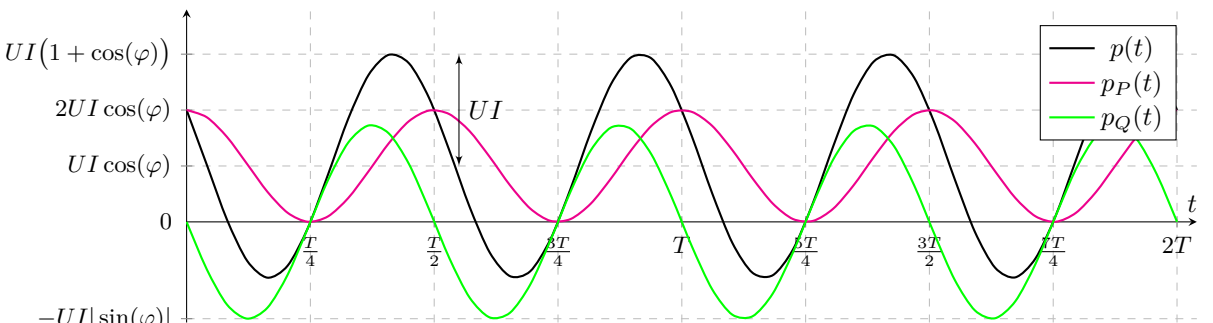
kde $U = U_m/\sqrt{2}$ a $I = I_m/\sqrt{2}$ jsou efektivní hodnoty napětí a proudu a
$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ je fázový posun mezi $\hat{U}$ a $\hat{I}$ orientovaný **od proudu k napětí**.



Obrázek 5.2: Příklad časových průběhů napětí a proudu a jim odpovídajícího okamžitého výkonu v HUS.

Okamžitý výkon $p(t)$ i jeho složky $p_P(t)$ a $p_Q(t)$ jsou funkcí času, viz. obrázek 5.3. Proto vyjadřujeme jeho charakteristické hodnoty okamžitého výkonu nezávislé na čase. Průměrnou hodnotu $p(t)$ za periodu T, tzv. činný výkon, lze vyjádřit z práce A elektrických veličin vykonanou od t_1 do t_2:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} p(t)\,\mathrm{d}t \quad \underset{p(t)}{\Rightarrow} \quad \boxed{P} = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)u(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T p_P(t)\,\mathrm{d}t \boxed{= \frac{1}{2}U_m I_m \cos(\varphi) = UI\cos(\varphi)} \tag{5.11}$$



Obrázek 5.3: Časové průběhy okamžitého výkonu $p(t)$ a jeho složek $p_P(t)$ a $p_Q(t)$ dle (5.10).

Vzhledem k tomu, že $\varphi \in \langle -\pi/2, \pi/2\rangle$, je vždy činný výkon $P \geq 0$.

Z vedeného je zřejmé, že střední hodnota výkonu dodaného do obvodu závisí na fázovém úhlu φ mezi napětím a proudem. V HUS proto rozlišujeme pro HUS udáváme ještě další typy výkonů:

Výkony v HUS

- **Zdánlivý výkon** je výkon dodaný do obvodu. Jednotkou je Volt-Ampér $[\mathrm{VA}]$.

$$S = UI = \frac{1}{2} U_m I_m \ [\mathrm{VA}] \tag{5.12}$$

- **Činný výkon** je výkon převedený v obvodu (např. na rezistorech) na teplo. Jednotkou je Watt $[\mathrm{W}]$.

$$P = UI\cos(\varphi) = \frac{1}{2} U_m I_m \cos(\varphi) \ [\mathrm{W}] \tag{5.13}$$

- **Jalový výkon** představuje výkon, který se předává mezi zdroji a akumulačními prvky. Jednotkou je tzv. reaktanční VA $[\mathrm{var}]$.

$$Q = UI\sin(\varphi) = \frac{1}{2} U_m I_m \sin(\varphi) \ [\mathrm{var}] \tag{5.14}$$

Mezi výkony pak platí následující relace:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \tag{5.15}$$

Výkony lze vyjádřit i pomocí fázorů:

Výkony v HUS – výpočet pomocí fázorů

$$\hat{S} = \hat{U}\hat{I}^* = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi_U} \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{-j\varphi_I} = \frac{1}{2} U_m I_m e^{j(\varphi_U - \varphi_I)} \tag{5.16}$$

kde $\hat{U}$ je fázor napětí v efektivní hodnotě,
φ_U je fázový posun napětí,
$\hat{I}^*$ je komplexně sdružená hodnota fázoru proudu v efektivní hodnotě,
φ_I je fázový posun proudu.

Zdánlivý, činný a jalový výkon pak lze v fázoru $\hat{S}$ určit jednoduše jako:

$$S = |\hat{S}|, \tag{5.17}$$

$$P = \Re\{\hat{S}\}, \tag{5.18}$$

$$Q = \Im\{\hat{S}\}. \tag{5.19}$$

V lineárních obvodech v HUS můžeme tedy psát střední hodnoty výkonů za periodu na jednotlivých základních prvcích:

- **Rezistor**: vzhledem k tomu, že fázový posun mezi napětím na rezistoru a proudem rezistorem je $\varphi = 0$ je na rezistoru pouze činný výkon ($\sin(\varphi) = 0$, $\cos(\varphi) = 1$), který se v čase mění v teplo. Jeho střední hodnota je

$$P_R = \frac{U_{m_R} I_{m_R}}{2} = U_R I_R = R I_R^2 = \frac{U_R^2}{R}, \tag{5.20}$$

  Viz také vztah (1.7) první kapitoly.
- **Kapacitor**: fázový posun mezi napětím na kapacitoru a proudem kapacitoru je $\varphi = -\pi/2 \Rightarrow$ na kapacitoru je pouze jalový (záporný) výkon ($\sin(\varphi) = -1$, jemu odpovídající energie se v kapacitoru akumuluje ve formě elektrického pole a opět vrací do obvodu (kapacitor se nabíjí a vybíjí), žádná energie se v ideálním případě nemění v teplo ($\cos(\varphi) = 0 \Rightarrow P = 0$). Střední hodnota jalového výkonu je

$$Q_C = -\frac{U_{m_C} I_{m_C}}{2} = -U_C I_C = -U_C^2 \omega C = \frac{-I_C^2}{\omega C}, \tag{5.21}$$

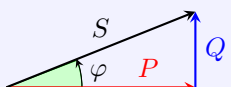
- **Induktor**: fázový posun mezi napětím na induktoru a proudem induktoru je $\varphi = \pi/2 \Rightarrow$ na induktoru je, podobně jako na kapacitoru, pouze jalový (kladný) výkon ($\sin(\varphi) = 1$, jemu odpovídající energie se v induktoru akumuluje ve formě magnetického pole a opět vrací do obvodu (induktor se nabíjí a vybíjí), žádná energie se v ideálním případě nemění v teplo ($\cos(\varphi) = 0 \Rightarrow P = 0$). Střední hodnota jalového výkonu je

$$Q_L = \frac{U_{m_L} I_{m_L}}{2} = U_L I_L = I_L^2 \omega L = \frac{U_L^2}{\omega L}. \tag{5.22}$$

Celkový jalový výkon v obvodu je pak dán součtem všech výkonů na induktorech a kapacitorech (rozdílem, vzhledem k tomu, že jalový výkon na kapacitorech je záporný) a celkový činný výkon v obvodu je dán součtem všech výkonů na rezistorech a zdrojích, pokud výkon spotřebovávají. Výkony na pasivních prvcích musí pak odpovídat činným a jalovým výkonům všech zdrojů obvodu, přičemž, jak bylo uvedeno, na zdroji může být i činný výkon záporný (při zdrojové orientaci), pokud se zdroj chová jako spotřebič.

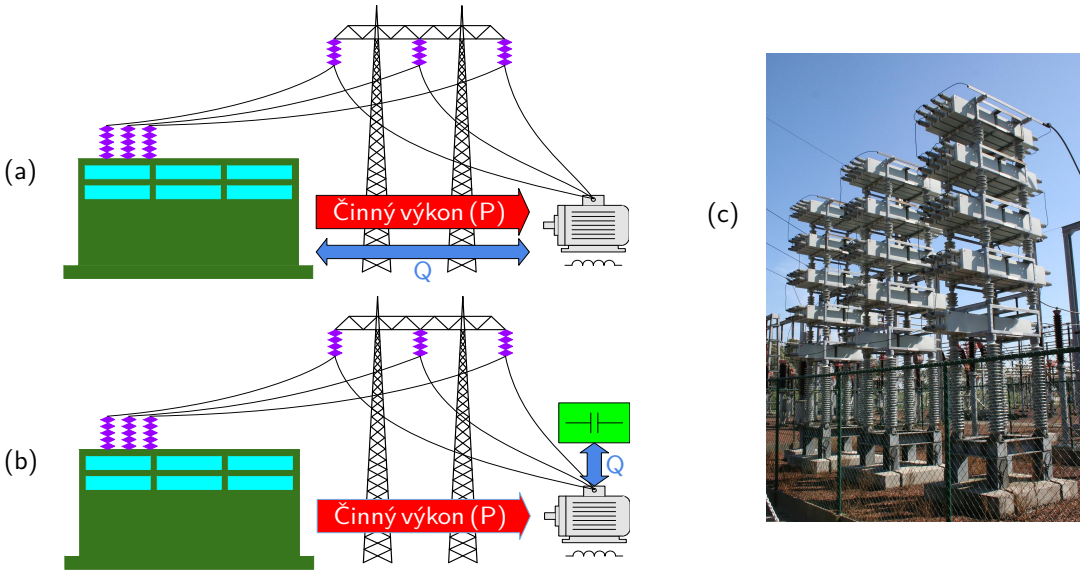
Účiník

V rozvodných soustavách se musí přenést od zdroje zdánlivý výkon prostřednictvím vedení ke spotřebiči, i když se v obvodu spotřebuje (koná práci) jen výkon činný – jalový výkon se „přelévá“ mezi zdrojem a akumulačními prvky. Na zdánlivý výkon (i na proud vytvářející jalový výkon) však musí být dimenzováno vedení. Využití vedení sítě činným výkonem se udává poměrem mezi činným a zdánlivým výkonem, vyjadřuje se v $[\%]$ a označuje se jako účiník:



$$\lambda = \frac{P}{S} = \cos\varphi \tag{5.23}$$

Snahou je, aby jalový výkon byl nulový ($\lambda = 1$). Jalový výkon se vytváří např. na indukčních zátěžích (motory). Řešením je pak kompenzace účiníku pomocí kapacitorů v místě zátěže. Tím se jalový výkon (energie) nepřenáší od zdroje ke spotřebiči a zpět a nezatěžuje tak přenosové vedení, na kterém pak vznikají menší ztráty způsobené pouze přenosem činného výkonu. Ilustrace této situace je uvedena na následujícím obrázku 5.4.



Obrázek 5.4: Ilustrace přenosové soustavy elektrické energie z elektrárny ke spotřebiči indukčního charakteru: (a) bez kompenzace, (b) s kompenzací účiníku a realizace kompenzační kapacitní banky (c) – převzato z www.reddit.com.

Příklad 5.2

Zadání: Určete všechny výkony v příkladu 5.1.

Řešení:
Fázor proudu byl určen vztahem (5.7) jako $\hat{I} \doteq 0{,}419 + j0{,}723 = 0{,}835\mathrm{e}^{j60^\circ}$ [A]. A fázor napětí $\hat{U}_R$ a $\hat{U}_C$ pak vztahy (5.8) a (5.9) jako $\hat{U}_R \doteq 6 + j10{,}4 = 12\mathrm{e}^{j60^\circ}$ [V] a $\hat{U}_C \doteq 18 - j10{,}4 = 20{,}8\mathrm{e}^{j(-30^\circ)}$ [V]. Pak:

$$S = UI \doteq 24 \cdot 0{,}835 \doteq 20 \text{ [VA]}, \text{ případně } \hat{S} = \hat{U}\hat{I}^* \doteq 10 - j17{,}35 \text{ [VA]}$$
$$P = UI\cos(\varphi_U - \varphi_I) \doteq 24 \cdot 0{,}835\cos(-60^\circ) \doteq 10 \text{ [W]} = \Re\{\hat{S}\},$$
$$Q = UI\sin(\varphi_U - \varphi_I) \doteq 24 \cdot 0{,}835\sin(-60^\circ) \doteq -17{,}35 \text{ [var]} = \Im\{\hat{S}\},$$

což souhlasí s výkony na jednotlivých prvcích, tj. s činným výkonem na rezistoru $P_R = U_R I \doteq 12 \cdot 0{,}835 \doteq 10$ [W] a jalovým výkonem na kapacitoru $Q_C = -U_C I \doteq -20{,}8 \cdot 0{,}835 \doteq -17{,}35$ [var], ze kterých pak určíme i zdánlivý výkon jako:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \doteq \sqrt{10^2 + (-17{,}35)^2} \doteq 20 \text{ [VA]}.$$

Případně lze výkony vypočítat dle vztahů (5.16) až (5.19) jak je použito v analýze, viz také přednášku.

Výkonové přizpůsobení v HUS

Napěťový zdroj $\hat{U}_p$ s vnitřní impedancí $\hat{Z}_i = R_i + jX_i$ dodá do zátěže $\hat{Z}_z = R_z + jX_z$ největší činný výkon, pokud pro impedanci zátěže platí:

$$\hat{Z}_z = \hat{Z}_i^*, \quad \text{tj.} \quad R_z = R_i,\, X_z = -X_i. \tag{5.24}$$

Důkaz:

$$P = \Re\{\hat{U}_z \hat{I}_z^*\} = \Re\left\{ \frac{\hat{U}_p \hat{Z}_z}{\hat{Z}_i + \hat{Z}_z} \frac{\hat{U}_p^*}{(\hat{Z}_i + \hat{Z}_z)^*} \right\} = \frac{|\hat{U}_p|^2 \Re\{\hat{Z}_z\}}{|\hat{Z}_i + \hat{Z}_z|^2} = \frac{U_p^2 R_z}{(R_i + R_z)^2 + (X_i + X_z)^2}$$

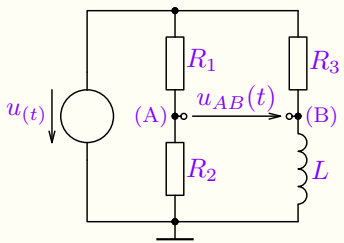
Pro $P = P_{\max}$ musí pro reaktance evidentně platit:

1. $X_i + X_z = 0 \Rightarrow X_i = -X_z$, čímž je zároveň kompenzován učiník a pak
2. $\dfrac{\partial P}{\partial R_z} = U_p^2 \dfrac{(R_i + R_z)^2 - 2R_z(R_i + R_z)}{(R_i + R_z)^4} = 0 \;\Rightarrow\; R_i + R_z = 2R_z \;\Rightarrow\; R_i = R_z.$

U klasické rozvodné sítě musí samozřejmě platit $R_i \ll R_z$, aby $U_z \neq f(R_z)$ a také proto, aby se výkon spotřebovával zejména ve spotřebiči a ne v rozvodné síti.

Příklad 5.3

Zadání: Obvod na obrázku je napájen ze zdroje napětí s časovým průběhem $u(t) = U_m \sin(\omega t)$. Určete časové vyjádření napětí $u_{AB}(t)$. Dokumentujte výpočtem i orientačním fázorovým diagramem fázorů obvodových veličin nezávislost amplitudy napětí $u_{AB}(t)$ na kmitočtu.



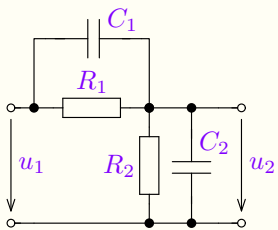
$R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 1\,\mathrm{k\,\Omega}$
$R_3 = 1\,\mathrm{k\,\Omega}$, $L = 10\,\mathrm{mH}$,
$U_m = 5\,\mathrm{V}$, $f = 5\,\mathrm{kHz}$.

Řešení: viz přednáška včetně analýzy v GEEC.

Je zřejmé, že řešení obvodů v HUS, je analogické řešení v SUS s tím rozdílem, že uvažujeme impedance kapacitorů a induktorů a numerické výpočty je nutné provádět v oboru komplexních čísel. Lze však použít všechny metody výše uvedené, tj. MUN, MSP, princip superpozice, Theveninovo náhradní schéma, . . . (řešte příklad 3.5 (b)).
Metody HUS lze použít pouze u lineárních obvodů s harmonickým buzením!

Příklad 5.4

Zadání: Určete velikost kapacitoru C_1 v zapojení podle obrázku tak, aby fázor výstupního napětí $\hat{U}_2$ nezávisel na kmitočtu harmonického budicího zdroje $u_1(t) = U_m \sin(\omega t)$, tj. velikost (amplituda) ani fáze výstupního napětí $u_2(t)$ nebyly funkcí kmitočtu ($\omega = 2\pi f$).



$R_1 = 900\,\mathrm{k\Omega}$,
$R_2 = 100\,\mathrm{k\Omega}$,
$C_2 = 120\,\mathrm{pF}$,
$C_1 = ?$

Řešení: viz přednáška (výsledek $13{,}\overline{3}\,\mathrm{pF}$). **Diskuse praktického využití**: viz přednáška. Jak se hodnota C_1 přesně nastaví – viz příklad 7.5, tj. včetně souvislosti s časovým popisem a úvod do kapitoly 6.

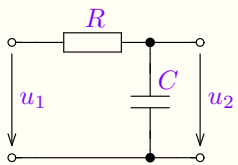
Jaká by byla závislost výstupního napětí pokud by $C_1 = 0$? ⇒ Kmitočtové charakteristiky.

5.4. Kmitočtové charakteristiky

Kmitočtovou charakteristiku lze definovat jako závislost fázoru obvodové veličiny nebo jejich funkce (obvykle podílu fázorů obvodových veličin) na kmitočtu. Fázor (např. napětí) budeme v tomto případě značit $U(j\omega)$.

Příklad 5.5

Zadání: Určete závislost podílu fázorů výstupního u_2 a vstupního napětí u_1 integračního článku dle obrázku na kmitočtu f. Uvažujte následující hodnoty obvodových prvků: $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$ a $C = 100\,\mathrm{nF}$.



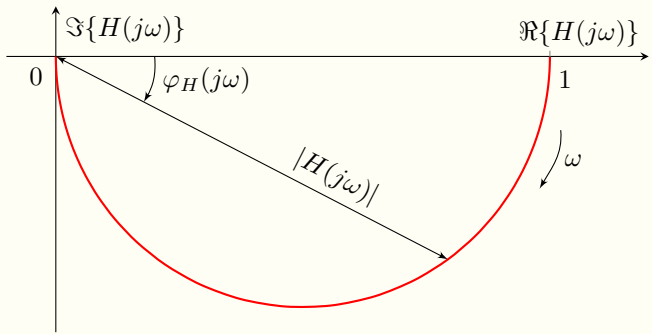
Experiment: viz přednáška.

Řešení: Fázor výstupního napětí lze vyjádřit analogicky jako výstupní napětí odporového děliče napětí:

$$U_2(j\omega) = U_1(j\omega)\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = U_1(j\omega)\frac{1}{1 + j\omega\tau}, \quad \tau = RC = \frac{1}{\omega_0} \tag{5.25}$$

$$H(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}},\ \omega_0 = 10^4\,[\mathrm{rad/s}],\ f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \doteq 1592\,[\mathrm{Hz}] \tag{5.26}$$

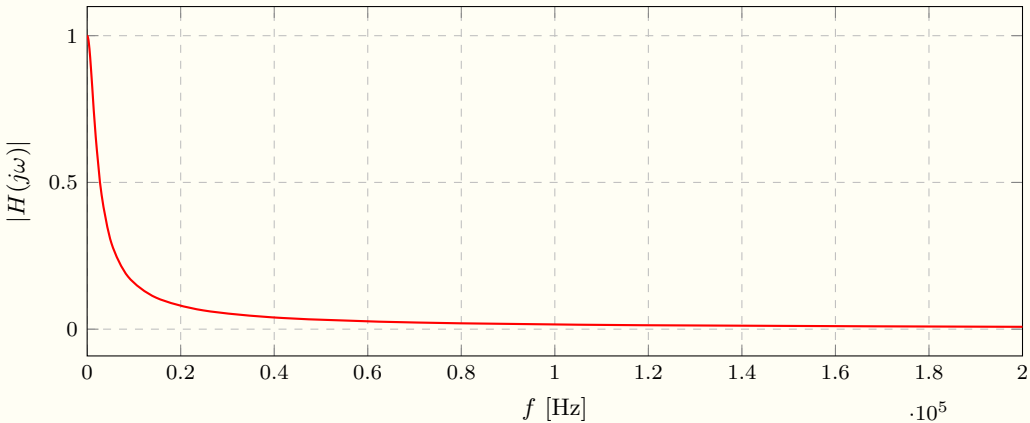
Kmitočtovou charakteristiku $H(j\omega) = |H(j\omega)|\mathrm{e}^{j\varphi_H(j\omega)}$ vynášíme jako závislost poměru fázorů výstupního a vstupního signálu na kmitočtu[a]. Lze ji vykreslit buď do jednoho parametrického grafu v komplexní rovině (hodograf), kde je parametrem kmitočet nebo častěji do dvou grafů jako amplitudovou (modulovou) $|H(j\omega)|$ a fázovou $\varphi_H(j\omega)$ charakteristiku, tj. závislost poměru amplitud výstupního a vstupního napětí (modul podílu fázorů) a závislost fáze výstupního napětí vůči fázi vstupního napětí na kmitočtu.



Obrázek 5.5: Kmitočtová charakteristika integračního RC-článku v komplexní rovině (hodograf).

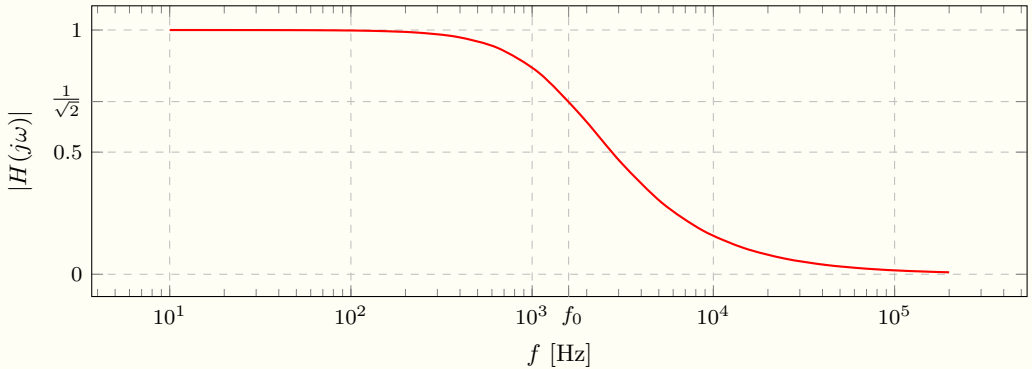
[a] $H(j\omega)$ je vzhledem k proměnné $j\omega$ komplexní číslo závislé na kmitočtu, stejně jako fázor.

Hodograf se využívá spíše orientačně (absence stupnice kmitočtu, nemožnost přímého odečtu absolutní hodnoty, která je podstatně využitelnější než reálná a imaginární složka, . . .).



Obrázek 5.6: Amplitudová kmitočtová charakteristika RC-článku v lineárním měřítku.

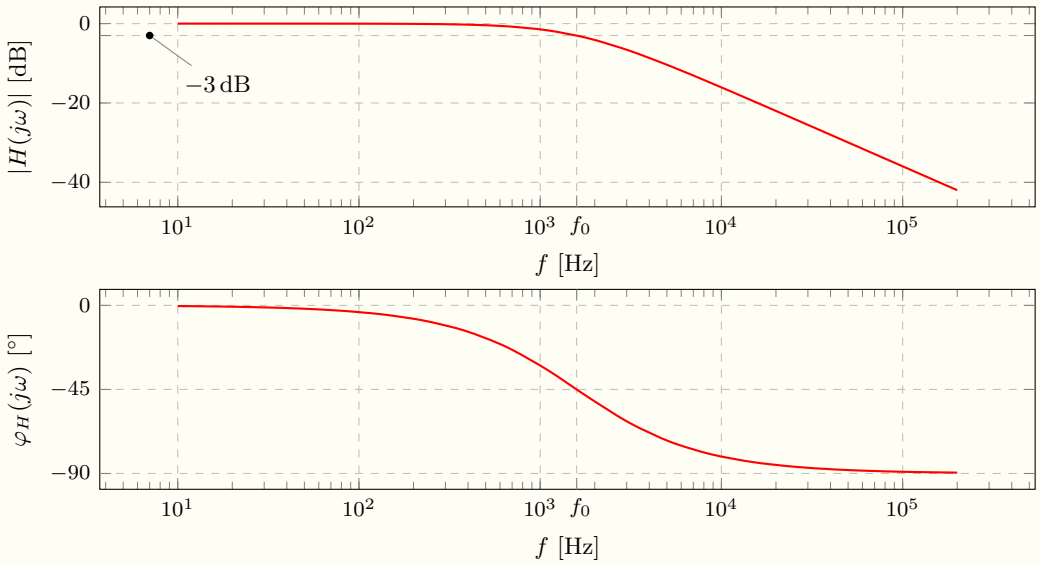
Pro potřeby většího rozsahu kmitočtu je však lineární měřítko kmitočtu nevhodné a používá se jen zřídka, např. u charakteristik úzkopásmových filtrů s malým kmitočtovým rozsahem.



Obrázek 5.7: Amplitudová kmitočtová charakteristika RC-článku v logaritmickém měřítku kmitočtu.

Logaritmické měřítko kmitočtu je zde evidentně výhodnější. Další „nevýhodou“ je malé rozlišení změny amplitudy pro větší útlumy (zde např. pro $f > 10^4\,\mathrm{Hz}$ je z charakteristiky prakticky nemožné odečíst). Z tohoto důvodu se zavádí i logaritmická míra osy modulu, resp. zavádí se tzv. poměrná jednotka decibel [dB], která je pro poměr napětí definovaná jako $|H(j\omega)|\ [\mathrm{dB}] = 20\log\big(|H(j\omega)|\big)$, viz následující obrázek.

Analýza a ověření charakteristik experimentem: viz přednáška



Obrázek 5.8: Amplitudová a fázová kmitočtová charakteristika integračního RC-článku.

5.4.1. Použití kmitočtových charakteristik

Hlavní (a velmi důležitou) informaci, kterou kmitočtové charakteristiky vyjadřují, jsou přenosové vlastnosti lineárních obvodů/systémů pro buzení harmonickým signálem o různých kmitočtech. Uveďme na příkladu:

Příklad 5.6

Zadání: Určete časový průběh výstupního napětí u_2 integračního článku z příkladu 5.5 ($R = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $C = 100\,\mathrm{nF}$), pokud je vstupní napětí dáno vztahem $u_1 = 5\cos(2\pi 4000t)\,[\mathrm{V}]$, tj. $f = 4\,\mathrm{kHz}$.

Řešení: Fázor výstupního napětí lze určit dle vztahu (5.25), resp. (5.25):

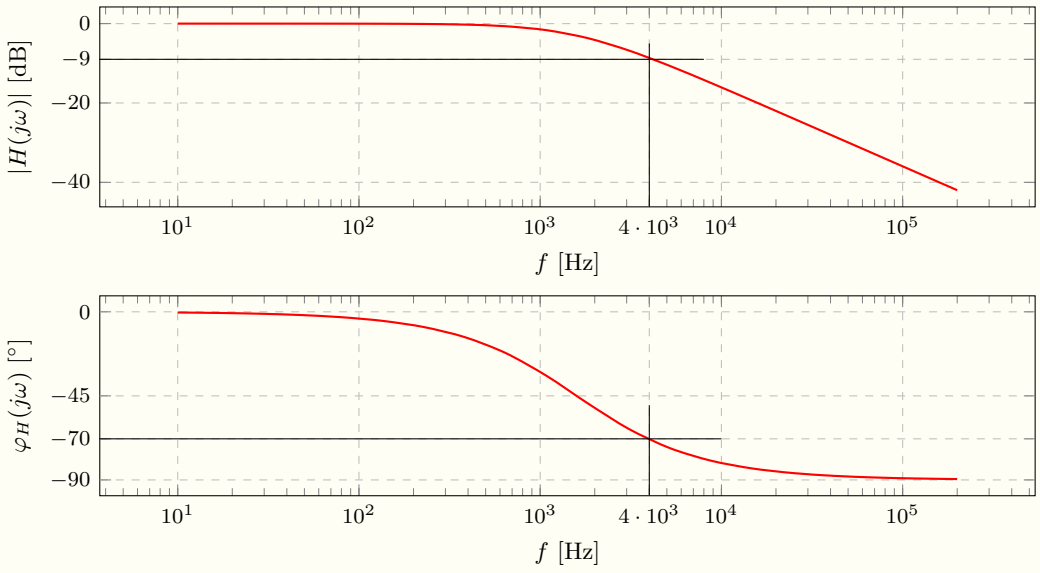
$$U_2(j\omega) = U_1(j\omega)H(j\omega) = U_1(j\omega)\frac{1}{1+j\omega RC}$$

pro $u_1 = 5\cos(2\pi 4000)$ je fázor vstupního napětí $U_1 = 5\,\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{2}}$ a $H(j\pi 8000) \doteq 0{,}4\,\mathrm{e}^{-j1{,}2}$, pak

$$U_2(j\omega) = U_1(j\omega)H(j\pi 8000) \doteq 5 \cdot 0{,}4\,\mathrm{e}^{j\left(\frac{\pi}{2}-1{,}2\right)} \doteq 2\,\mathrm{e}^{j0{,}4} \Rightarrow u_2(t) \doteq 2\sin(\pi 8000t + 0{,}4)$$

přičemž hodnotu $H(j\omega)$ lze odečíst pro $f = 4\,\mathrm{kHz}$ přímo z kmitočtové charakteristiky, jak ukazují následující obrázky:

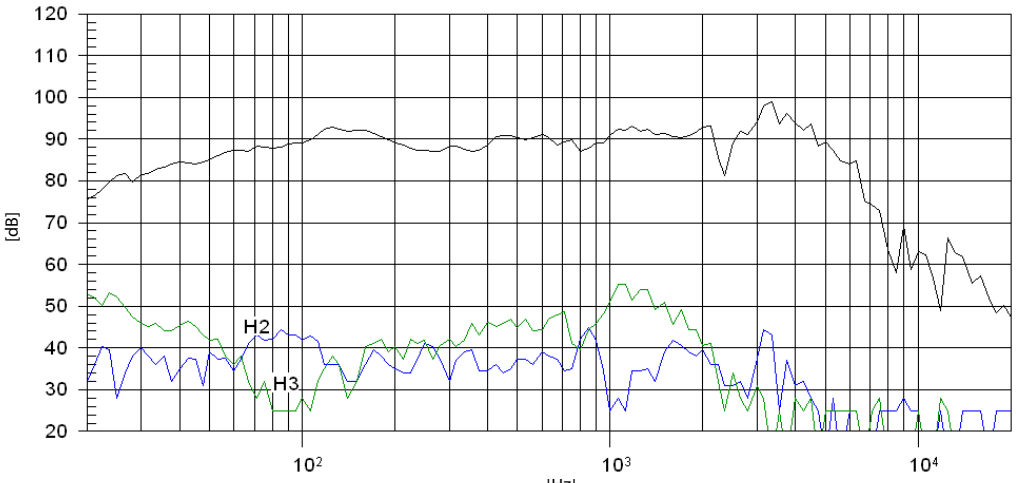
$$|H(j2\pi 4000)| \doteq -9\,\mathrm{dB} = 10^{\frac{-9}{20}} \doteq 0{,}4 \quad \text{a} \quad \varphi_H(j2\pi 4000) \doteq -70^\circ \doteq -1{,}2\,\mathrm{rad}.$$



Obrázek 5.9: Kmitočtová charakteristika integračního RC-článku a její hodnoty pro $f = 4000\,\mathrm{Hz}$.

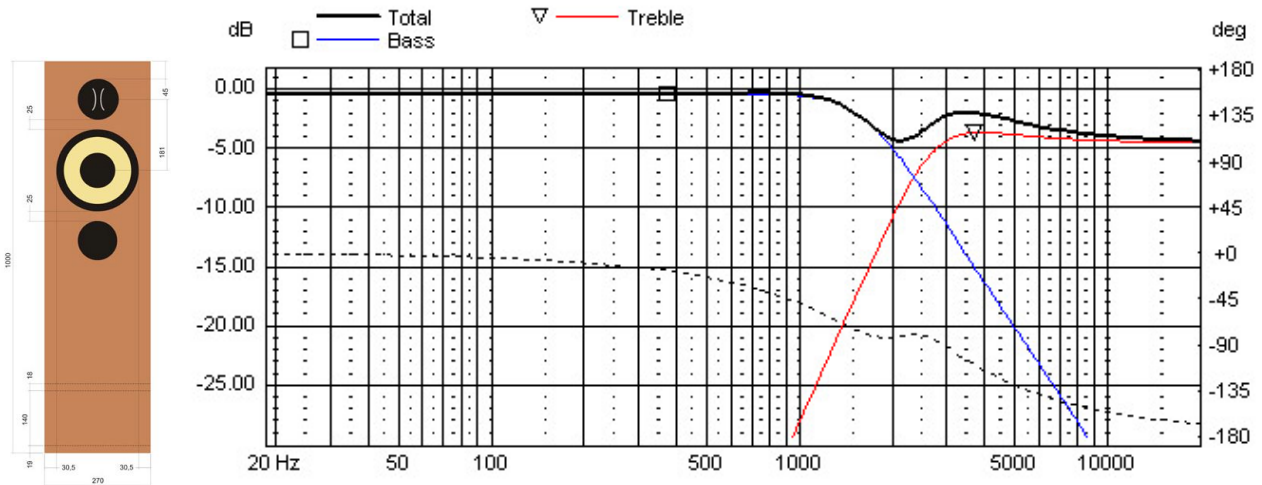
Kmitočtové charakteristiky jsou významným „parametrem“ pro mnoho systémů. Jako příklad je uvedena amplitudová charakteristika reproduktoru, jako relativní míra akustického tlaku v závislosti na kmitočtu (viz např. wikipedia.org.





Obrázek 5.10: Kmitočtová charakteristika reproduktoru, převzato z dexon.cz, kde jsou další informace i charakteristiky včetně $Z(j\omega)$ reproduktoru.

Následuje ukázka amplitudové charakteristiky elektrické výhybky (kmitočtového filtru) reproduktorové soustavy.
Komentář: viz přednáška.



Obrázek 5.11: Kmitočtová charakteristika reproduktorové výhybky, převzato z dexon.cz.

5.4.2. Bodeho aproximace kmitočtových charakteristik

V mnoha případech lze průběh amplitudové a fázové charakteristiky jednoduše aproximovat pomocí asymptot. Kmitočtovou charakteristiku lze obecněji vyjádřit ve formě:

$$H(j\omega)=\frac{(j\omega)^M+a_{M-1}(j\omega)^{M-1}+\cdots+a_0}{b_N(j\omega)^N+b_{N-1}(j\omega)^{N-1}+\cdots+b_0}=H_C\frac{(j\omega-s_{n_1})(j\omega-s_{n_2})\cdots(j\omega-s_{n_M})}{(j\omega-s_{p_1})(j\omega-s_{p_2})\cdots(j\omega-s_{p_N})}=$$

$$=H_0\frac{\prod_{k=1}^{M}\left(1\pm j\frac{\omega}{\omega_{n_k}}\right)}{\prod_{l=1}^{N}\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{0_l}}\right)}=|H(j\omega)|\mathrm{e}^{j\varphi_H(j\omega)}=H_0\frac{\prod_{k=1}^{M}\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_{n_k}}\right)^2}\mathrm{e}^{\pm j\varphi_{n_k}}}{\prod_{l=1}^{N}\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_{0_l}}\right)^2}\mathrm{e}^{j\varphi_{0_l}}}=H_0\frac{\prod_{k=1}^{M}\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_{n_k}}\right)^2}}{\prod_{l=1}^{N}\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_{0_l}}\right)^2}}\mathrm{e}^{j\left(\pm\sum_{k=1}^{M}\varphi_{n_k}-\sum_{l=1}^{N}\varphi_{0_l}\right)} \tag{5.27}$$

kde H_0 je násobná konstanta kmitočtové charakteristiky,

$s_{n_k}=-\omega_{n_k}$ jsou reálné kořeny polynomu čitatele $H(s)$[1], resp. ω_{n_k} zlomové kmitočty amplitudových charakteristik jednotlivých členů $\left(1\pm j\frac{\omega}{\omega_{n_k}}\right)$ čitatele,

$s_{p_l}=-\omega_{0_l}$ jsou reálné kořeny polynomu jmenovatele $H(j\omega)$, resp. ω_{0_k} jsou zlomové kmitočty amplitudových charakteristik jednotlivých členů $\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{0_l}}\right)$ jmenovatele,

$\varphi_{n_k}=\arg\left(1\pm j\frac{\omega}{\omega_{n_k}}\right)$ a $\varphi_{0_l}=\arg\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{0_l}}\right)$ jsou fázové charakteristiky jednotlivých členů.

[1] $H(s)$ je přenosová funkce, kde $j\omega\to s$, viz kapitolu 7. Kořeny mohou obecně být komplexní, pak aproximace charakteristik může vykazovat značné chyby a takovým případem se v této podkapitole nebudeme zabývat.

5.4.3. Aproximace členů $\left(1+j\frac{\omega}{\omega_x}\right)$ kmitočtových charakteristik

- Amplitudovou charakteristiku členu lze vyjádřit jako modul, tj. $\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_x}\right)^2}$.

  $\omega < \omega_x$: pokud je kmitočet (proměnná) menší než zlomový kmitočet (konstanta), je $\left(\frac{\omega}{\omega_x}\right)^2 \ll 1$ a celý člen se neuplatí a lze ho nahradit 1 – charakteristika je konstantní.

  $\omega > \omega_x$: pokud je kmitočet větší než zlomový kmitočet, je $\left(\frac{\omega}{\omega_x}\right)^2 \gg 1$ a jedničku lze ve vztahu zanedbat a celý člen lze nahradit $\frac{\omega}{\omega_x}$, tj. charakteristika je od zlomového kmitočtu $\omega \geq \omega_x$ lineárně vzrůstající/klesající funkcí, podle toho, zda je člen v čitateli (amplitudová charakteristika roste), či jmenovateli (amplitudová charakteristika klesá). Vzhledem k tomu, že amplitudovou chrarakteristiku nevynášíme v lineárním, ale logaritmickém měřítku, je i klesající funkce lineární (v logaritmickém měřítku kmitočtu) a navíc se násobení/podíl jednotlivých členů mění v součet/rozdíl logaritmů, tj. sčítání/odčítání jednotlivých charakteristik:

$$|H(j\omega)|\ [\mathrm{dB}] = 20\log\big(|H(j\omega)|\big) = 20\log\big(H_0\big) + \sum_{k=1}^{M}\log\left(\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_{n_k}}\right)^2}\right) - \sum_{l=1}^{N}\log\left(\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_{0_l}}\right)^2}\right) \tag{5.28}$$

  Jak bylo již uvedeno, decibel (dB) je poměrná logaritmická míra. Jednotka je definována pro poměr výkonů jako $10\log\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = 10\log\left(\frac{U_2^2}{U_1^2}\right) = 20\log\left|\frac{U_2}{U_1}\right|$ [dB,W/W,V/V], jelikož výkon je úměrný kvadrátu napětí.

Pokud tedy poměr amplitud napětí $10\times$ vzroste/klesne, pak je to v logaritmické míře $\pm 20\,\mathrm{dB}$. Platí tedy:

$\omega < \omega_x$: celý člen se neuplatí a lze ho nahradit 1 – charakteristika je konstantní, tj. $0\,\mathrm{dB}$ ($\log 1 = 0$).

$\omega > \omega_x$: celý člen lze nahradit $\frac{\omega}{\omega_x}$, tj. charakteristika je od zlomového kmitočtu $\omega \geq \omega_x$ lineárně rostoucí/klesající funkcí se směrnicí $20\,\mathrm{dB}$/dek. (pokud je člen v čitateli, amplitudová charakteristika roste, pokud je ve jmenovateli amplitudová charakteristika s touto směrnicí klesá), přičemž $20\,\mathrm{dB}$/dek. znamená, že když se kmitočet $10\times$ (o dekádu) zvýší, zvýší se amplitudová charakteristika o $20\,\mathrm{dB}$.

$\omega = \omega_x$: zde dochází evidentně k největší chybě aproximace. Modul (absolutní hodnota) členu je místo aproximační hodnoty 1 rovna $\sqrt{2}$, případně $1/\sqrt{2}$, pokud je člen ve jmenovateli, tj. chyba je $\pm 3\,\mathrm{dB}$.

- Fázovou charakteristiku členu $\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_x}\right)$ lze aproximovat následovně:

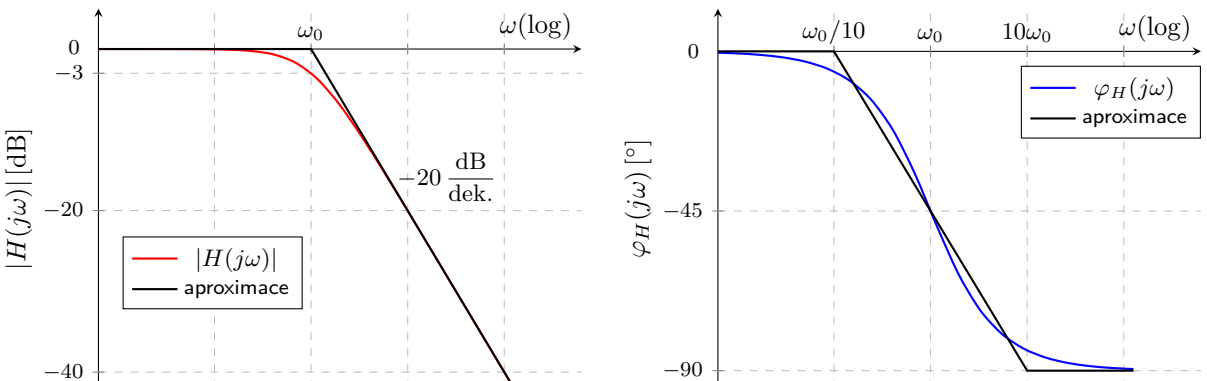
  $\omega < \omega_x/10$: pokud je kmitočet menší než $1/10$ zlomového kmitočtu, fáze členu je nulová.

  $\omega > \omega_x/10$: pokud je kmitočet větší než $1/10$ zlomového kmitočtu, začne se fáze měnit se strmostí $\pm 45°$/dek. a fáze se mění až do desetinásobku zlomového kmitočtu, tj. každý člen změní fázi o $90°$ nebo $-90°$. Pro $\omega = \omega_x$ je změna fáze právě $45°$ a pro $\omega \geq 10\omega_x$ je změna fáze $90°$ a dále již fázi člen neovlivňuje.

  Kladný fázový posun vykazují záporné kořeny polynomu čitatele $H(s)$, tj. členy $\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{n_k}}\right)$ a záporný fázový posun vykazují jak záporné kořeny polynomu jmenovatele, tak kladné kořeny polynomu čitatele $H(s)$ tj. členy $\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{0_l}}\right)$ a $\left(1 - j\frac{\omega}{\omega_{n_k}}\right)$. Z tohoto důvodu jsou uvedena obě zanaménka ve vztahu (5.27).

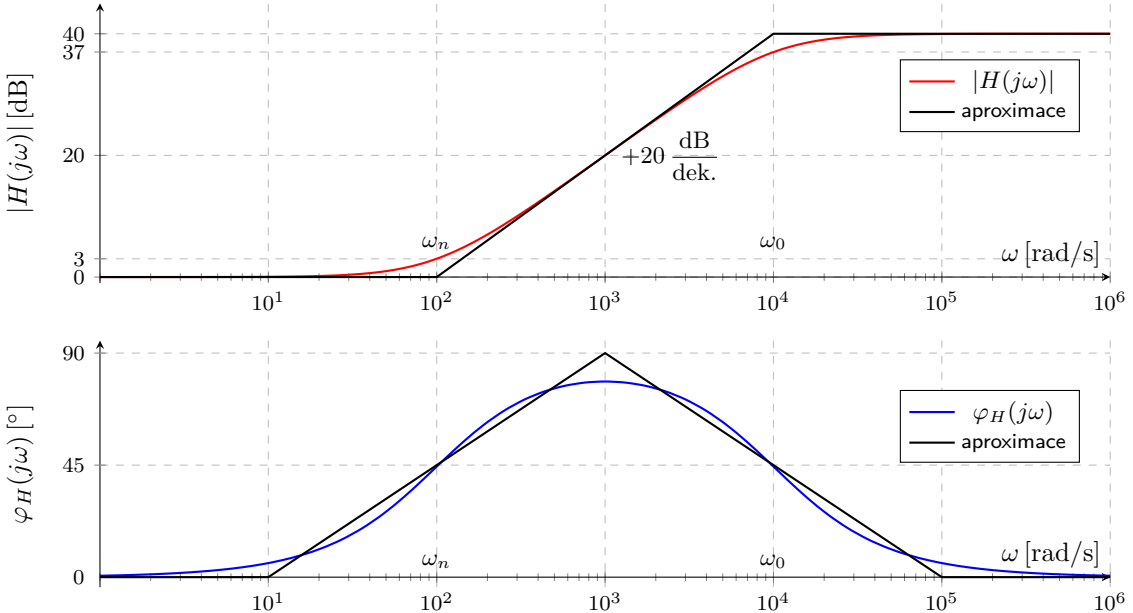
Pro stabilní systémy, pro které je kmitočtová charakteristika definovaná, musí být všechny kořeny polynomu jmenovatele záporné. Znaménko kořenu polynomu čitatele $H(j\omega)$ má vliv pouze na fázi členu $\left(1 \pm j\frac{\omega}{\omega_{n_k}}\right)$, modul je samozřejmě stejný pro obě polarity.

Následují ukázky Bodeho aproximace kmitočtových charakteristik elementárních funkcí (jednotlivých členů).



Obrázek 5.12: Bodeho aproximace amplitudové a fázové kmitočtové charakteristiky $H(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$.

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL



Obrázek 5.13: Bodeho aproximace amplitudové a fázové kmitočtové charakteristiky $H(j\omega) = \dfrac{1 + j\frac{\omega}{100}}{1 + j\frac{\omega}{10^4}}$.

5.4.4. Kmitočtová charakteristika násobné konstanty H_0.

Amplitudová charakteristika násobné konstanty je konstantní – posunuje kmitočtovou charakteristiku o konstantu $20\log(H_0)\,[\mathrm{dB}]$. Fázový posun konstanty je samozřejmě nulový v případě kladné konstanty nebo $\pm 180°$, pokud je $H_0 < 0$.

Mimo výše uvedené členy, může kmitočtová charakteristika $H(j\omega)$ obsahovat dále člen $j\omega$ a to jak v čitateli, tak ve jmenovateli.

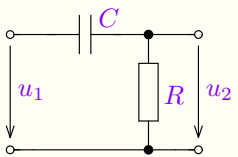
5.4.5. Kmitočtová charakteristika členu $j\omega$

Amplitudová charakteristika násobného členu $j\omega$ je lineárně rostoucí/klesající funkcí se směrnicí 20 dB/dek. Pokud je člen $j\omega$ v čitateli, amplitudová charakteristika roste, pokud je ve jmenovateli amplitudová charakteristika s touto směrnicí klesá, přičemž vodorovnou osu ($|H(j\omega)| = 1 \equiv 0\,\mathrm{dB}$) protíná pro $\omega = 1$. Fázový posun členu $j\omega$ je samozřejmě konstantní (nezávislý na kmitočtu ω a je $90°$ v případě členu v čitateli, resp. $-90°$ v případě členu ve jmenovateli.

Pokud jsou kořeny polynomu čitatele nebo jmenovatele $H(s)$ komplexní vykazuje tato aproximace i značné chyby a nelze ji použít, viz obrázek 5.20 a dále kapitolu 8, resp. 8.2.2.

Příklad 5.7

Zadání: Nakreslete Bodeho aproximaci amplitudové a fázové charakteristiky derivačního článku dle obrázku, pokud jsou zadány následující hodnoty prvků.



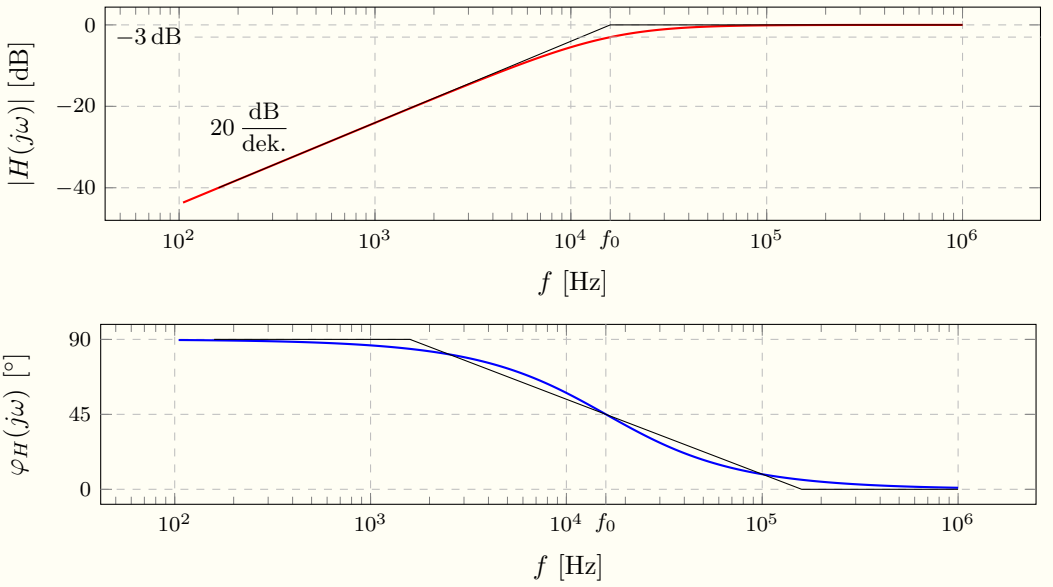
$R = 1\,\mathrm{k\Omega},$
$C = 10\,\mathrm{nF}.$

Řešení: Kmitočtovou charakteristiku lze vyjádřit analogicky jako v předchozím příkladě:

$$U_2(j\omega) = U_1(j\omega)\frac{R}{R+\frac{1}{j\omega C}} = U_1(j\omega)\frac{j\omega\tau}{1+j\omega\tau}, \quad \text{kde} \quad \tau = RC = \frac{1}{\omega_0}$$

$$H(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}},\ \omega_0 = 10^5[\mathrm{rad/s}],\ f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \doteq 15915[\mathrm{Hz}]$$

Poznámka: Postup analýzy kmitočtové charakteristiky $H(j\omega)$ i $H(j2\pi f)$ v simulátoru geec viz přednáška.



Obrázek 5.14: Modulová a fázová charakteristika derivačního RC článku.

Příklad 5.8

Zadání:

- Jak zapojit obvod s induktorem a rezistorem tak, aby jeho kmitočtové charakteristiky odpovídaly výše uvedenému obrázku 5.14?
- Jaká musí být hodnota indukčnosti induktoru pro shodný zlomový kmitočet a pro $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$?

Řešení: viz přednáška, včetně ověření simulací.

Příklad 5.9

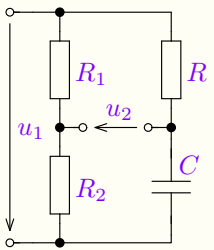
Zadání: Nakreslete Bodeho aproximaci amplitudové a fázové charakteristiky, která je zadaná vztahem:

$$H(j\omega) = 1000\frac{j\omega - 100}{j\omega(1000 + j\omega)}$$

Řešení: viz přednáška, včetně ověření simulací. Viz také videoukázku postupu analýzy dynamického systému v GEEC.

Příklad 5.10

Zadání: Nakreslete Bodeho aproximaci amplitudové a fázové charakteristiky obvodu na obrázku, tj. závislost podílu fázorů výstupního $U_2(j\omega)$ a vstupního napětí $U_1(j\omega)$ na kmitočtu, pokud jsou zadány následující hodnoty prvků.



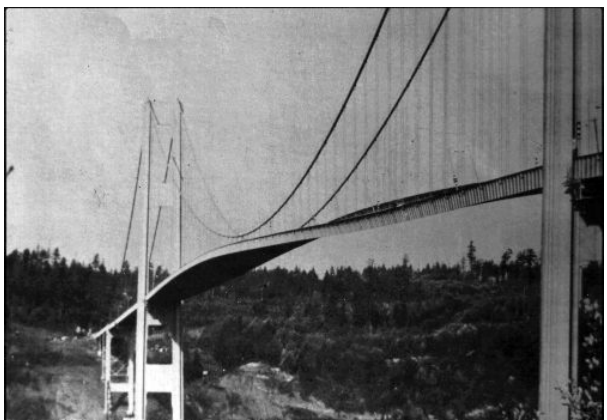
$R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 1\,\mathrm{k\Omega}$,
$R = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $C = 10\,\mathrm{nF}$.

Řešení: úloha k procvičení, ověření – viz analýzu, $\left(-6\,\mathrm{dB} \equiv \frac{1}{2}\right)$.
Srovnej s kmitočtovou charakteristikou obvodu v příkladu 5.3.

5.5. Rezonance

Je vlastnost systému reagovat na buzení kmitavou odezvou na specifickém kmitočtu (případně jeho násobcích). Buzení na tomto kmitočtu pak dává odezvu s výrazně vyšší amplitudou než na kmitočtech ostatních.

Takový systém musí akumulovat minimálně dva druhy energie, které mezi sebou periodicky přeměňuje, např. potenciální a kinetickou (kyvadlo) nebo elektrickou a magnetickou (LC obvod). Viz také experiment mechanické rezonance.

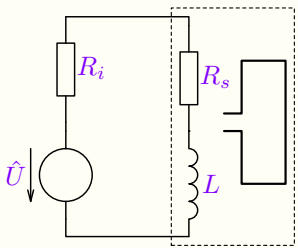


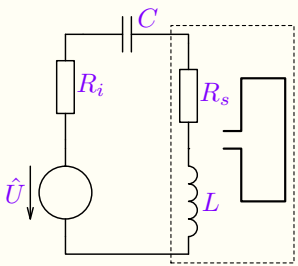


Zhoucení mostu Tacoma Narrows Bridge, zdroj https://en.wikipedia.org/wiki/

Příklad 5.11 – motivační

Zadání: Rámová anténa má indukčnost $L = 1\,\mu\mathrm{H}$ a sériovou rezistanci $R_s = 4\,\Omega$. Jaká musí být amplituda harmonického napěťového zdroje pro buzení této antény pokud má být amplituda proudu anténou na $1\,\mathrm{A}$ při kmitočtu $f = 30\,\mathrm{MHz}$ a vnitřním odporu zdroje $R_i = 4\,\Omega$? Jak se změní výsledek, pokud do série s anténou připojíme kapacitor o kapacitě $C = 28\,\mathrm{pF}$?

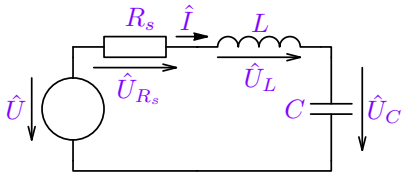




Řešení: viz. přednáška.

5.5.1. Sériový rezonanční obvod (SRO)

Zapojení sériového rezonančního obvodu je na obrázku 5.15, kde L a C představují zmíněné akumulátory energie magnetického a elektrického pole a R je tlumící element.



Obrázek 5.15: Sériový rezonanční obvod.

Impedance sériového rezonančního obvodu dle obrázku je:

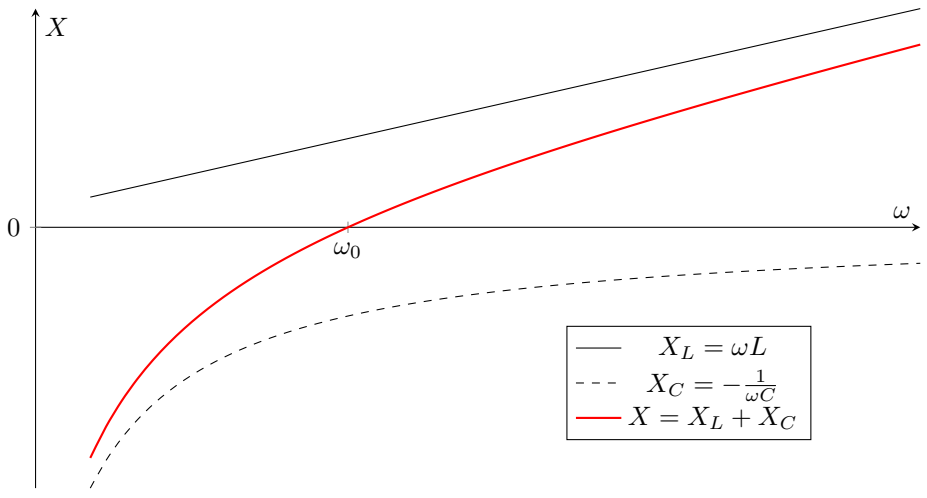
$$\hat{Z} = R_s + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R_s + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \Rightarrow |Z| = \sqrt{R_s^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Napěťová rezonance nastává pro rezonanční kmitočet, který udává Thomsonův vztah:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \boxed{\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}, \tag{5.29}$$

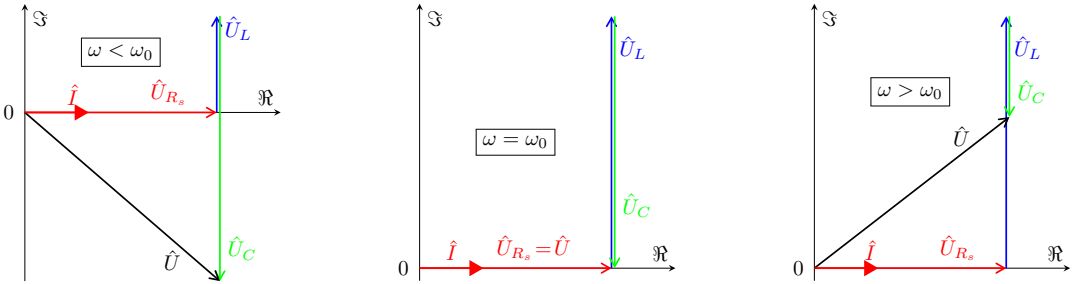
přičemž napětí na kapacitoru má stejnou velikost ale opačnou fázi oproti napětí na induktoru.

Reaktance (imaginární složka) SRO je složena ze dvou částí s opačným znaménkem (kapacitoru a induktoru), které se při rezonanci rovnají: $\hat{Z} = R + jX = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \Rightarrow X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$. Pro $\omega = \omega_0$ je reaktance nulová a celý SRO se jeví jako rezistor R. Závislost reaktance na kmitočtu udává následující graf.

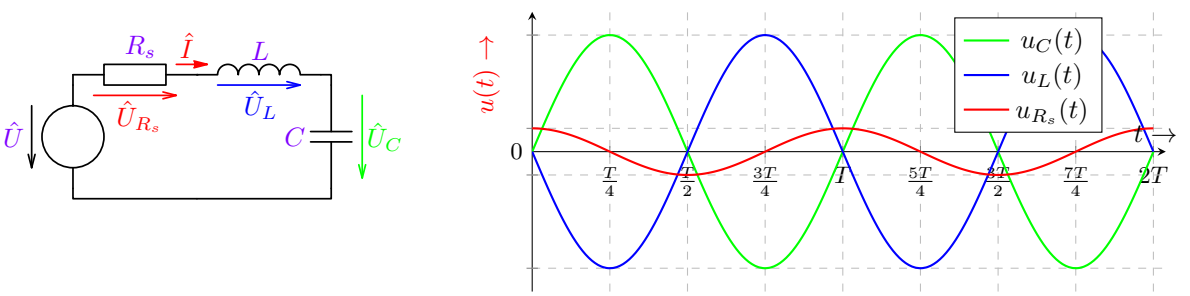


Obrázek 5.16: Reaktance SRO X v závislosti na úhlovém kmitočtu ω.

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL



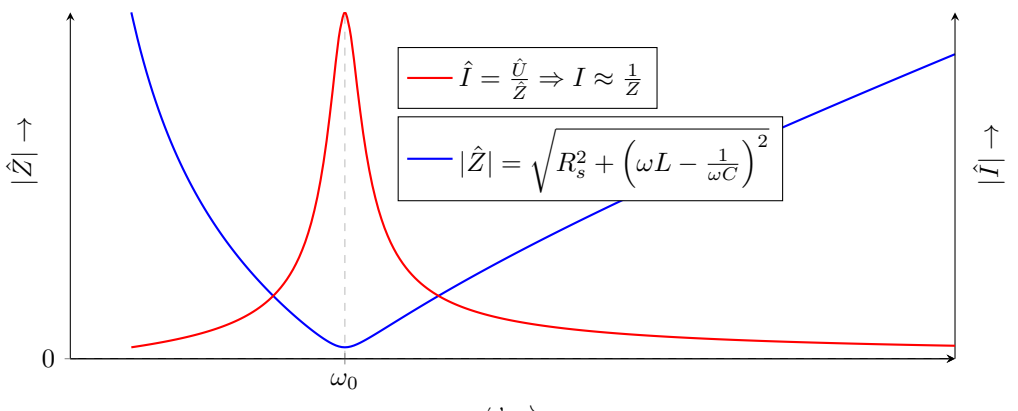
Obrázek 5.17: Fázory obvodových veličin SRO.



Obrázek 5.18: SRO a napětí na jeho prvcích v rezonanci, viz také analýzu.

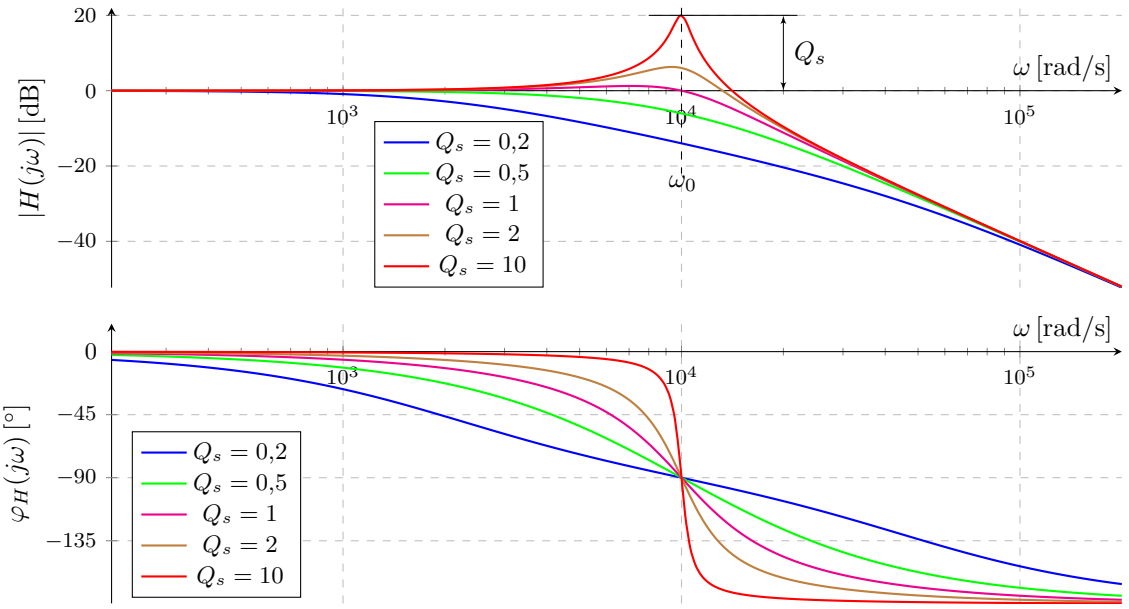
Lze vyjádřit, že podíl akumulované energie v SRO a energie přeměněné v rezistoru na teplo je úměrný podílu amplitudy U_C, resp. U_L a budicího napětí U, který nazýváme **činitelem jakosti** Q_s SRO:

$$Q_s = 2\pi \frac{E_{LC}}{E_{R_s}} = \frac{U_C}{U}\Big|_{\omega=\omega_0} = \frac{\frac{I}{\omega_0 C}}{R_s I} = \frac{1}{\omega_0 C R_s} = \frac{U_L}{U}\Big|_{\omega=\omega_0} = \frac{\omega_0 L}{R_s} = \frac{1}{R_s}\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{5.30}$$



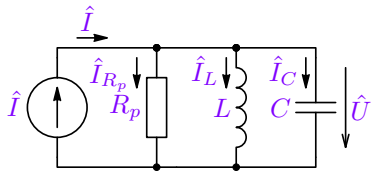
Obrázek 5.19: Velikost impedance Z a proudu I sériového rezonančního obvodu v závislosti na ω.

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL



Obrázek 5.20: Přenos napětí $H(j\omega) = \frac{\hat{U}_C(j\omega)}{\hat{U}(j\omega)}$ pro $C = 1\,\mu\text{F}$, $L = 10\,\text{mH}$ a $R_s = 500, 200, 100, 50, 10\,\Omega$.

5.5.2. Paralelní rezonanční obvod (PRO)



Obrázek 5.21: Paralelní rezonanční obvod.

Admitance paralelního rezonančního obvodu dle obrázku je:

$$\hat{Y} = G_p + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = G_p + j\Big(\omega C - \frac{1}{\omega L}\Big).$$

Proudová rezonance nastává pro rezonanční kmitočet, který opět udává Thomsonův vztah:

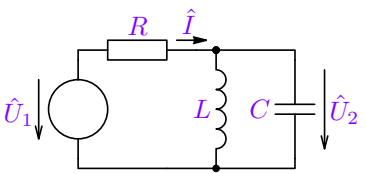
$$\text{tzv. proudová rezonance nastává pro} \quad \omega C = \frac{1}{\omega L} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}, \tag{5.31}$$

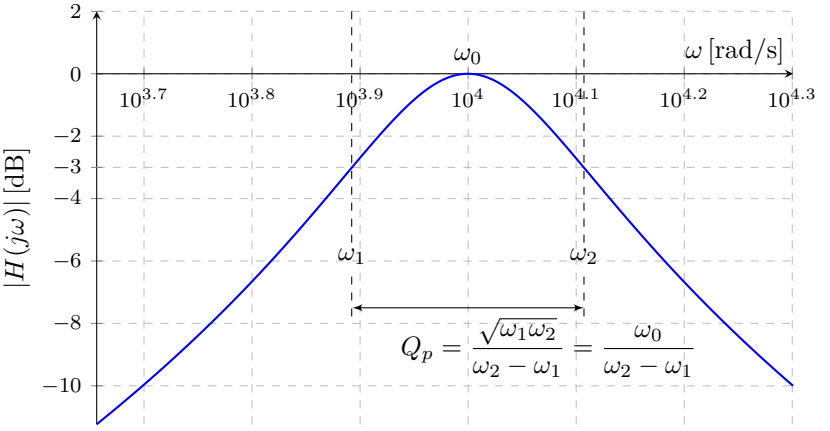
přičemž proud kapacitoru má stejnou velikost ale opačnou fázi oproti proudu induktoru.

Analogicky jako pro SRO lze i v tomto případě vyjádřit **činitel jakosti** Q_p jako podíl amplitudy I_C, resp. I_L a budicího proudu I:

$$Q_p = 2\pi \frac{E_{LC}}{E_{R_p}} = \left.\frac{I_C}{I}\right|_{\omega=\omega_0} = \frac{\omega_0 C}{G_p} = \left.\frac{I_L}{I}\right|_{\omega=\omega_0} = \frac{R_p}{\omega_0 L} = R_p\sqrt{\frac{C}{L}} \tag{5.32}$$

Komentář: Všimněme si analogie obou obvodů. Pokud budeme mluvit o napěťové rezonanci, tj. sériovém rezonančním obvodu, tak jsou to napětí na akumulačních prvcích, které se pro kmitočet ω blížící se rezonančnímu kmitočtu zvětšují a v rezonanci, tj. pro $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ jsou právě stejné. Vzhledem k tomu, že oba prvky jsou protékány stejným proudem, je jejich napětí vždy v protifázi (jsou vzájemně posunuty o $180°$, vzhledem k tomu, že napětí na kapacitoru je zpožděno a na induktoru předchází proud o $90°$). V rezonanci se tudíž obě napětí bezezbytku odečtou a napětí na rezistoru je přímo napětím budícího zdroje, jak je zřejmé z obrázků 5.17 a 5.18 (reaktance SRO je nulová, viz obrázek 5.16). Obvodem v tom případě teče maximální proud, jelikož jeho impedance je v rezonanci minimální, daná pouze tlumícím rezistorem R_s, viz obrázek 5.19. Velikost obou napětí na akumulačních prvcích je v rezonanci Q_s krát vyšší, dle (5.30), jak udává vztah (5.30) a jak je patrné i z obrázku 5.20. V praxi lze dosáhnout činitelů jakosti i $Q_s \approx 100$ a je nutné tyto prvky dimenzovat na příslušná napětí (i velké násobky napětí budícího). U PRO nastává proudová rezonance a popis je analogický, místo napětí pracujeme s proudem, místo reaktance používáme susceptanci, ..., ale závěry jsou stejné. Z tohoto důvodu nejsou ani ukázány odpovídající průběhy. Dále je uvedena kmitočtová charakteristika přenosového článku s PRO s odečtem příslušných hodnot pro určení činitele jakosti, viz obrázek 5.22.



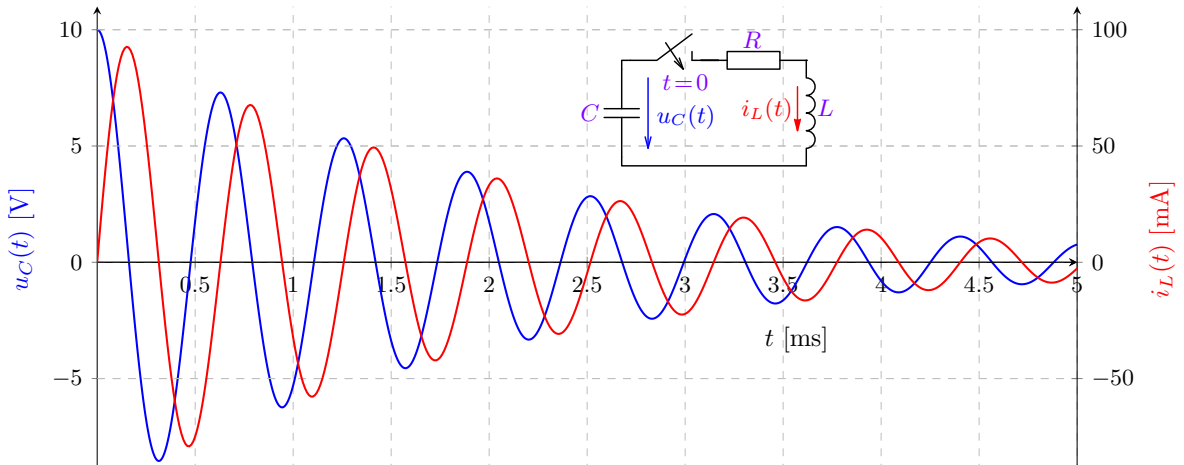


Obrázek 5.22: Přenosový článek s PRO a jeho kmitočtová charakteristika $H(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)}$ pro $C = 1\,\mu\text{F}$, $L = 10\,\text{mH}$ a $R = 200\,\Omega \;\Rightarrow\; Q_p = 2$, $\omega_1 \doteq 7808\,\text{rad/s}$, $\omega_2 \doteq 12808\,\text{rad/s}$, $|H(\omega_1)| = |H(\omega_2)| = -3\,\text{dB}$.

S kmitočtovými vlastnostmi souvisí i časové odezvy jak je ukázáno dále. V kapitole 4. byl představen přechodový děj 2. řádu v příkladu 4.10, který je ukázán na obrázku 5.23. Pokud jsou energetické ztráty v rezonančním obvodu kompenzovány, obvod funguje jako oscilátor, viz obrázek 5.24.

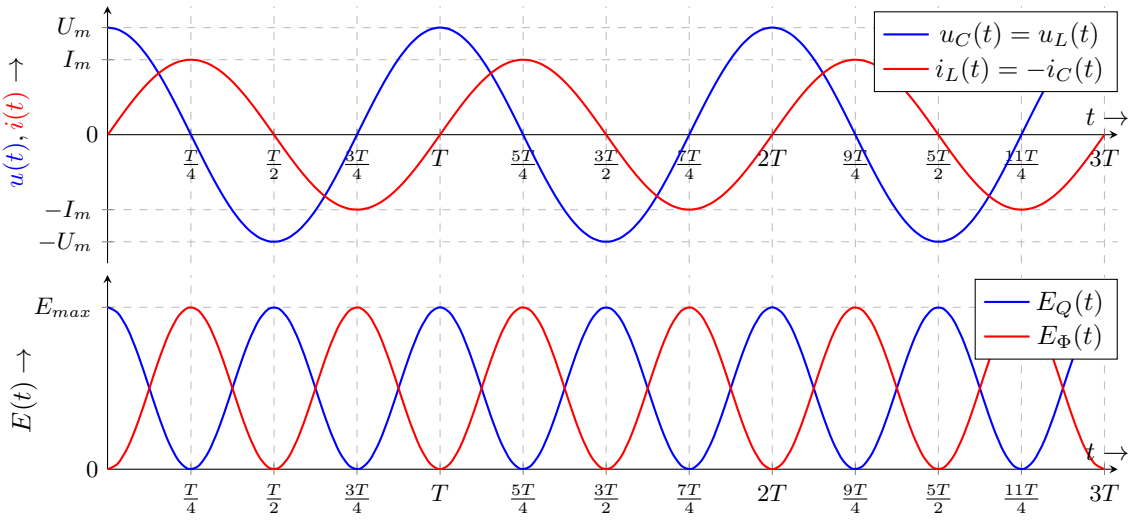
5.5.3. Časové odezvy rezonančního obvodu

Níže je uvedena časová odezva SRO na iniciační pulz (náboj kapacitoru v $t = 0$) viz. příklad 4.10. Dochází k tlumeným kmitům, jelikož dodaná energie (náboj kapacitoru) se postupně mění v rezistoru v teplo.



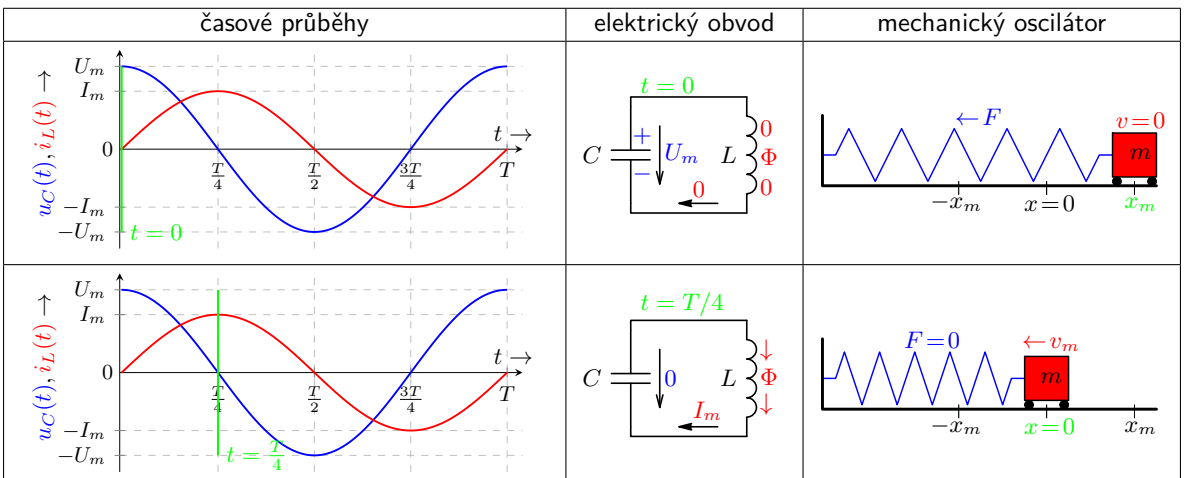
Obrázek 5.23: Časová odezva napětí $u_C(t)$ a proudu $i_L(t) = -i_C(t)$ obvodu, kde nabitý kapacitor $C = 1\,\mu\mathrm{F}$, $u_C(0) = 10\,\mathrm{V}$ byl připojen k sériové kombinaci induktoru $L = 10\,\mathrm{mH}$ a rezistoru $R = 10\,\Omega$.

Pokud by v předchozím případě přechodového děje byl $R = 0$, nebude kmitavý děj tlumený, jelikož se neztrácí žádná energie. Energie nabitého kapacitoru $E_Q \sim u_C^2$ se předává induktoru, tj. mění se na energii magnetickou $E_\Phi \sim i_L^2$ a zpět – vznikají netlumené kmity s kmitočtem odpovídajícímu rezonančnímu kmitočtu $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$:

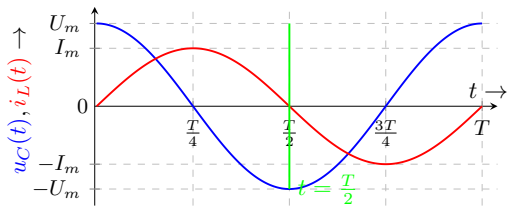
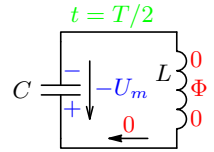
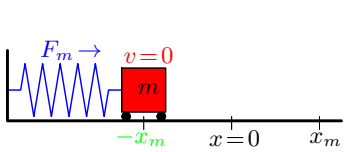
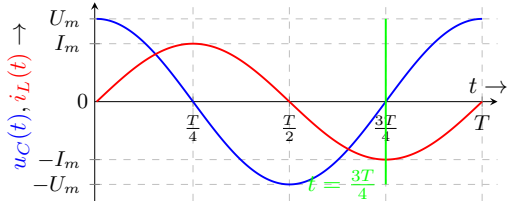
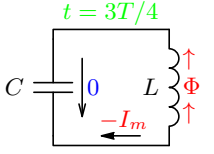
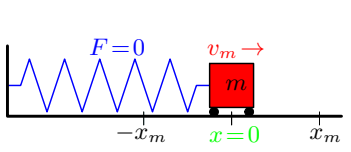
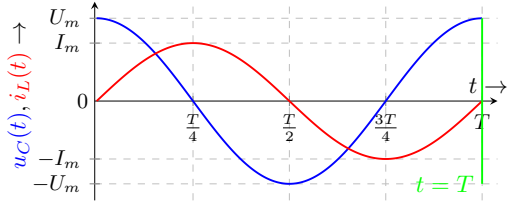
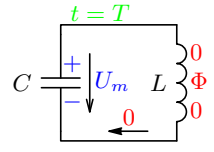
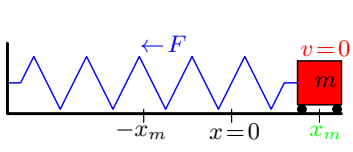


Obrázek 5.24: Časové průběhy $u_C(t)$, $i_L(t) = -i_C(t)$ a průběhy energie uložené v kapacitoru E_Q a induktoru E_Φ.

Netlumený rezonanční obvod a jeho analogie s mechanickým systémem, kdy energii kapacitoru odpovídá potenciální energie (pružnosti), tj. $u_C \leftrightarrow F$ a energii induktoru odpovídá kinetická (phybová) energie tělesa o hmotnosti m, tj. $i_L \leftrightarrow v$, přičemž U_m, I_m, F_m, v_m, resp. x_m jsou maximální výchylky energetických veličin, resp. polohy tělesa v odpovídajících časových okamžicích (násobcích 0, $1/4$, $1/2$, ... periody rezonančních kmitů $T = 1/f_0 = 2\pi/\omega_0$).

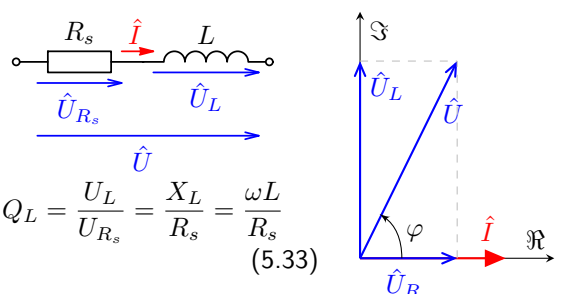


© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

časové průběhy	elektrický obvod	mechanický oscilátor
		
		
		

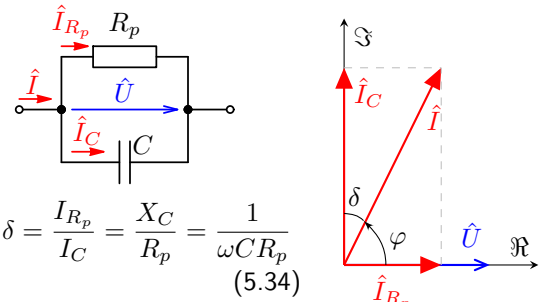
5.5.4. Ztrátové parametry cívky a kondenzátoru

V idealizovaných obvodech předpokládáme ideální prvky – kapacitory a induktory, které lze pro HUS charakterizovat ideálním posunem $90°$ mezi napětím a proudem, jak bylo uvedeno 5.1. Reálné akumulační prvky mají však ztráty, které se vyjadřují buď sériovým (zejména v případě cívky) nebo paralelním (v případě kondenzátoru) rezistorem, jak ukazuje následující obrázek. Kvalitu cívky pak udáváme jejím činitelem jakosti ($Q_L = Q_s$ pro $\omega = \omega_0$) a kvalitu kondenzátoru tzv. ztrátovým činitelem ($\tan\delta = 1/Q_p$ pro $\omega = \omega_0$, pro prvky s rezonancí).



$$Q_L = \frac{U_L}{U_{R_s}} = \frac{X_L}{R_s} = \frac{\omega L}{R_s} \tag{5.33}$$

(a)

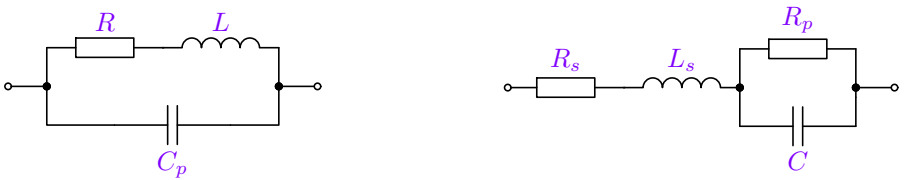


$$\tan\delta = \frac{I_{R_p}}{I_C} = \frac{X_C}{R_p} = \frac{1}{\omega C R_p} \tag{5.34}$$

(b)

Obrázek 5.25: Náhradní obvod, činitel jakosti a fázorový diagram cívky (a) a náhradní obvod, ztrátový činitel a fázorový diagram kondenzátoru (b).

Pro vysoké kmitočty se pak uplatňují i další parazitní vlastnosti: parazitní kapacita a ztráty cívky, parazitní indukčnost a kapacita odporu a sériový odpor a indukčnost spolu se svodem kondenzátoru. jak je uvedeno na obrázku 5.26. Lineární model cívky a odporu (a) je shodný, liší se pouze hodnotami prvků. Model kondenzátoru je pak na obrázku (b). Charakteristiky uvedených modelů udává analýza.



Obrázek 5.26: Lineární náhradní obvod cívky/odporu (a) a náhradní obvod kondenzátoru (b) pro vysoké kmitočty.

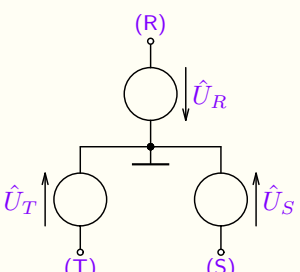
Hodnoty prvků náhradního modelu lze zjistit z katalogových údajů výrobce daného prvku nebo měřením (např. rezonančního kmitočtu, ...). Při použití každého typu prvku je třeba tyto vlastnosti brát v úvahu a samozřejmě dodržet další limity, např.: maximální napětí kondenzátoru, proud cívky napětí a výkonové zatížení odporu. Podrobnější rozbor vlastností, typů a použití základních prvků a přesahuje rámec tohoto materiálu/kurzu.

5.6. Vícefázové obvody v HUS

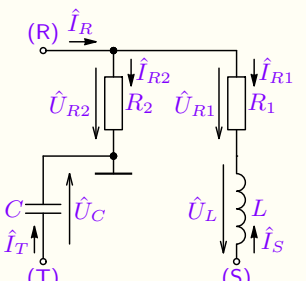
Pokud je obvod napájen z více harmonických zdrojů **stejného kmitočtu**, lze ho řešit pomocí uvedené symbolicko-komplexní metody (tj. fázorů a v oboru komplexních čísel). Postup uvedeme na příkladu trojfázové soustavy.

Příklad 5.12 *Trojfázová soustava*

Zadání: Vypočítejte všechny výkony a obvodové veličiny obvodu (b), který je připojen k třífázové soustavě zdrojů uvedené na obrázku (a), pokud jsou zadány níže uvedené hodnoty prvků. Nakonec definujte zdrojovou soustavu nikoli pomocí uvedených fázových napětí, ale pomocí napětí sdružených.



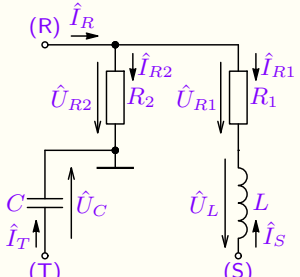
(a)



(b)

$$u_R(t) = 230\sqrt{2}\sin(\omega t)\,\mathrm{V},$$
$$u_S(t) = 230\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \tfrac{2}{3}\pi\right)\mathrm{V},$$
$$u_T(t) = 230\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \tfrac{2}{3}\pi\right)\mathrm{V},$$
$$\omega = 2\pi f = 2\pi 50,$$
$$R_1 = 200\,\Omega,\ L = 1\,\mathrm{H},$$
$$R_2 = 100\,\Omega,\ C = 10\,\mu\mathrm{F}.$$

Řešení: Nejprve vyjádříme a pak určíme požadované veličiny. Fázory vyjádříme v **efektivních hodnotách** pro následný výpočet výkonů: $\hat{U}_R = 230\,\mathrm{V}$, $\hat{U}_S = 230\mathrm{e}^{-j\frac{2}{3}\pi}\,\mathrm{V}$, $\hat{U}_T = 230\mathrm{e}^{j\frac{2}{3}\pi}\,\mathrm{V}$. Sdružené napětí $\hat{U}_{RS}$ je pak: $\hat{U}_{RS} = \hat{U}_R - \hat{U}_S = 230\sqrt{3}\mathrm{e}^{j\frac{1}{6}\pi}\,\mathrm{V}$ a fázory požadovaných veličin jsou: $\hat{U}_{R_2} = \hat{U}_R = 230\,\mathrm{V}$,



$$\hat{I}_{R_2} = \frac{\hat{U}_R}{R_2} = 2{,}3\,\mathrm{A}, \quad \hat{I}_{R_1} = -I_S = \frac{\hat{U}_{RS}}{R_1 + j\omega L} \doteq 1{,}07\mathrm{e}^{-j0{,}48}\,\mathrm{A},$$

$$\hat{U}_{R_1} = \hat{I}_{R_1} R_1 \doteq 214\mathrm{e}^{-j0{,}48}\,\mathrm{V}, \quad \hat{U}_L = \hat{I}_{R_1} j\omega L \doteq 336\mathrm{e}^{j1{,}09}\,\mathrm{V},$$

$$\hat{I}_R = \hat{I}_{R_1} + \hat{I}_{R_2} \doteq 3{,}286\mathrm{e}^{-j0{,}151}\,\mathrm{A}, \quad \hat{I}_T = \hat{U}_T j\omega C \doteq 0{,}723\mathrm{e}^{-j2{,}62}\,\mathrm{V}.$$

Na základě fázorů pak lze vyjádřit časové funkce uvedených veličin:

$$i_{R_1}(t) = 1{,}07\sqrt{2}\sin(\omega t - 0{,}48)\,\mathrm{A}, \quad u_L(t) = 336\sqrt{2}\sin(\omega t + 1{,}09)\,\mathrm{V}, \ \ldots$$

Výkony lze určit např. z výkonů jednotlivých prvků, přičemž $I_T = |\hat{I}_T|$, atd. jsou efektivní hodnoty. Dle (5.20), (5.21) a (5.21) platí:

$$Q_C = -X_C I_T^2 = -\frac{I_T^2}{\omega C} \doteq -166\,\mathrm{var}, \quad Q_L = I_{R_1}^2 \omega L \doteq 359{,}5\,\mathrm{var},$$

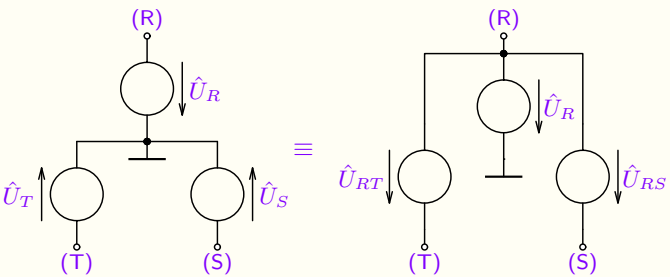
$$P_{R_1} = R_1 I_{R_1}^2 \doteq 229\,\mathrm{W}, \qquad P_{R_2} = R_2 I_{R_2}^2 \doteq 529\,\mathrm{W},$$

$$P = P_{R_1} + P_{R_2} \doteq 758\,\mathrm{W}, \qquad Q = Q_C + Q_L \doteq 193\,\mathrm{var}, \qquad S = \sqrt{P^2 + Q^2} \doteq 782\,\mathrm{VA}$$

Výkony lze určit i z výkonů jednotlivých zdrojů. Dle (5.16) až (5.19) platí:

$$\hat{S} = \hat{U}_R\hat{I}_R^* + \hat{U}_S\hat{I}_S^* + \hat{U}_T\hat{I}_T^* \doteq 758 + j193\,\text{VA}, \quad P = \Re\{\hat{S}\}, \quad Q = \Im\{\hat{S}\}, \quad S = |\hat{S}| \doteq 782\,\text{VA}.$$

Uvedená třífázová soustava se používá v tuzemské rozvodné síti elektrické energie. Lze ji sestavit i ze dvou sdružených napětí, např. $\hat{U}_{RS}$ a $\hat{U}_{RT}$, jak uvádí následující obrázek, kde $\hat{U}_{RS} = \hat{U}_R - \hat{U}_S = 230\sqrt{3}\mathrm{e}^{j\frac{1}{6}\pi}$ V jak bylo uvedeno a $\hat{U}_{RT} = \hat{U}_R - \hat{U}_T = 230\sqrt{3}\mathrm{e}^{-j\frac{1}{6}\pi}$ V. Pokud je vyžadován společný vodič, je nutné přidat zdroj $\hat{U}_R$, potvrzení viz analýzu.

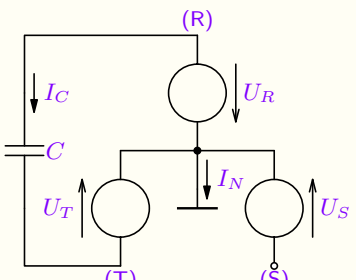


Použitý postup platí pouze pro zdroje shodného kmitočtu. Pouze tehdy lze provádět matematické operace fázorů veličin příslušejících k různým zdrojům. Pokud by signály jednotlivých zdrojů měly různé kmitočty nebo by zdroj obsahoval signály o různých kmitočtech, lze komplexně-symbolickou metodu použít, ale odděleně vždy pro daný kmitočet (vychází z metody superpozice pro lineární obvody) a provádět operace fázorů příslušejících pouze k signálům stejných kmitočtů, jak uvádí následující kapitola.

Na závěr této kapitoly je uveden specifický případ nesouměrně zatížené třífázové sítě kapacitní zátěží.

Příklad 5.13 *Trojfázová soustava s nesymetrickou kapacitní zátěží.*

Zadání: Vypočítejte výkony jednotlivých fázových zdrojů i celkově dodávané v následujícím příkladu, pokud $C = 8\,\mu\text{F}$, $u_R(t) = 230\sqrt{2}\sin(\omega t)\,\text{V}$, $u_T(t) = 230\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right)\,\text{V}$, $\omega = 2\pi f = 2\pi 50$.



Řešení: Opět vyjádříme fázory jednotlivých veličin v **efektivních hodnotách** pro následný výpočet výkonů: $\hat{U}_R = 230\,\text{V}$, $\hat{U}_T = 230\text{e}^{j\frac{2}{3}\pi}\,\text{V}$ a sdružené napětí $\hat{U}_{RT} = \hat{U}_R - \hat{U}_T = 230\sqrt{3}\text{e}^{-j\frac{1}{6}\pi}\,\text{V}$. Následně platí:

$$\hat{I}_C = \hat{I}_R = -\hat{I}_T = \hat{U}_{RT} j\omega C \doteq 1\text{e}^{j\frac{1}{3}\pi}\,\text{V} \quad \Rightarrow \quad \hat{I}_N = 0,$$

$$Q_C = -X_C I_C^2 = -\frac{I_C^2}{\omega C} \doteq -399\,\text{var},$$

$$\hat{S}_R = \hat{U}_R \hat{I}_R^* \doteq 115 - j199{,}4\,\text{VA}, \quad \hat{S}_T = \hat{U}_T \hat{I}_T^* \doteq -115 - j199{,}4\,\text{VA}$$

Komentář: Je zřejmé, že celkový výkon má pouze jalovou složku $\hat{S} = \hat{S}_R + \hat{S}_T = jQ_C \doteq -j399\,\text{VA}$, jelikož v obvodu není žádný prvek, který spotřebovává energii. Fázové zdroje U_R a U_T však vykazují i reálnou část, tj. nenulové činné výkony opačných znamének. Pokud není spotřeba energie měřena tzv. obousměrným (4-kvadrantovým) elektroměrem, bude v tomto případě měřený odběr $230\,\text{W}$!

Situace z příkladu 5.13 se může vyskytnout i v praxi u spotřebičů, zapojených pouze na dvě fáze = jedno sdružené napětí. Jalový výkon nevede sám o sobě ke ztrátám energie, ale ztráty způsobuje v rozvodné síti, jak bylo uvedeno na straně V-19. Z tohoto důvodu je třeba tuto stituaci řešit, jak ukazuje obrázek 5.4 pro indukční zátěž.

Pro rozvodnou síť je dále třeba symetrizovat zatížení jednotlivých fází, případně zatěžovat sdružená napětí (tzv. „zapojení do trojúhelníku“). Tím je minimalizován proud nulovým vodičem. Čtenář si jistě uvědomil, že v případě příkladu 5.13 neteče nulovým vodičem žádný proud, tj. $I_N = 0$, čímž není zatěžován. To je platí i v případě shodně zatěžovaných fází odporovými zátěžemi (činnými výkony). Pokud jsou amplitudy proudů jednotlivých fázových zdrojů shodné, tak vzhledem k fázovým posunům fázových napětí (tj. i jejich proudů vzhledem k odporové zátěži) platí $i_R(t) + i_S(t) + i_T(t) = 0$, což vede na $i_n = 0$.

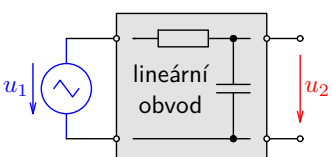
Vzhledem k zaměření tohoto materiálu, musím však zájemce o silnoproudou techniku odkázat na příslušnou literaturu.

Poznámky V

Kapitola 6

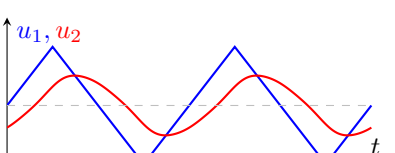
Periodický neharmonický ustálený stav (PNUS)

Tato kapitola ukazuje využití symbolicko-komplexní metody analýzy lineárních obvodů buzených harmonickým signálem pro výpočet ustálené časové odezvy takovýchto obvodů, které jsou však buzeny periodickým neharmonickým signálem, tj. např. trojúhelníkovým nebo obdélníkovým signálem. Uživatel se naučí používat známý nástroj pro další kategorii obvodů, jejichž řešení vede v časové oblasti na řešení diferenciálních rovnic. Touto metodou lze dospět k výsledku jednoduchým a známým postupem. V závěru této kapitoly jsou stručně definovány kvalitativní parametry obvodů a signálů.



$$u_1(t) = 1 + \tfrac{8}{\pi^2}\sin(\omega_1 t) - \tfrac{8}{9\pi^2}\sin(3\omega_1 t) + \dots$$

$$u_2(t) \doteq 1 + A_1\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\sin(3\omega_1 t + \varphi_2) + \dots$$





6.1. Analýza obvodů v periodickém neharmonickém ustáleném stavu (PNUS)

Periodický neharmonický ustálený stav je takový stav obvodu, kdy obvodové veličiny mají periodický (neharmonický) ustálený časový průběh. U lineárních obvodů nastává při buzení obecným periodickým signálem, např. při současném buzení několika sinusovými signály o různých kmitočtech. Může vznikat u nelineárních obvodů, které jsou buzeny harmonickým signálem (usměrňovač), u relaxačních oscilátorů, ...

Analýza lineárních obvodů v PNUS

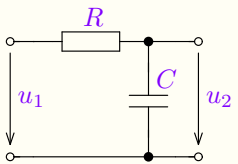
V dalším textu se budeme zabývat analýzou pouze lineárních obvodů, u kterých **platí princip superpozice**. Vzhledem k tomu, že každý periodický signál lze rozložit pomocí Fourierovy řady na součet harmonických složek (viz např. wikipedia, případně zde), lze využít známé metody analýzy HUS a pomocí symbolicko-komplexní metody (fázorů) analyzovat každou harmonickou složku zvlášť. Výslednou veličinu pak dle principu superpozice získáme jako součet všech **časových** odezev.

Pozor, nelze provádět matematické operace s fázory, které přísluší různým kmitočtům! Analýzu ukážeme na příkladu.

Příklad 6.1

Zadání: Určete časový průběh výstupního napětí $u_2(t)$ integračního článku dle obrázku, pokud jsou dány hodnoty prvků a vstupní napětí ve formě:

$$u_1(t) = 1 + \frac{8}{\pi^2}\sin(4000\,\pi\,t) - \frac{8}{9\pi^2}\sin(12000\,\pi\,t) + \frac{8}{25\pi^2}\sin(20000\,\pi\,t).$$



$R = 1\,\mathrm{k\Omega}$,
$C = 100\,\mathrm{nF}$.

Řešení: Vzhledem k tomu, že obvod je lineární, lze použít princip superpozice a vypočítat výstupní signál $u_2(t)$ jako součet odezev $u_{2_k}(t)$ na jednotlivé harmonické složky vstupního napětí:

$$u_1(t) = \sum_k u_{1_k}(t), \quad \text{pro} \quad k = [0,\,1,\,3,\,5],$$

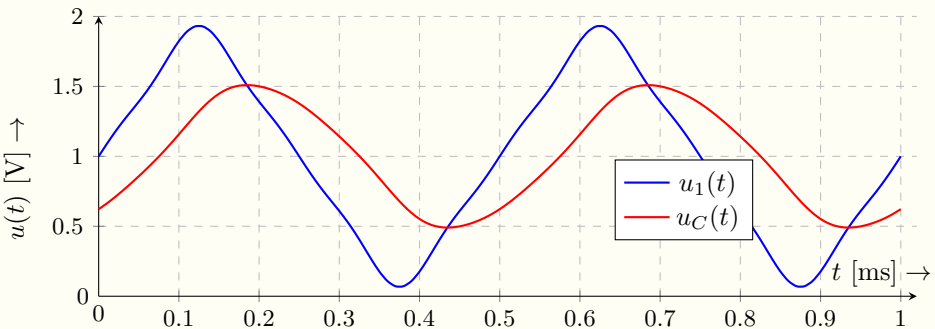
kde $u_{1_0}(t) = 1$, $u_{1_1}(t) = U_{1m_1}\sin(2\pi f_1 t) = \frac{8}{\pi^2}\sin(2\pi 2000\,t)$,
$u_{1_3}(t) = U_{1m_3}\sin(2\pi f_3 t) = U_{1m_3}\sin(2\pi 3 f_1 t) = \frac{8}{9\pi^2}\sin(2\pi 6000\,t)$ a
$u_{1_5}(t) = U_{1m_5}\sin(2\pi f_5 t) = U_{1m_5}\sin(2\pi 5 f_1 t) = \frac{8}{25\pi^2}\sin(2\pi 10000\,t)$.

Fázory jednotlivých složek výstupního napětí určíme stejně jako v příkladu 5.6, tj. dle vztahu (5.21), resp. (5.22) příkladu 5.5 předchozí kapitoly. Pro výše uvedené dostáváme pro absolutní hodnoty a fáze vstupního napětí, kmitočtové charakteristiky a výstupního napětí následující hodnoty:

k	U_{1m_k} [V]	φ_{1_k} [rad]	H_k	φ_{H_k} [rad]	U_{2m_k} [V]	φ_{2_k} [rad]
0	1	0	1	0	1	0
1	0,8106	0	0,6227	−0,8986	0,5047	−0,8986
3	90,06 m	π	0,2564	−1,312	23,09 m	1,830
5	32,42 m	0	0,1572	−1,413	5,096 m	−1,413

První ($\omega = 0$) člen je stejnosměrný posun (konstanta), pro který je kmitočtová charakteristika rovna 1, tj, výstupní napětí je v ustáleném stavu shodné se vstupním napětím. Další složky se příslušně změní, jak udává tabulka. Výstupní napětí je pak dáno:

$$u_2(t) \doteq 1 + 0{,}5047\,\sin(\omega_1\,t - 0{,}8986) + 0{,}02309\,\sin(3\omega_1\,t + 1{,}830) + \\ + 0{,}005096\,\sin(5\omega_1\,t - 1{,}413)\,\mathrm{V},\ \text{kde}\ \omega_1 = 2\pi f_1.$$



Obrázek 6.1: Časový průběh vstupního $u_1(t)$ a výstupního $u_C(t)$ napětí v ustáleném stavu.

Vstupní napětí obsahuje prvních 5 členů Fourierovy řady rozvoje trojúhelníkového signálu[a]. Výstupní napětí má více potlačeny vyšší harmonické, proto více odpovídá sinusovému průběhu (první harmonické). Pokud by byl použit kmitočtový filtr s vyšším útlumem v oblasti vyšších kmitočtů, dostali bychom výstupní napětí s menším zkreslením. Další možnosti analýzy viz v příkladu 7.5.

[a] Výpočet koeficientů Fourierovy řady nejen trojúhelníkového průběhu např. zde.

6.2. Výkony v obvodech periodického neharmonického ustáleného stavu

Z kapitoly 1 připomeňme vztah pro výpočet efektivní hodnoty periodického signálu:

$$I_{\mathrm{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} i^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

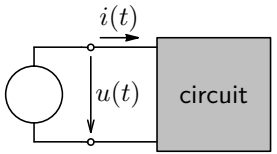
Efektivní hodnota periodické veličiny

Pro periodický signál vyjádřený rozvojem do fourierovy řady $i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{mk}\sin(k\omega_0 t + \varphi_k)$ lze pak dosazením do výše uvedeného vztahu odvodit efektivní hodnotu ve tvaru:

$$I = \sqrt{I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{I_{mk}^2}{2}} = \sqrt{I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k^2} \tag{6.1}$$

Kvadrát efektivní hodnoty periodického průběhu je tedy dán součtem kvadrátů efektivních hodnot jednotlivých harmonických. **Pozor, stejnosměrná hodnota je zároveň efektivní hodnotou této složky na rozdíl od amplitudy složky harmonické!** Viz také experiment.

Uvažujme obvod napájený zdrojem, který dodává napětí a proud periodického průběhu:



$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{mk} \sin(k\omega_0 t + \varphi_{U_k})$$

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{mk} \sin(k\omega_0 t + \varphi_{I_k})$$

Výkony lze pak určit podobně jako v případě HUS:

Výkony v PNUS

- **Činný výkon** je výkon převedený v obvodu (např. na rezistorech) na teplo. Jednotkou je Watt [W].

$$P = 1/T \int_0^T u(t)i(t)\,\mathrm{d}t = \cdots =$$

$$= U_0 I_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} U_{m_k} I_{m_k} \cos(\varphi_{U_k} - \varphi_{I_k}) = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos(\varphi_k)\ [\mathrm{W}] \quad (6.2)$$

Výkony v PNUS

- **Jalový výkon**

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin(\varphi_{U_k} - \varphi_{I_k}) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin(\varphi_k) \text{ [var]} \tag{6.3}$$

- **Zdánlivý výkon**

$$S = UI = \sqrt{\left(U_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k^2\right)\left(I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k^2\right)} \text{ [VA]} \tag{6.4}$$

V případě obecného periodického ustáleného stavu, kdy obvodové veličiny nemají harmonický charakter, neplatí relace $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$, ale obecně je $S^2 \geq P^2 + Q^2$. Z tohoto důvodu se definuje tzv. deformační výkon jako:

$$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} \text{ [VA]} \tag{6.5}$$

a zdánlivý výkon pak je:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2 + D^2}.$$

Příklad 6.2

Zadání: Určete výkony v obvodu z předcházejícího příkladu 6.1.

Řešení: Výkony určíme podle výše uvedených relací ze znalosti napětí zdroje a jeho proudu $i(t)$, přičemž fázory jeho jednotlivých harmonických složek určíme ze vztahu $\hat{I}_k = \dfrac{\hat{U}_{1_k}}{\hat{Z}_k}$, kde $\hat{Z}_k = R + \dfrac{1}{jk\omega_0 C}$:

k	U_{1m_k} [V]	φ_{1_k} [rad]	Z_k [kΩ]	φ_{Z_k} [rad]	I_{m_k} [μA]	φ_{I_k} [rad]
0	1	0	∞	π	0	$-\pi$
1	0,8104	0	1,278	−0,6723	634,1	0,6723
3	90,05 m	π	1,035	−0,2594	87,03	−2,882
5	32,42 m	0	1,013	−0,1579	32,02	0,1578

Efektivní hodnoty napětí $u_1(t)$ a proudu $i(t)$ určíme dle vztahu 6.1:

$$U_1 = \sqrt{1^2 + \frac{0{,}8104^2}{2} + \frac{0{,}09005^2}{2} + \frac{0{,}03242^2}{2}} = 1{,}1546 \text{ [V]},$$

$$I = \sqrt{0^2 + \frac{0{,}6341^2}{2} + \frac{0{,}08703^2}{2} + \frac{0{,}03202^2}{2}} = 0{,}4533 \text{ [mA]}.$$

Výkony pak dle vztahů (6.2), (6.3), (6.4) jsou:

$$P = U_{1_0} I_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{5} U_{1m_k} I_{m_k} \cos(\varphi_{U_{1_k}} - \varphi_{I_k}) =$$

$$= 1 \cdot 0 + 0{,}20114 \cdot 10^{-3} + 3{,}79 \cdot 10^{-6} + 5{,}1 \cdot 10^{-7} = 0{,}2054 \text{ [mW]},$$

$$Q = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{5} U_{1m_k} I_{m_k} \sin(\varphi_{U_{1_k}} - \varphi_{I_k}) = -0{,}1601 \cdot 10^{-3} - 1{,}01 \cdot 10^{-6} - 8 \cdot 10^{-8} = -0{,}1611 \text{ [mvar]}$$

$$S = U_1 I_1 = 1{,}1546 \cdot 0{,}4533 \cdot 10^{-3} = 0{,}5233 \text{ [mVA]}$$

$$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} = 0{,}2622 \text{ [mVA]}$$

Výkony lze stanovit i pomocí součtu výkonů jednotlivých prvků jako v případě HUS, tj. činný výkon lze určit jako součet výkonů jednotlivých harmonických složek na rezistorech a jalový výkon jako součet výkonů všech harmonických složek na induktorech a kapacitorech (se záporným znaménkem), v našem případě tedy:

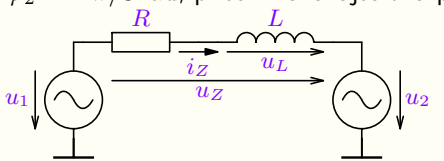
$$P = \sum_{k=0}^{5} U_{R_k} I_k, \quad Q = \sum_{k=1}^{5} -U_{C_k} I_k, \quad \text{kde} \quad I_k = \frac{I_{m_k}}{\sqrt{2}} \quad \text{pro } k \geq 1$$

Viz také analýzu z předchozího příkladu.

Následující příklad demonstruje použití výše uvedeného postupu pro výpočet ustálené časové odezvy obvodu buzeného harmonickými zdroji.

Příklad 6.3

Zadání: Určete proud $i_z(t)$ tekoucí obvodem a napětí na induktoru $u_L(t)$ následujícího obvodu, pokud je zadáno $R = 100\,\Omega$, $L = 0{,}1\,\mathrm{H}$, $u_1 = 2 - 1\sin(2\pi f_1 t)\,[\mathrm{V}]$, $f_1 = 1\,\mathrm{kHz}$ a $u_2 = 2\sin(2\pi f_2 t + \varphi_2)\,[\mathrm{V}]$, $\varphi_2 = -\pi/3\,\mathrm{rad}$, přičemž uvažujte dva případy: (a) $f_2 = f_1$ a (b) $f_2 = 2{,}5\,\mathrm{kHz}$.



Řešení: Vzhledem ke stejnosměrné složce zdroje u_1 je v obou případech nutné použít superpozici (jedná se o lineární obvod) časových funkcí (PNUS). V případě (a) lze sčítat přímo fázory jako příspěvky střídavých složek jednotlivých zdrojů:

$$\hat{U}_1 = 1\mathrm{e}^{j\pi}, \quad \hat{U}_2 = 2\mathrm{e}^{-j\pi/3}, \quad f_1 = f_2 \;\Rightarrow\; \hat{U}_{za} = \hat{U}_1 - \hat{U}_2 \doteq -2 + 1{,}73j \doteq 2{,}65\mathrm{e}^{j2{,}43}\,\mathrm{V}, \tag{6.6}$$

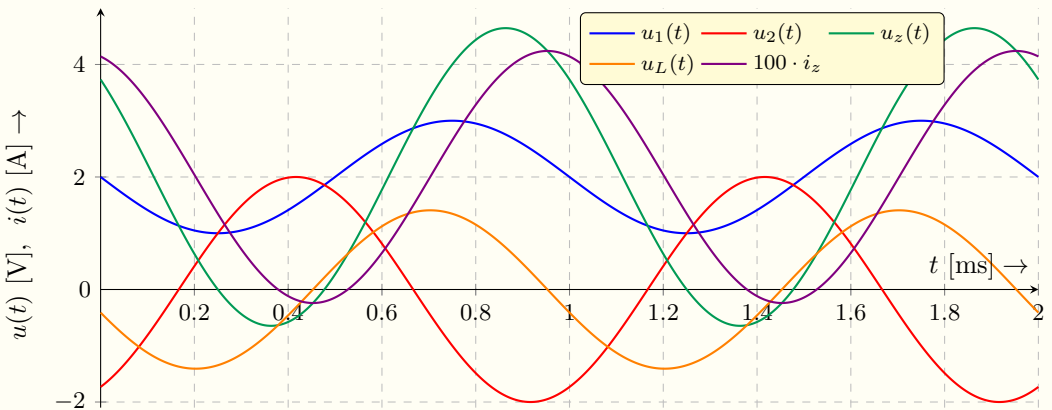
$$\hat{Z}_a = R + j\omega L|_{f=f_1} \doteq 100 + 63j \doteq 118\mathrm{e}^{j0{,}56}\,\Omega, \quad \hat{I}_{za} = \frac{\hat{U}_{za}}{\hat{Z}_a} \doteq -6{,}54 + 21{,}43j \doteq 22{,}4\mathrm{e}^{j1{,}87}\,\mathrm{mA}, \tag{6.7}$$

$$\hat{U}_{La} = j\omega L\hat{I}_{za}|_{f=f_1} \doteq -1.35 - 0{,}41j \doteq 1{,}41\mathrm{e}^{-j2{,}85}\,\mathrm{V}. \tag{6.8}$$

Dále určíme příspěvky od stejnosměrné složky zdroje u_1 a nakonec časové průběhy požadovaných veličin:

$$I_{z0} = \frac{U_{10}}{R} = \frac{2}{100} = 20\,\text{mA},\ i_{za}(t) = 20 + 22{,}4\sin(2\pi f_1 t + 1{,}87)\,\text{mA},\ u_{La}(t) = 1{,}41\sin(2\pi f_1 t - 2{,}85)\,\text{V}.$$

Vzhledem k tomu, že pro stejnosměrnou složku $\omega \to 0$, resp. $u_L(t) = \frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$, je $U_{L0} = 0$.



Obrázek 6.2: Časové průběhy obvodových veličin v ustáleném stavu pro případ (a), tj. $f_1 = f_2$.

Pro $f_1 \neq f_2$ (b) je třeba určit fázory obvodových veličin zvlášť pro oba kmitočty, opět pomocí metody superpozice:

$$\hat{Z}_{b1} = R + j\omega L|_{f=f_1} = \hat{Z}_{a1}, \quad \hat{Z}_{b2} = R + j\omega L|_{f=f_2} \doteq 100 + 157j \doteq 186\mathrm{e}^{j}\,\Omega, \tag{6.9}$$

$$\hat{U}_{zb1} = \hat{U}_1|_{u_2=0}, \quad \hat{U}_{zb2} = -\hat{U}_2|_{u_1=0}, \quad u_{zb}(t) = 2 - 1\sin(2\pi f_1 t) - 2\sin(2\pi f_2 t - \pi/3)\,[\mathrm{V}] \tag{6.10}$$

$$\hat{I}_{zb1} = \frac{\hat{U}_{zb1}}{\hat{Z}_{b1}} \doteq -7{,}17 + 4{,}5j \doteq 8{,}47\mathrm{e}^{j2{,}58}\,\mathrm{mA}, \quad \hat{I}_{zb2} = \frac{\hat{U}_{zb2}}{\hat{Z}_{b2}} \doteq 4{,}96 + 9{,}53j \doteq 10{,}7\mathrm{e}^{j1{,}1}\,\mathrm{mA}, \tag{6.11}$$

$$\hat{U}_{Lb1} = j\omega L\hat{I}_{zb1}|_{f=f_1} \doteq -0.28 - 0{,}45j \doteq 0{,}53\mathrm{e}^{-j2{,}13}\,\mathrm{V}, \tag{6.12}$$

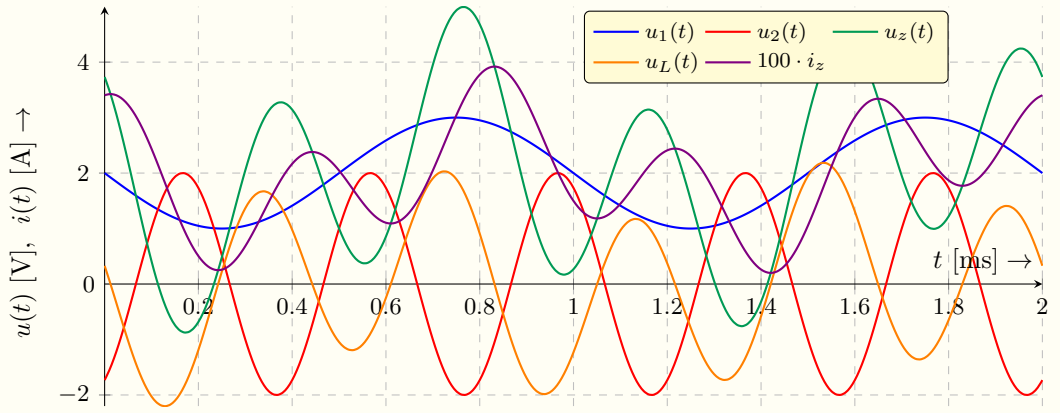
$$\hat{U}_{Lb2} = j\omega L\hat{I}_{zb2}|_{f=f_2} \doteq -1.5 + 0{,}78j \doteq 1{,}69\mathrm{e}^{j2{,}66}\,\mathrm{V}. \tag{6.13}$$

Nyní již lze sestavit vztahy pro časové funkce požadovaných obvodových veličin, přičemž je nutné vzít v úvahu i stejnosměrné složky. Ty se samozřejmě s kmitočtem nemění a výsledné vztahu jsou následující:

$$i_{zb}(t) = 20 + 8{,}48\sin(2\pi f_1 t + 2{,}58) + 10{,}7\sin(2\pi f_2 t + 1{,}1)\,\mathrm{mA}, \tag{6.14}$$

$$u_{Lb}(t) = 0{,}53\sin(2\pi f_1 t - 2{,}13) + 1{,}69\sin(2\pi f_2 t + 2{,}66)\,\mathrm{V}. \tag{6.15}$$

Následuje grafické vyjádření určených obvodových veličin.



Obrázek 6.3: Časové průběhy obvodových veličin v ustáleném stavu pro případ (b), tj. $f_1 \neq f_2$.

Na rozdíl od případu (a), kde byly všechny veličiny harmonické s nebo bez stejnosměrné složky, jsou zde výsledné obvodové veličiny (i_z a u_L) neharmonické – obsahují harmonické složky rozdílných kmitočtů, které je třeba pomocí symboliko-komplexní metody určit zvlášť, jak bylo ukázáno. Viz také analýzu.

6.2.1. Kvalitativní parametry obvodů a signálů

Obvody, resp. signály v periodickém ustáleném stavu lze charakterizovat parametry jako je např. činitel tvaru:

$$k_v = \frac{I_{\mathrm{RMS}}}{I_0}, \quad \text{kde} \quad I_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} i(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{je střední hodnota střídavého průběhu,} \tag{6.16}$$

případně další (činitel výkyvu a plnění). Jedná se o parametry užívané zejména v silnoproudé technice, viz např. [3].

Nelineární harmonické zkreslení (THD)

Tzv. činitel harmonického zkreslení je z anglického "Total Harmonic Distortion" (THD) a udává se v [%] nebo [dB]. Vyjadřuje poměr výkonu vyšších harmonických periodického průběhu k výkonu první harmonické nebo celkovému výkonu signálu:

$$\mathrm{THD_F} = \frac{P_2 + P_3 + \cdots}{P_1} = \frac{\sqrt{U_2^2 + U_3^2 + \cdots}}{U_1}, \quad \mathrm{THD_R} = \sqrt{\frac{\sum_{k=2}^{\infty} U_k^2}{\sum_{k=1}^{\infty} U_k^2 = U_{\mathrm{RMS}}^2}} = \frac{\mathrm{THD_F}}{\sqrt{1+\mathrm{THD_F^2}}}, \tag{6.17}$$

kde označení $\mathrm{THD_F}$ vychází z anglického "fundamental"a $\mathrm{THD_R}$ z "root mean square", přičemž U_k je efektivní hodnota k-té harmonické a $k = 1$ je základní (fundamental) harmonická složka. Výpočet harmonických složek je založen na zmíněné Fourierově řadě, resp. výpočtu jejich koeficientů, viz např. zde.

Parametr THD se používá např. v audiotechnice, kde vyjadřuje např. kvalitu systému (např. zesilovače). V ideálním případě je zesilovač lineární a odezva na harmonický signál je harmonická a $\mathrm{THD} = 0$. V reálném případě jsou

vlivem zkreslení obsaženy ve výstupním signálu i vyšší harmonické složky, nicméně v malé míře, např. THD $= 0{,}001\,[\%] = -100\,[\mathrm{dB}]$ pro špičkový přístroj. V těchto případech musíme počítat i s vlastním šumem (viz také dodatek K.) a pak se udávají i následující parametry.

Nelineární harmonické zkreslení + šum (THD+N)

THD+N je z anglického Total Harmonic Distortion plus Noise. Parametr je definovaný vztahem (6.18) a lze ho snadno měřit i „analogově" s pomocí pásmové zádrže. Rozšířený je i parametr SINAD, tj. odstup signál/šum a zkreslení (Signal-to-noise and distortion ratio), který je převrácenou hodnotou THD+N a udává se v $[\mathrm{dB}]$.

$$\mathrm{THD{+}N} = \frac{P_{\mathrm{distortion}} + P_{\mathrm{noise}}}{P_{\mathrm{signal}} + P_{\mathrm{distortion}} + P_{\mathrm{noise}}} = \frac{1}{\mathrm{SINAD}} \tag{6.18}$$

Odstup signál šum SNR

SNR je z anglického Signal-to-Noise (S/N) Ratio a udává **výkonový poměr** užitečného signálu jmenovité úrovně P_s k šumovému výkonu P_n v [dB]. O šumu viz dodatek K. Pokud je signál i šum měřen na stejné impedanci, lze SNR vyjádřit z napěťových poměrů užitečného signálu $U_s \equiv U_{\mathrm{signal}}$ a signálu šumového $U_n \equiv U_{\mathrm{noise}}$:

$$\mathrm{SNR} = \frac{P_{\mathrm{signal}}}{P_{\mathrm{noise}}} = \left(\frac{U_{\mathrm{s}}}{U_{\mathrm{n}}}\right)^2, \tag{6.19}$$

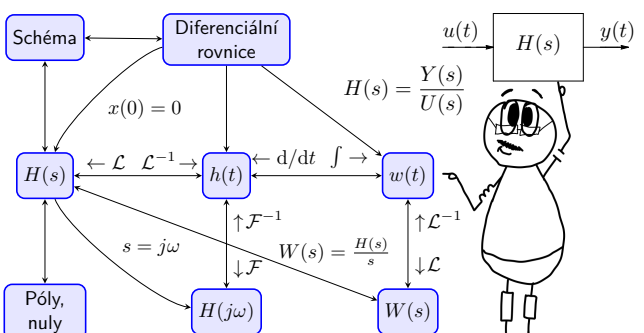
$$\mathrm{SNR_{dB}} = 10\log_{10}\left[\left(\frac{U_{\mathrm{s}}}{U_{\mathrm{n}}}\right)^2\right] = 20\log_{10}\left(\frac{U_{\mathrm{s}}}{U_{\mathrm{n}}}\right). \tag{6.20}$$

Poznámky VI

Kapitola 7

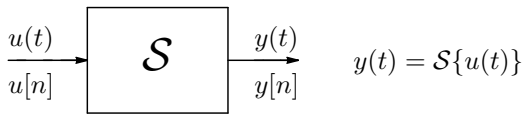
Metody popisu lineárních obvodových systémů

Tato kapitola ukazuje možnosti popisu lineárních, dynamických, časově invariantních systémů. Tím je umožněna analýza vlastností takového systému při znalosti jejich parametrů. Uživatel se seznámí tak se základním vnějším popisem takových systémů, v tomto případě elektrických obvodů, pomocí přenosové funkce $H(s)$. Dozví se o provázanosti matematických nástrojů na jejich analýzu a metodiku si ověří na příkladech elementárních obvodů. Pozornost je věnována základní orientaci v dané problematice, která je nezbytná pro další kapitoly věnující zejména zpětnovazebním systémům a kmitočtovým filtrům.



7.1. Dynamický systém

Systém je abstrakce jakéhokoli „zařízení“ transformujícího vstupní signál(y) na výstupní.



Obrázek 7.1: Symbolické znázornění systému s jedním vstupem a výstupem.

7.1.1. Základní dělení systémů podle charakteru signálů

- spojité – pracují se signály spojitě v čase,
- diskrétní – pracují s diskrétními signály (v diskrétních časových okamžicích),
- číslicové – pracují s čísly (konečným počtem úrovní = kvantovanými hodnotami signálu),

podle jeho vlastností:

- lineární/nelineární (podle převodní charakteristiky, tj. závislosti velikosti výstupního signálu na velikosti signálu vstupního,
- časově invariantní (posunutý vstupní signál $u(t-\tau)$ generuje posunutý výstupní signál $y(t-\tau)$,
- bez paměti/s pamětí.

7.1.2. Klasifikace a popis obvodových modelů se soustředěnými parametry podle rychlosti a velikosti změn obvodových veličin

změny		pomalé	rychlé
	modely	odporové	s akumulačními prvky
malé	lineární	lineární algebraické rovnice s konstantními koeficienty: $\mathbf{a}\mathbf{y}(t) = \mathbf{u}(t)$	obyčejné lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty: $\mathbf{a}\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} + \mathbf{b}\mathbf{y}(t) = \mathbf{u}(t)$
velké	nelineární	nelineární algebraické rovnice: $\mathbf{F}\big(\mathbf{y}(t)\big) = 0$	nelineární obyčejné diferenciální rovnice: $\mathbf{F}\left(\mathbf{y}(t), \frac{d\mathbf{y}(t)}{dt}\right) = 0$
malé i velké	parametrické	lineární algebraické rovnice s časově proměnnými koeficienty: $\mathbf{a}(t)\mathbf{y}(t) = \mathbf{u}(t)$	lineární obyčejné diferenciální rovnice s časově proměnnými koeficienty: $\mathbf{a}(t)\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} + \mathbf{b}(t)\mathbf{y}(t) = \mathbf{u}(t)$

Pro velmi rychlé signály musíme dále uvažovat obvody s rozprostřenými parametry – mimo uvedené veličiny se vyskytují obvodové proměnné závislé na souřadnici $x = \langle 0, l \rangle$ $\mathbf{y}(t,x)$ a derivace podle této souřadnice $\frac{\partial \mathbf{y}(t,x)}{\partial x}$.

7.2. Charakterizace lineárních časově invariantních systémů

Lineární, časově invariantní (LTI) systémy lze charakterizovat následujícími atributy:

Linearita: pokud se zvětší vstupní signál, tak se lineárně zvětší i signál výstupní:

$$y(t) = \mathcal{S}\{u(t)\} \Rightarrow ay(t) = \mathcal{S}\{au(t)\} = a\mathcal{S}\{u(t)\}.$$

Princip superpozice: součet odezev na dílčí složky = celková odezva (vyplývá z linearity)

$$y(t) = \mathcal{S}\{au_1(t) + bu_2(t)\} = y_1(t) + y_2(t) = a\mathcal{S}\{u_1(t)\} + b\mathcal{S}\{u_2(t)\}\,.$$

Časová invariance: vlastnosti systému se nemění s časem

$$y(t - t_0) = \mathcal{S}\{u(t - t_0)\}$$

„Povolené“ funkce LTI systémů:

- součet (rozdíl) signálů,
- zesílení (zeslabení), tj. násobení signálu reálnou konstantou,
- „paměť“ – integrace (derivace) signálu, resp. zpoždění (pro diskrétní systémy).

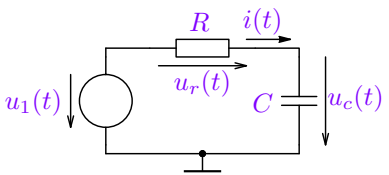
„Nepovolené“ funkce: násobení, dělení, . . . signálů mezi sebou, aplikace nelineární funkce na signál (mocnina, odmocnina, logaritmus, . . . , ale i přičtení konstanty).

7.3. Popis LTI systémů

- Vnější popis – charakterizuje výstupní signál na základě signálu vstupního, vlastností systému a jeho počátečních podmínkách (pro nulové počáteční podmínky tzv. přenosovou funkcí systému).
- Vnitřní, stavový popis – umožňuje popsat i vnitřní (např. stavové) signály systému.

Dále se budeme zabývat převážně vnějším popisem.

Příklad popisu LTI dynamického systému (elektrického obvodu) v časové oblasti. Viz také kapitolu 4.



$$i(t) = \frac{u_r}{R} = \frac{u_1(t) - u_c(t)}{R} = C\frac{\mathrm{d}u_c(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$RC\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + u_c(t) = u_1(t) \qquad (7.1)$$

Obrázek 7.2: Integrační RC článek a jeho popis v časové oblasti.

Pro stejnosměrné buzení $u_1(t) = U_1$ a při $u_c(0) = 0$, bude řešení rovnice

$$RC\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + u_c(t) = U_1 \quad \Rightarrow \quad u_c(t) = U_1(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau_{RC}}), \text{ kde } \tau_{RC} = RC$$

Ve stejnosměrném ustáleném stavu ($t \to \infty$) bude $i(\infty) = I = 0$ a $u_c(\infty) = U_c = U_1$.

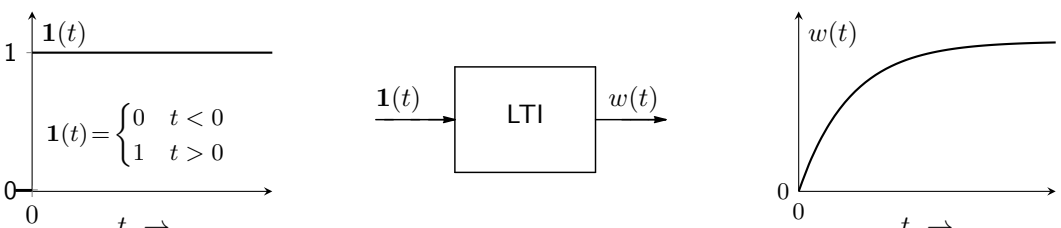
7.3.1. Popis LTI systémů v časové oblasti

Odezva na jednotkový skok – přechodová charakteristika

Pro jednotkový skok $U_1 = \mathbf{1}(t) \equiv \mathrm{Heaviside}(t)$ je řešení rovnice (7.1):

$$w(t) = u_c(t) = 1 - \mathrm{e}^{-t/\tau_{RC}}, \quad t > 0, \tag{7.2}$$

které nazýváme přechodovou charakteristikou[1].



Obrázek 7.3: Přechodová charakteristika LTI systému (1. řádu – integračního RC-článku)

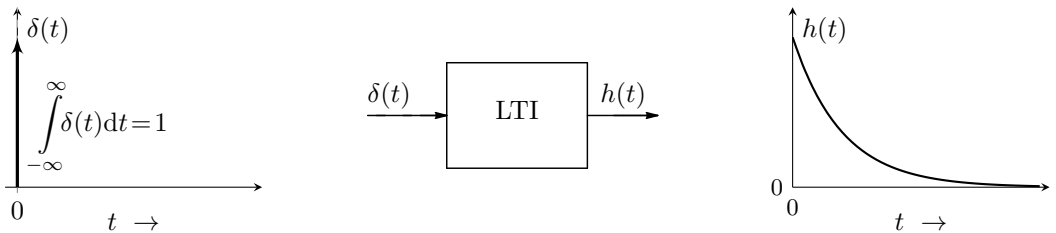
Analýza přechodové i impulzní charakteristiky uvedeného článku v simulátoru GEEC je uvedena zde.

[1] Pro nulové počáteční podmínky systému, v našem případě $u_c(0) = 0$).

Odezva na Diracův pulz – impulzní charakteristika

Pro $u_1(t) = \delta(t)$ (Diracův pulz[2]) a při $u_c(0_-) = 0$, bude řešení rovnice (7.1)

$$h(t) = u_c(t) = \frac{1}{\tau_{RC}} \mathrm{e}^{-t/\tau_{RC}}, \quad t > 0. \tag{7.3}$$



Obrázek 7.4: Impulzní charakteristika LTI systému (1. řádu – integračního RC-článku)

Vztah mezi přechodovou a impulzní charakteristikou:

$$h(t) = \frac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t}, \quad w(t) = \int_{0_-}^{t} h(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{7.4}$$

[2] Např. $\delta_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \text{pro } |t| < \frac{\epsilon}{2}, \\ 0 & \text{pro } |t| > \frac{\epsilon}{2} > 0 \end{cases}$ obdélníkový pulz v $t = 0$ šířky $\epsilon \to 0$ a výšky $1/\epsilon$, tj. pulz jednotkové plochy.

Konvoluce

Spojitý časový průběh $u(t)$ lze přibližně vyjádřit posloupností úzkých obdélníkových pulsů, přičemž výška pulzu v čase $t = \tau$ je $u(t - \tau)$. Pokud šířka pulzu bude v limitním případě $\Delta\tau \to 0$, je pulz v čase $t = \tau$ nahrazen Diracovým pulzem $u(\tau)\delta(t - \tau)$. Signál $u(t)$ je pak dán vztahem

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t - \tau)\mathrm{d}\tau \tag{7.5}$$

a při znalosti impulzní odezvy lze pro vstupní signál $u(t)$ určit výstupní signál:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t - \tau)\mathrm{d}\tau = u(t) * h(t), \tag{7.6}$$

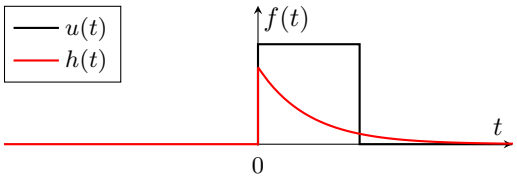
kde integrál je tzv. **konvolučním integrálem**.

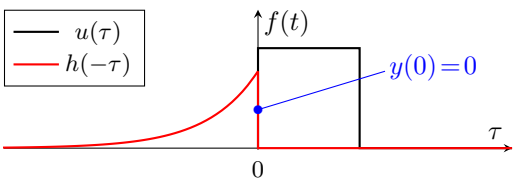
Tento postup samozřejmě vyžaduje:

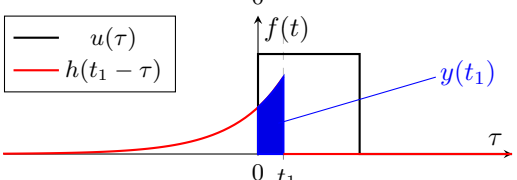
- časovou invarianci – vzhledem k posunu $\delta(t - \tau)$ je posunuta i impulzní odezva $h(t - \tau)$ a
- linearitu systému – vstupní signál $u(\tau)\delta(t - \tau)$ generuje výstupní signál $u(\tau)h(t - \tau)$ a odezvy na jednotlivé vstupní pulzy se sčítají.

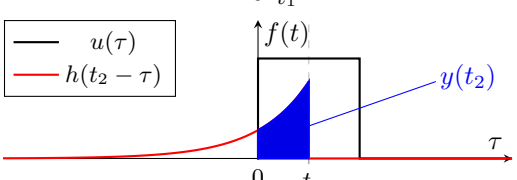
Pro kauzální systém je navíc pro $t < 0$ $h(t) = 0$ a pak $y(t) = \int_{0_-}^{\infty} u(\tau)h(t - \tau)\mathrm{d}\tau$. Grafická ilustrace výpočtu výstupního signálu $y(t) = u_c(t)$ obvodu na vstupní obdélníkový pulz $u(t) = u_1(t)$ pomocí konvoluce je ukázána na následujícím obrázku.

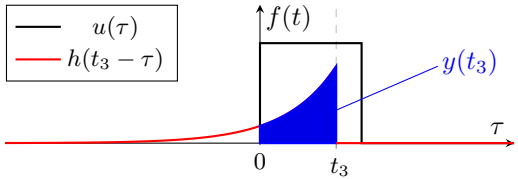
© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

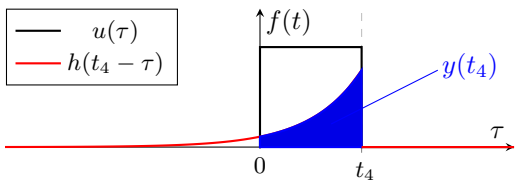


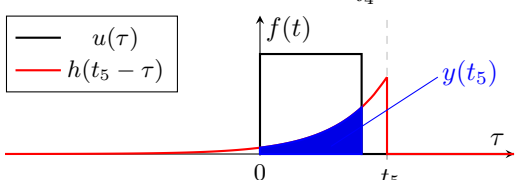


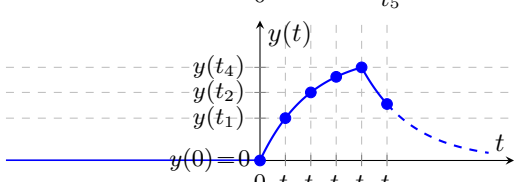












Harmonické buzení a kmitočtová charakteristika

Pro harmonický vstupní signál $u_1(t) = A\sin(\omega t)$ a při $u_c(0) = 0$, bude řešení rovnice (7.1):

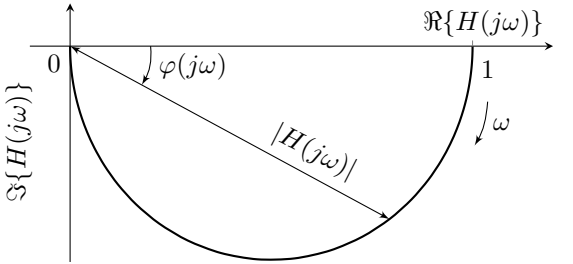
$$u_c(t) = \frac{A\omega\,\tau_{RC}}{\omega^2{\tau_{RC}}^2+1}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_{RC}}} + \frac{A\,\left(-\cos(\omega\,t)\,\omega\,\tau_{RC}+\sin(\omega\,t)\right)}{\omega^2{\tau_{RC}}^2+1} \tag{7.7}$$

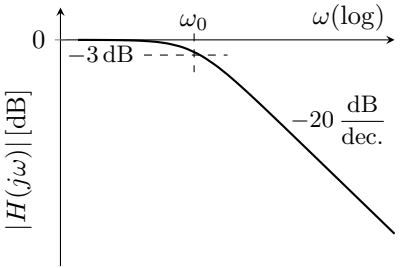
a po odeznění přechodového děje ($t \to 0$) bude mít výstupní napětí $u_c(t)$ harmonický průběh. Ustálené řešení je lépe hledat pomocí komplexně symbolické metody, tj. pomocí fázorů. V harmonickém ustáleném stavu pro $u_1(t) = A\sin(\omega t+\varphi)$, bude odezva harmonická se stejným kmitočtem. Derivace ani součet signálů (a další operace LTI systémů) nemění charakter harmonického signálu (mění se pouze amplituda a fáze), tj. i časový průběh proudu bude harmonický $i(t) = A_I\sin(\omega t+\varphi_I)$. Pak

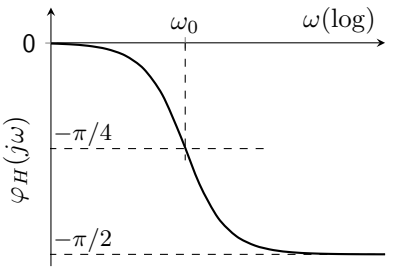
$$U_c(j\omega) = U_1(j\omega)\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}} = U_1(j\omega)\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}} \quad\Longrightarrow\quad H(j\omega) = \frac{U_c(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}, \tag{7.8}$$

kde $U_1(j\omega) = Ae^{j\varphi}$ je fázor vstupního harmonického signálu a $\omega_0 = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau_{RC}}$ je zlomovým kmitočtem tzv. **kmitočtové charakteristiky** $H(j\omega)$. Tu získáme jako podíl fázorů výstupního ku vstupního signálu v závislosti na kmitočtu, jak uvádí kapitola 5.4 (porovnej 7.8 s 5.26) nebo jak uvidíme dále, přechodem od Laplaceova přenosu k Fourierovým obrazům substitucí $s = j\omega$, viz obrázek 8.14. Tuto substituci lze provést pouze pro stabilní systémy a za dalších podmínek, viz [15]. Tím jsme však přešli od popisu v časové oblasti k popisu v oblasti kmitočtové/frekvenční, resp. obrazové, jak bude uvedeno dále. Viz také ukázku analýzy v GEEC.

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|\mathrm{e}^{j\varphi_H(j\omega)}$$







Obrázek 7.5: Kmitočtová charakteristika (závislost poměru fázorů výstupního a vstupního signálu na kmitočtu) v komplexní rovině (hodograf) a jako modulová a fázová chrakteristika pro LTI 1. řádu (integračního RC-článku).

7.3.2. Popis LTI systémů v obrazové oblasti

Jak je patrné z minulé podkapitoly, není kmitočtová charakteristika již popisem vlastností systému čistě v časové oblasti, ale jedná se o oblast kmitočtovou. Obecněji lze popsat LTI systém v tzv. obrazové oblasti, ze které jsou pak patrné jak kmitočtové, tak časové vlastnosti systému.

Zjednodušeně je derivace, resp. integrál v HUS nahrazena násobením, resp. dělením členem $j\omega$. Tzv. Laplaceova transformace (LT) transformuje derivaci časové funkce na násobení obrazu funkce operátorem s, tj. převádí lineární diferenciální rovnice na algebraické:

$$i_c(t) = C\frac{\mathrm{d}u_c(t)}{\mathrm{d}t}, \quad I_c(j\omega) = j\omega C U_c(j\omega) \quad \Rightarrow \quad I_c(s) = sCU_c(s). \tag{7.9}$$

Pro obecnou funkci $f(t)$ platí pro její Laplaceův obraz $F(s)$ (transformaci) níže uvedený vztah spolu s předpisem pro nalezení předmětu $f(t)$ z Laplaceova obrazu $F(s)$ (zpětnou transformaci):

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t, \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s, \tag{7.10}$$

přičemž funkce $f(t)$ musí být (částečně) spojitá na intervalu $\langle 0, \infty)$, absolutně integrovatelná a pro komplexní s platí: $\lim\limits_{t\to\infty} |f(t)|e^{-st} = 0$, více viz [20, 15].

Na základě tohoto popisu je definován tzv. **přenos (přenosová funkce)** $H(s)$ **LTI systému** jako poměr Laplaceových obrazů výstupního a vstupního signálu **při nulových počátečních podmínkách**. V našem případě je

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{U_c(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{1 + s\tau_{RC}} \tag{7.11}$$

Pokud známe obraz vstupního signálu a přenos, lze snadno určit i obraz výstupního signálu $Y(s) = U(s) \cdot H(s)$. Časovou funkci pak dostaneme pomocí zpětné (inverzní) transformace. Pro převod z časové oblasti do obrazové a zpět lze mimo definiční vztahy 7.10 s výhodou použít SW nástroje (matematické programy) případně slovníky LT, které jsou uvedeny v následujících tabulkách. Z nich je i zřejmé objasnění uvedených skutečností.
Obraz Diracova pulzu je $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$, z čehož vyplývá, že přenos je obraz impulzní charakteristiky $h(t) = \mathcal{L}\{1 \cdot H(s)\}$ a je zřejmá jedna z velmi důležitých vlastností LT, tj. obraz konvoluce:

$$\boxed{\mathcal{L}\{u(t) * h(t)\} = U(s) \cdot H(s)} \tag{7.12}$$

Vzhledem k této skutečnosti (obrazem konvoluce vede na násobení obrazů), platí výše uvedený vztah $Y(s) = U(s) \cdot H(s)$, z něhož při znalosti obrazu derivace (násobení operátorem s v LT)[3] vyplývá, že časové odezvy lineárních obvodů lze řešit jednoduše bez nutnosti řešení diferenciálních rovnic, které jsou nahrazeny rovnicemi algebraickými. Navíc přechodem do kmitočtové roviny ($s = j\omega$) lze přímo získat z přenosu $H(s)$ stabilního systému jeho kmitočtovou charakteristiku $H(j\omega)$.

[3] Lineární systém je popsán lineárními diferenciálními rovnicemi ⇒ přenos $H(s)$ je racionálně lomenou funkcí!

Základní vlastnosti Laplaceovy transformace

Linearita	$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
Derivace*	$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$	$sF(s) - f(0)$
Integrace	$\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \mathbf{1}(t) * f(t)$	$\frac{1}{s}F(s)$
Konvoluce	$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$F(s) \cdot G(s)$
Časový posun	$f(t-a) \equiv f(t-a) \cdot \mathbf{1}(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
	$f(t) \cdot \mathbf{1}(t-a)$	$e^{-as}F(s+a)$
Frekvenční posun	$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
Změna měřítka	$f(at)$	$1/\lvert a\rvert\, F(s/a)$
Počáteční hodnota	$f(0^+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$	
Koncová hodnota	$f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$; $\lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}H(s) = H(0) =$ DCgain	

*Vícenásobná derivace: $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t) = \frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)(0)}$

Laplaceovy obrazy vybraných funkcí

Funkce	Časová oblast	Laplaceův obraz
Diracův impuls	$\delta(t)$	1
Jednotkový skok	$\mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{s}$
Rostoucí funkce	$t \cdot \mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{s^2}$
Mocninná funkce	$\frac{t^n}{n!} \cdot \mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
Exponencála	$e^{-\alpha t} \cdot \mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$
Exponenciální náběh	$(1 - e^{-\alpha t}) \cdot \mathbf{1}(t)$	$\frac{\alpha}{s(s+\alpha)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\alpha}$
sinus	$\sin(\omega t) \cdot \mathbf{1}(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
cosinus	$\cos(\omega t) \cdot \mathbf{1}(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
Tlumený sinus	$e^{-at} \sin(\omega t) \cdot \mathbf{1}(t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$

více viz např. http://en.wikipedia.org/wiki/Laplace_transform

Stabilita systému

Vzhledem k tomu, že přenosová funkce je vždy racionálně lomenou funkcí a vzhledem k obrazu exponenciální funkce, **musí kořeny jmenovatele (póly) přenosové funkce stabilního systému ležet v levé komplexní polorovině**, tj. kořeny musí být

- reálné záporné nebo
- komplexně sdružené se zápornou reálnou částí.

Pak je časová odezva pro $t \to \infty$ konečná, přičemž v případě komplexních kořenů (pólů) je odezva kmitavá.

Použití Laplaceovy transformace

Pro řešení výše uvedeného příkladu pomocí převedeme LT rovnici (7.1) na (7.13). Impulzní, resp. přechodovou charakteristiku pak vypočteme dle slovníku (viz. „Exponenciála“, resp. „Exponenciální náběh“), přičemž obraz vstupního signálu je $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$, resp. $\mathcal{L}\{\mathbf{1}(t)\} = 1/s$.

$$\tau_{RC} s U_c(s) + U_c(s) = U_1(s) \quad \Rightarrow \quad H(s) = \frac{U_c(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{1 + s\tau_{RC}} \tag{7.13}$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s) \cdot 1\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/\tau_{RC}}{1/\tau_{RC} + s}\right\} = \frac{1}{\tau_{RC}} \mathrm{e}^{-t/\tau_{RC}}, \quad \text{pro} \quad t > 0 \tag{7.14}$$

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}\Big\{\underbrace{H(s) \cdot \frac{1}{s}}_{W(s)}\Big\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/\tau_{RC}}{s(1/\tau_{RC} + s)}\right\} = 1 - \mathrm{e}^{-t/\tau_{RC}}, \quad \text{pro} \quad t > 0 \tag{7.15}$$

U přenosových funkcí vyšších řádů využijeme rozklad na parciální zlomky, tj. v tomto případě bylo použito: $\frac{\omega_0}{s(\omega_0+s)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{\omega_0+s}$, kde $\omega_0 = 1/\tau_{RC}$.

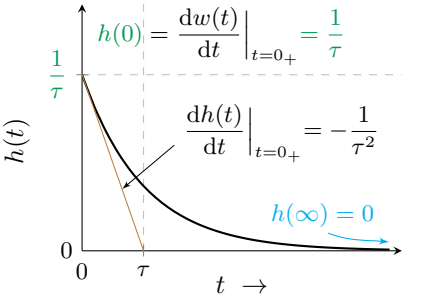
Z vět o počáteční a koncové hodnotě vyplývá: $u_c(0_+) = w(0_+) = \lim\limits_{s\to\infty} sW(s) = \lim\limits_{s\to\infty} s\frac{1}{s}H(s) = H(\infty) = 0$ a DC gain: $w(\infty) = \lim\limits_{s\to 0} sW(s) = \lim\limits_{s\to 0} s\frac{1}{s}H(s) = H(0) = 1$, což je graficky demonstrováno na další straně.

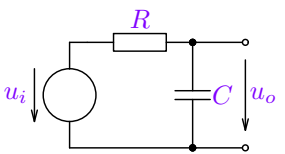
© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

Pro uvedený obvod byl odvozen přenos a následující odezvy:

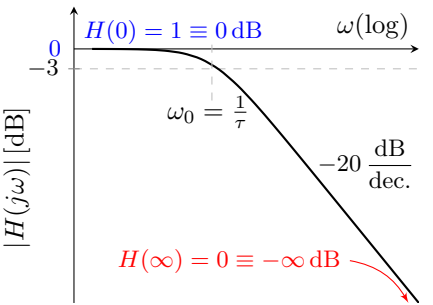
$$H(s) = \frac{1}{1+s\tau}, \quad h(t) = \frac{1}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau},\ w(t) = 1 - \mathrm{e}^{-t/\tau},\ t > 0,$$

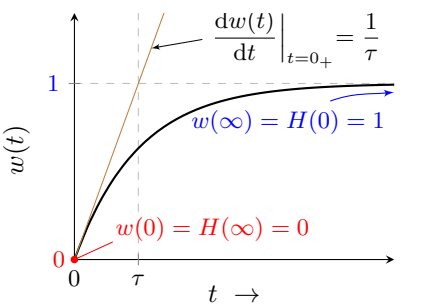
přičemž platí $h(t) = \frac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t}$, resp. $w(t) = \int_{0_-}^{t} h(x)\mathrm{d}x \Rightarrow$ pro stabilní systém je $h(\infty) = 0$. viz grafy vpravo. Vztah mezi limitními body modulové a přechodové charakteristiky je ukázán na následujících obrázcích. Hodnotu $h(0_+)$ lze ověřit i výpočtem z obvodového zapojení při $u_i = \delta(t)$ a skutečnosti $\int_{0_-}^{0_+} \delta(t)\mathrm{d}t = 1$, jak je uvedeno níže.





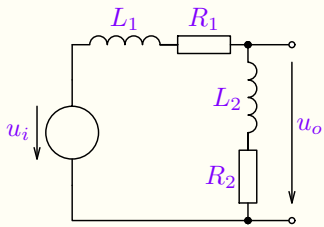
$$h(0_+) = \frac{1}{C}\int_{0_-}^{0_+} i(t)\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{C}\int_{0_-}^{0_+} \frac{\delta(t)}{R}\mathrm{d}t = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}$$





Příklad 7.1

Zadání: Vypočítejte přenos $H(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)}$ obvodu dle obrázku vpravo, jeho kmitočtovou charakteristiku $H(j\omega)$, kterou vykreslete pomocí Bodeho aproximace a z ní určete časový průběh výstupního napětí $u_o(t)$, pokud $u_i(t) = 10 + 11\sin(10^5 t) + \frac{10}{\sqrt{2}}\sin\left(9\cdot 10^5 t - \frac{\pi}{4}\right)$. Dále vypočítejte a vykreslete impulzní charakteristiku $h(t)$ a přechodovou charakteristiku $w(t)$.Uvažujte následující hodnoty obvodových prvků: $R_1 = 100\,\Omega$, $L_1 = 99\,\mathrm{mH}$, $R_2 = 900\,\Omega$, $L_2 = 1\,\mathrm{mH}$.

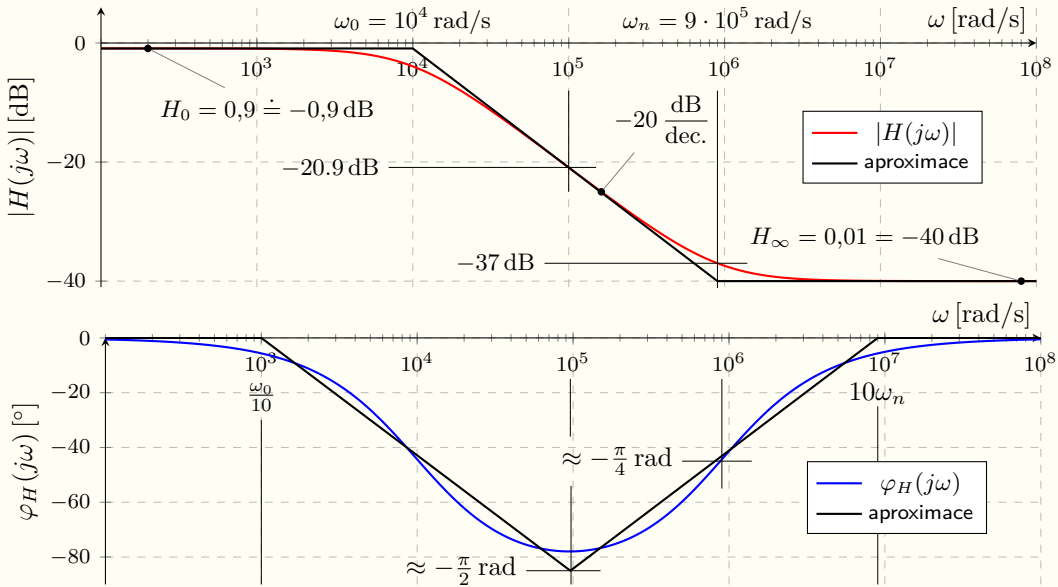


Řešení: Přenosová funkce obvodu je dána obrazovými impedancemi $Z_1(s) = R_1 + sL_1$ a $Z_2(s) = R_2 + sL_2$, kde je sL je obrazová impedance induktoru, analogicky k (7.9). Z ní pak lze určit kmitočtovou charakteristiku $H(j\omega)$, její úpravu (viz kapitolu 5.4.2) a vykreslení.

$$H(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} = \frac{R_2 + sL_2}{R_1 + R_2 + s(L_1 + L_2)}, \tag{7.16}$$

$$H(j\omega) = \frac{R_2 + j\omega L_2}{R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2)} = H_0 \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_n}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}, \quad \text{kde} \quad H_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2},\ \omega_n = \frac{R_2}{L_2},\ \omega_0 = \frac{R_1 + R_2}{L_1 + L_2}. \tag{7.17}$$

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL



$$u_i(t) = 10 + 11\sin(10^5 t) + \frac{10}{\sqrt{2}}\sin\left(9\cdot 10^5 t - \frac{\pi}{4}\right) \;\rightarrow\; u_o(t) \doteq 9 + 1\sin\left(10^5 t - \frac{\pi}{2}\right) + 0{,}1\sin\left(9\cdot 10^5 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Požadované časové odezvy určíme z upravené přenosové funkce $H(s)$ zpětnou Laplaceovou transformací.

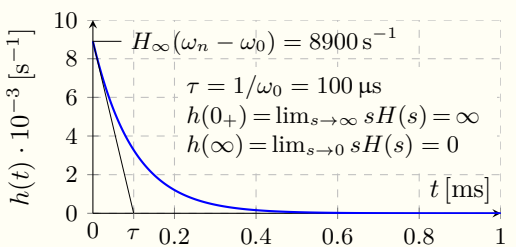
$$H(s) = \frac{R_2 + sL_2}{R_1 + R_2 + s(L_1 + L_2)} = H_\infty \frac{s + \omega_n}{s + \omega_0} = H_\infty \left(1 + \frac{\omega_n - \omega_0}{s + \omega_0}\right), \quad \text{kde} \quad H_\infty = \frac{L_2}{L_1 + L_2} \quad \Rightarrow$$

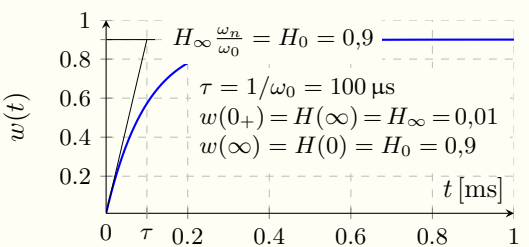
$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = H_\infty \delta(t) + H_\infty(\omega_n - \omega_0)\mathrm{e}^{-\omega_0 t} = 0{,}01\delta(t) + 8900\mathrm{e}^{-10^4 t}\,[\mathrm{s}^{-1}] \text{ pro } t > 0. \quad (7.18)$$

$$W(s) = \frac{H(s)}{s} = \frac{H_\infty \omega_n}{s\omega_0} + \frac{H_\infty(\omega_0 - \omega_n)}{\omega_0(s + \omega_0)} \quad \Rightarrow$$

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}\{W(s)\} = H_\infty \frac{\omega_n}{\omega_0} + H_\infty \frac{\omega_0 - \omega_n}{\omega_0}\mathrm{e}^{-\omega_0 t} = 0{,}9 - 0{,}89\mathrm{e}^{-10^4 t} \text{ pro } t > 0. \quad (7.19)$$

Následuje vykreslení impulzní (Diracův pulz nevykreslen) a přechodové charakteristiky.

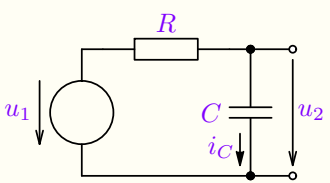


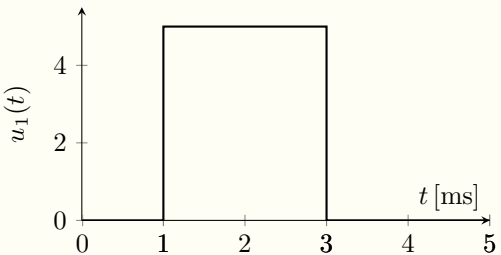


V simulátoru GEEC lze analyzovat také dynamické LTI systémy zadané přenosovou funkcí, viz videoukázku postupu.

Příklad 7.2

Zadání: Vypočítejte časový průběh výstupního napětí a proud kapacitorem integračního RC článku dle obrázku, je-li vybuzen pulzem $u_1(t) = 5\big(\mathbf{1}(t-1) - \mathbf{1}(t-3)\big)$. Uvažujme následující hodnoty obvodových prvků: $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $C = 1\,\mu\mathrm{F}$.





Rozvaha: Lze řešit pomocí dvou přechodových dějů (diferenciálními rovnicemi v časové oblasti první s nulovými a druhý s nenulovými počátečními podmínkami) nebo pomocí LT, či konvoluce se znalostí impulzní odezvy (7.3) a jejího obrazu (7.13).

Řešení pomocí LT:

$$u_1(t) = 5\big(\mathbf{1}(t-1) - \mathbf{1}(t-3)\big) \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} U_1(s) = \frac{5}{s}(\mathrm{e}^{-s} - \mathrm{e}^{-3s})$$

$$U_2(s) = U_1(s)H(s) = \frac{5(\mathrm{e}^{-s} - \mathrm{e}^{-3s})}{s(1+s\tau_{RC})} = 5(\mathrm{e}^{-s} - \mathrm{e}^{-3s})\left(\frac{1}{s} - \frac{CR}{CRs+1}\right)$$

$$u_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U_2(s)\} = 5\cdot\mathbf{1}(t-1)\left(1-\mathrm{e}^{\frac{1-t}{\tau CR}}\right) - 5\cdot\mathbf{1}(t-3)\left(1-\mathrm{e}^{\frac{3-t}{\tau CR}}\right)$$

Řešení pomocí konvoluce:

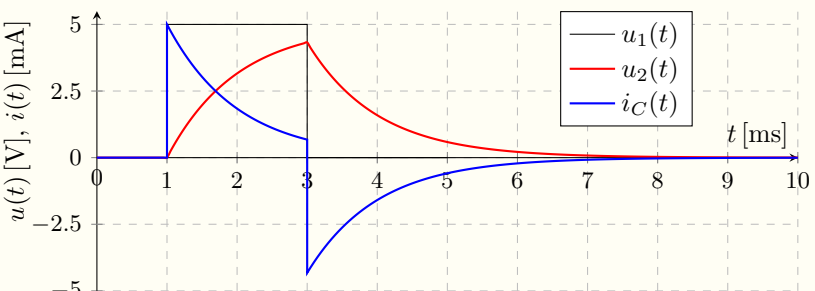
$$u_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} 5\big(\mathbf{1}(\tau-1) - \mathbf{1}(\tau-3)\big)\frac{\mathrm{e}^{-\frac{t-\tau}{\tau CR}}}{\tau_{CR}}\mathbf{1}(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$u_2(t) = \begin{cases} 0 & t \le 1 \\ 5 - 5\mathrm{e}^{\frac{-t+1}{\tau CR}} & 1 < t \le 3 \\ 5\mathrm{e}^{\frac{-t+1}{\tau RC}}\left(\mathrm{e}^{\frac{2}{\tau RC}} - 1\right) & 3 < t \end{cases}$$

což po zjednodušení vede na stejný, výše uvedený výsledek.

Proud kapacitorem vypočítáme z napětí $u_2(t)$ použitím $i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t}$:

$$u_2(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 1 \\ 5 - 5\mathrm{e}^{\frac{-t+1}{\tau_{RC}}} & t \leq 3 \\ 5\mathrm{e}^{\frac{-t+1}{\tau_{RC}}}\left(\mathrm{e}^{\frac{2}{\tau_{RC}}} - 1\right) & 3 < t \end{cases} \quad i_C(t) = \begin{cases} 0 & 1 < t \\ \frac{5}{\tau_{RC}}\mathrm{e}^{-\frac{t-1}{\tau_{RC}}} & t < 3 \\ \frac{5}{\tau_{RC}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{t-1}{\tau_{RC}}} - \mathrm{e}^{-\frac{t-3}{\tau_{RC}}}\right) & 3 < t \end{cases}$$

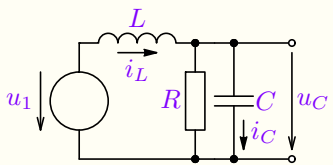


Obrázek 7.6: Výsledná časová odezva $u_2(t)$ integračního RC článku na vstupní pulz $u_1(t)$, proud kapacitorem $i_C(t)$ pro $\tau_{RC} = 1$ a $C = 1$. Viz také analýzu.

Použití konvoluce je oproti LT, kde lze využít slovníky, náročné na výpočet.

Příklad 7.3

Zadání: Vypočítejte časový průběh výstupního napětí $u_C(t)$ a proudu $i_C(t)$ rezonančního RLC obvodu dle obrázku pro uvedené hodnoty prvků, je-li stejnosměrné buzení $U_1 = 5\,\mathrm{V}$ v čase $t = 0$ vynulováno $u_1(t) = U_1\mathbf{1}(-t)$.

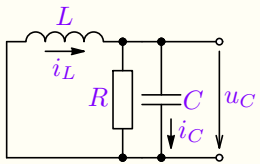


$$L = 1\,\mathrm{mH}$$
$$R = 1\,\mathrm{k\Omega}$$
$$C = 1\,\mu\mathrm{F}$$

Obrázek 7.7: Obvod 2. řádu – rezonanční RLC obvod s buzením $u_1(t)$.

Rozvaha: Obvod lze popsat pomocí diferenciální rovnice v časové oblasti s nenulovými počátečními podmínkami nebo pomocí LT. Použití konvoluce není možné vzhledem k nenulovým počátečním podmínkám v $t = 0_-$ (ustáleném stavu). LT je přitom nutno použít na řešení diferenciální rovnice, jelikož použití přenosu také vyžaduje nulové počáteční podmínky. Nelze použít ani obrazu vstupního pulzu, protože $U_1(s) = 0$, vzhledem k tomu, že LT je definována pro $t > 0$.

Řešení pomocí LT: Energetické počáteční podmínky: $u_C(0_-) = u_C(0_+) = u_C(0) = U_1 = 5V$ a $i_L(0_-) = i_L(0_+) = i_L(0) = U_1/R = 5\,\mathrm{mA}$. Pro řešení přechodného děje, tj. pro $t > 0$, je $u_1(t) = 0$, obvod lze překreslit do následujícího tvaru a sestavit rovnici pro jediné uzlové napětí $u_C(t)$:



$L = 1\,\mathrm{mH}$
$R = 1\,\mathrm{k\Omega}$
$C = 1\,\mu\mathrm{F}$

Obrázek 7.8: Rezonanční RLC obvod pro $t > 0$.

$$C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C(t)}{R} + \frac{1}{L}\int_0^t u_C(\tau)\,\mathrm{d}\tau - i_L(0) = 0$$

$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(\tau)\,\mathrm{d}\tau + u_C(0) \;\overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow}\; U_C(s) = \frac{1}{sC}I_C(s) + \frac{u_C(0)}{s} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; I_C(s) = sCU_C(s) - Cu_C(0), \quad \text{což odpovídá obrazu derivace a celou rovnici lze přepsat:}$$

$$sCU_C(s) - Cu_C(0) + \frac{U_C(s)}{R} + \frac{U_C(s)}{sL} - \frac{i_L(0)}{s} = 0$$

Řešením algebraické rovnice získáme obraz výstupního napětí $U_C(s)$, který rozložíme na parciální zlomky:

$$sCU_C(s) - Cu_C(0) + \frac{U_C(s)}{R} + \frac{U_C(s)}{sL} - \frac{i_L(0)}{s} = 0$$

$$U_C(s) = \frac{5s + 5000}{s^2 + 1000\,s + 10^9} \doteq \frac{2{,}5 + 0{,}03954\,j}{s + 500 + 31620\,j} + \frac{2{,}5 - 0{,}03954\,j}{s + 500 - 31620\,j}$$

a zpětnou transformací s použitím slovníku LT získáme časovou funkci $u_C(t)$ a následně z ní i požadovaný proud kapacitorem $i_C(t)$:

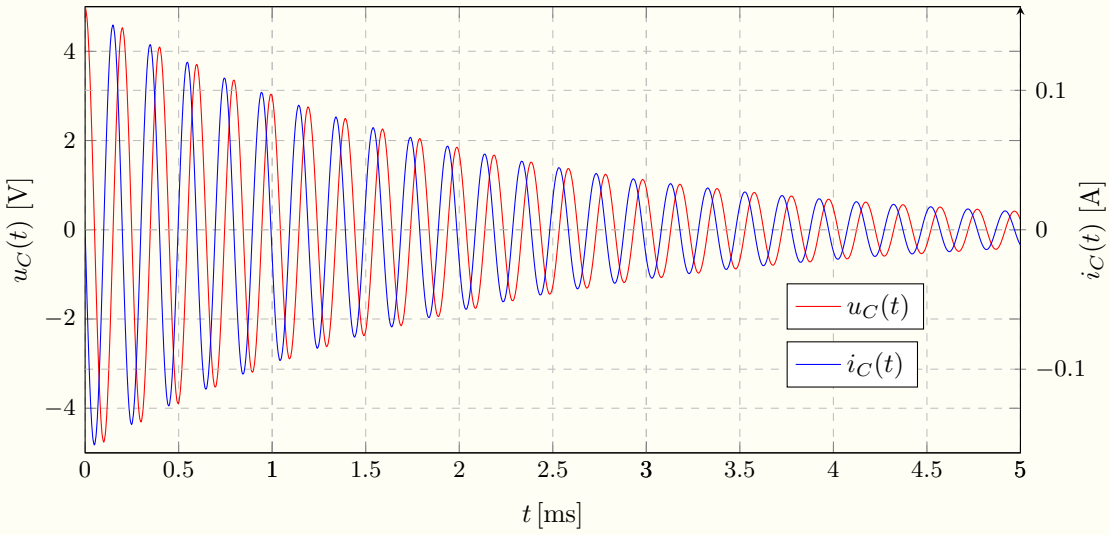
$$u_c(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U_C(s)\} \doteq \mathrm{e}^{-500\,t}\,(4{,}99875\,\cos(31620\,t) + 0{,}07905\,\sin(31620\,t))$$

$$i_c(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} \doteq -0{,}1582\,\mathrm{e}^{-500\,t}\sin(31620\,t)$$

Všechny obvodové veličiny jsou spojité, jelikož:

$$\boxed{u_c(0_-) = u_c(0_+) = 5\,\mathrm{V},\; i_L(0_-) = i_L(0_+) = 5\,\mathrm{mA}}$$

$$u_C(t) = u_R(t) \;\Rightarrow\; i_R(0_-) = i_R(0_+) = 5\,\mathrm{mA} \;\Rightarrow\; i_C(0_-) = i_C(0_+) = 0$$



Obrázek 7.9: Výsledná časová odezva $v_C(t)$, $i_C(t)$ rezonančního obvodu na vstupní počáteční nenulové energetické veličiny $u_C(t)$ a $i_L(t)$. Viz také analýzu.

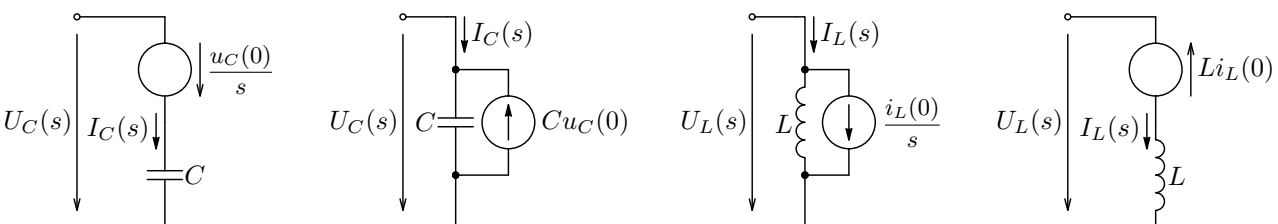
Náhradní zapojení akumulačních prvků pro operátorovou analýzu

Z uvedeného příkladu a z Laplaceových obrazů konstanty, integrálu a derivace vyplývá:

$$U_C(s) = \frac{I_C(s)}{sC} + \frac{u_C(0)}{s}, \quad I_C(s) = sCU_C(s) - Cu_C(0), \tag{7.20}$$

$$I_L(s) = \frac{U_L(s)}{sL} + \frac{i_L(0)}{s}, \quad U_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0). \tag{7.21}$$

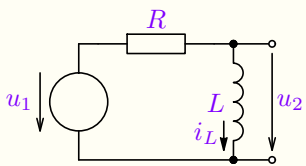
Pro operátorovou analýzu lze sestavit obvod a z něho obvodové rovnice včetně zohlednění počátečních podmínek (energetických veličin), pokud kapacitor, resp. induktor nahradíme zapojením (a) nebo (b), resp. (c) nebo (d), jak udává následující obrázek. Zapojení (a) a (d) jsou výhodná pro metodu smyčkových proudů, zapojení (b) a (c) pro metodu uzlových napětí. Viz také algoritmizaci analýz elektrických obvodů v dodatku A.



Obrázek 7.10: Náhradní zapojení kapacitoru (a), (b) a induktoru (c), (d) pro operátorovou analýzu.

Příklad 7.4

Zadání: Vypočítejte časový průběh výstupního napětí a proudu induktorem derivačního RL článku dle obrázku pro uvedené hodnoty prvků, je-li vybuzen kosinusovým signálem $u_1(t) = U_{1m}\cos(\omega t)$ a amplitudou $U_{1m} = 1\,\mathrm{V}$ a kmitočtem $f = 10\,\mathrm{kHz}$ ($\omega = 2\pi f$). Dále nakreslete kmitočtové charakteristiky přenosového článku. Nakonec určete jak se změní časová odezva článku, jestliže bude vstupní signál po čase $t_k = 1\,\mathrm{ms}$ vynulován.



$L = 1\,\mathrm{mH}$
$R = 100\,\Omega$

Obrázek 7.11: Derivační přenosový RL článek 1. řádu

Rozvaha: Časové odezvy lze řešit jak přímo v časové oblasti (diferenciálními rovnicemi), tak v obrazové oblasti (pomocí LT), případně i pomocí konvoluce. Řešení provedeme pomocí LT a přenos využijeme při kreslení kmitočtových charakteristik.

Obraz vstupního signálu $U_1(s)$ a přenosová funkce systému $H(s)$ je evidentně:

$$U_1(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2} = \frac{s}{s^2+400\cdot 10^6\pi^2}, \tag{7.22}$$

$$H(s) = \frac{sL}{sL+R} = \frac{s\tau}{1+s\tau}, \text{ kde } \tau = \frac{L}{R} = 10\,\mu\text{s} \tag{7.23}$$

a z toho pak obraz výstupního signálu, tj. napětí $U_2(s)$ na induktoru a jeho časová funkce $u_2(t)$:

$$U_2(s) = U_L(s) = \frac{25}{(\pi^2+25)\,(s+100000)} + \frac{(s-100000)\,\pi^2}{(\pi^2+25)\,(400\cdot 10^6\,\pi^2+s^2)}, \tag{7.24}$$

$$u_2(t) = u_L(t) = \frac{25\,\mathrm{e}^{-100000\,t} + \cos(20000\,\pi\,t)\,\pi^2 - 5\,\pi\,\sin(20000\,\pi\,t)}{\pi^2+25}\ \text{V}. \tag{7.25}$$

Proud induktorem pak při nulových počátečních podmínkách $i_L(0) = 0$ vypočteme z časové funkce napětí $u_L(t)$:

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t u_L(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{-5\,\mathrm{e}^{-100000\,t} + \pi\,\sin(20000\,\pi\,t) + 5\,\cos(20000\,\pi\,t)}{20\,\pi^2+500}\ \text{A}. \tag{7.26}$$

Výsledné časové funkce obsahují přechodovou složku (exponenciála), která odezní pro $t \to \infty$ **a ustálenou harmonickou složku, tj. partikulární řešení** $y_p(t)$**, viz (4.5). Ustálenou harmonickou složku lze získat přímo z kmitočtové charakteristiky**, kterou dostaneme z přenosu substitucí $s = j\omega$, tj.:

$$H(j\omega) = \frac{j\omega/\omega_0}{1 + j\omega/\omega_0}, \tag{7.27}$$

kde $\omega_0 = \dfrac{1}{\tau} = 10^5\,\mathrm{rad/s}$, resp. $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} \doteq 15{,}9\,\mathrm{kHz}$. Harmonická ustálená složka (partikulární řešení) pro výstupní napětí a proud induktorem získáme z následujících (kosinových) fázorů pro $U_{1m} = 1\,\mathrm{V}$):

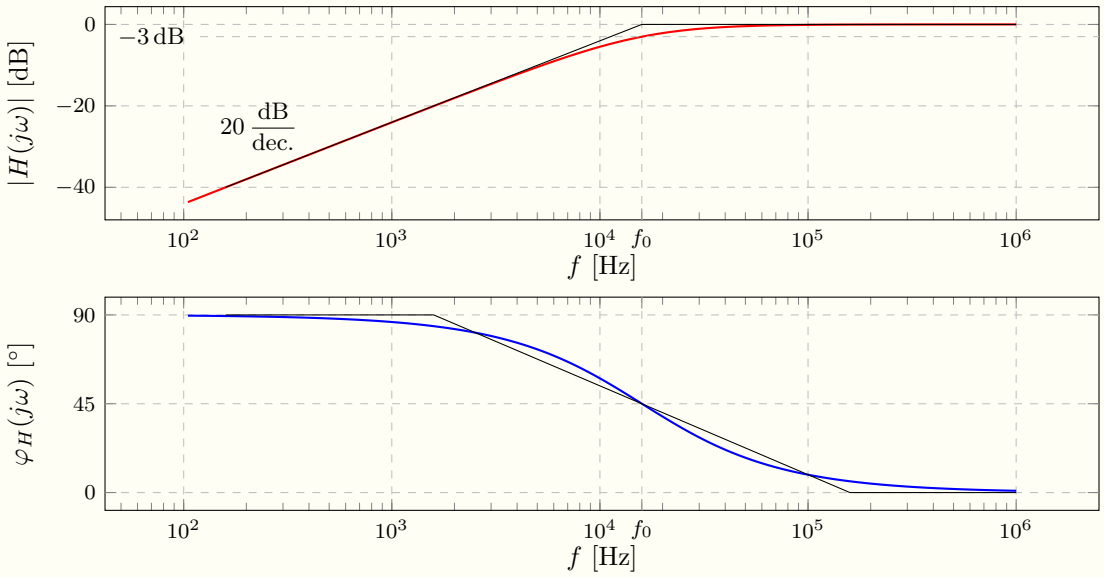
$$\hat{U}_{2p} = U_{1m} \cdot H(j2\pi 10^4) \doteq 0{,}283 + j0{,}45 \doteq 0{,}532\mathrm{e}^{j1{,}0}\,\mathrm{V}, \quad \hat{I}_L = \frac{\hat{U}_2}{j2\pi 10^4 L} \doteq 8{,}467\mathrm{e}^{-j0{,}561}\,\mathrm{mA}. \tag{7.28}$$

Požadované časové funkce, tj. výsledná partikulární řešení jsou pak dány vztahy (7.29) a kompletní časovou funkci $i_L(t)$ **lze sestavit i dle (4.5)**, tj.

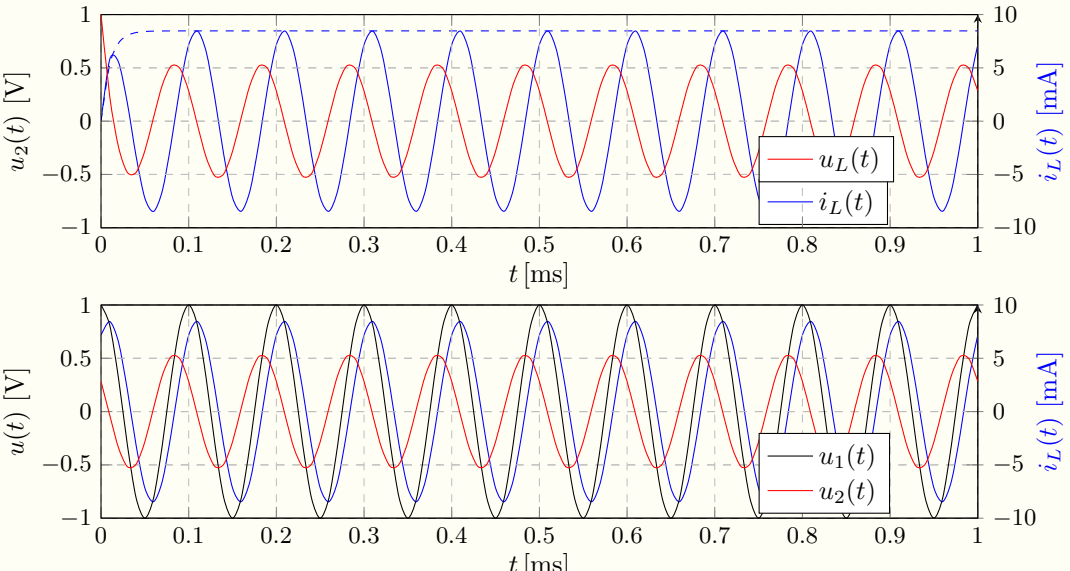
$$u_{2p}(t) \doteq 0{,}532\cos(2\pi 10^4 t + 1)\,\mathrm{V}, \quad i_{Lp}(t) \doteq 8{,}467\cos(2\pi 10^4 t - 0{,}561)\,\mathrm{mA} \quad \text{pro} \quad t \to \infty \tag{7.29}$$

$$i_L(t) = \big(i_L(0_+) - i_{Lp}(0)\big)\mathrm{e}^{-t/\tau} + i_{Lp}(t) \doteq -7{,}17\mathrm{e}^{-t\omega_0} + 8{,}467\cos(2\pi 10^4 t - 0{,}561)\,\mathrm{mA}, \tag{7.30}$$

což koresponduje se vztahem (7.26). Dále následuje vykreslení jak kmitočtových charakteristik (amplitudové a fázové včetně Bodeho aproximace), tak časových odezev.



Obrázek 7.12: Modulová a fázová charakteristika RL článku. Viz také analýzu.



Obrázek 7.13: Přechodová odezva RL článku a výsledek analýzy HUS.

Pro buzení pulzem harmonického napětí délky $t_k = 1\,\mathrm{ms}$, tj. $u_{1p} = \cos(\omega t)\mathbf{1}(t_k - t)$ je pro $\omega = 2\pi 10^4$ obraz vstupního signálu $U_{1p}(s)$ dle slovníku LT:

$$U_{1p}(s) \doteq \frac{s\left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}001s}\right)}{s^2 + 3{,}948 \cdot 10^9}$$

Obraz výstupního napětí dostaneme opět jako $U_{2p}(s) = U_{1p}(s)H(s)$ a z něho lze pak určit časovou funkci výstupního napětí:

$$\begin{aligned} u_{2p}(t) \doteq\ & 0{,}717\mathrm{e}^{-10^5 t} + 0{,}283\cos(62830\,t) - 0{,}4505\sin(62830\,t) - \\ & - 0{,}717 \cdot \mathbf{1}(t - 0.001)\,\mathrm{e}^{100-10^5 t} - 0{,}2830 \cdot \mathbf{1}(t - 0{,}001)\cos(62830\,t - 62{,}83) + \\ & + 0{,}4505 \cdot \mathbf{1}(t - 0{,}001)\sin(62830\,t - 62{,}83) \end{aligned} \quad (7.31)$$

Výpočet je již poměrně náročný. Podstatně jednodušší je určit energetické počáteční podmínky v $t = 1\,\mathrm{ms}$ a z nich pak nekmitavý přechodový děj obvodu pro nulové buzení.

Pro výpočet počátečních podmínek lze využít pouze časové odezvy určené pomocí HUS $i_L(0{,}001_-) = i_L(0{,}001_+) \doteq 7{,}17\,\mathrm{mA}$, jelikož počáteční přechodový děj v $t = 1\,\mathrm{ms}$ prakticky odezněl ($\tau = 10\,\mu\mathrm{s}$). Pro časovou funkci proudu induktorem pak platí:

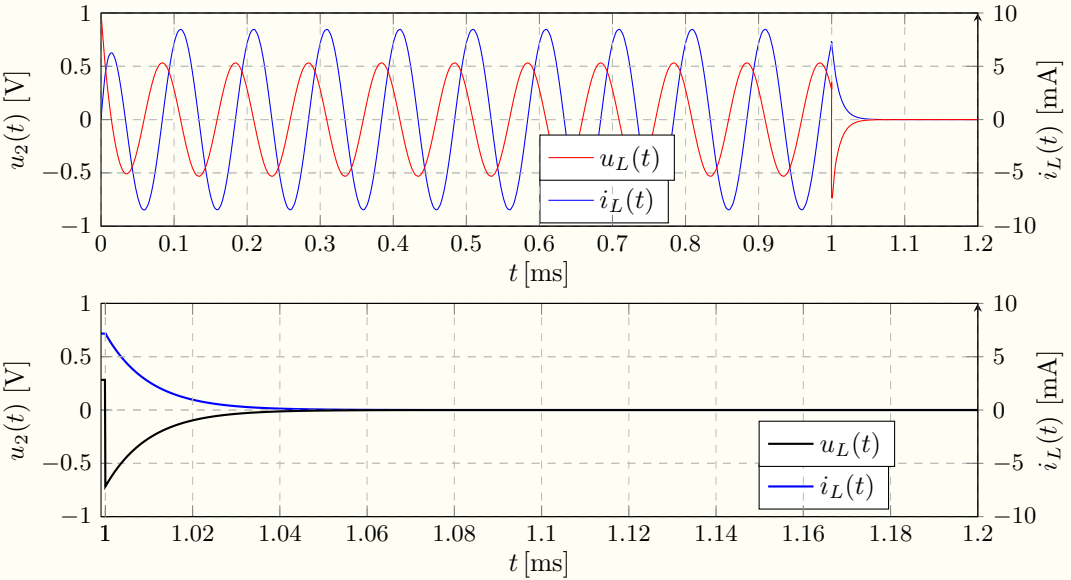
$$i_L(t) \doteq 7{,}17\mathrm{e}^{100-10^5 t}\,[\mathrm{mA}] \quad \text{pro} \quad t > 1\,\mathrm{ms}$$

ze které určíme napětí na induktoru, tj. výstupní napětí článku

$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} \doteq -0{,}717\mathrm{e}^{100-10^5 t}\,[\mathrm{V}] \quad \text{pro} \quad t > 1\,\mathrm{ms}$$

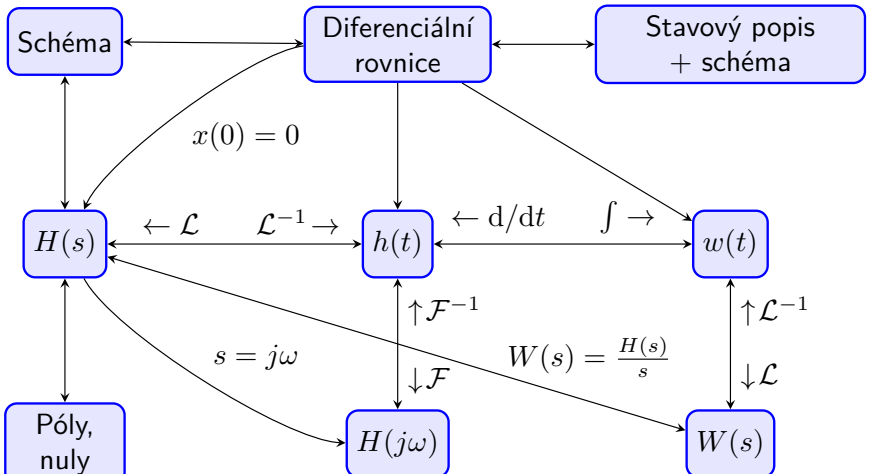
Je zřejmé, že výstupní napětí na induktoru je v $t = 1\,\mathrm{ms}$ nespojité, jelikož z (7.31) je $u_L(0{,}001_-) \doteq 0{,}283\,\mathrm{V}$, kdežto z výše uvedeného vztahu $u_L(0{,}001_+) \doteq -0{,}717\,\mathrm{V}$.

Výsledné časové funkce jak pro celý přechodový děj určené pomocí LT, tak i pouze pro $t > 1\,\mathrm{ms}$ určené z počáteční podmínky pro $i_L(0{,}001)$ a nulové buzení RL článku jsou uvedeny na následujícím obrázku 7.15.



Obrázek 7.14: Odezva RL článku na harmonický pulz a detail odezvy pro $t \geq 1\,\mathrm{ms}$.

7.3.3. Diagram souvislostí systémového popisu LTI systémů

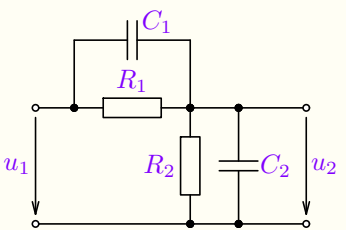


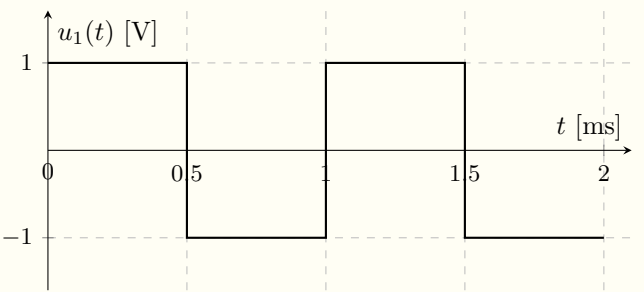
Obrázek 7.15: Diagram souvislostí popisu LTI systémů a jejich provázanost.

Na závěr ukážeme opět na řešeném příkladu analýzu obvodu buzeného periodickým signálem a to jak pomocí PNUS, tak pomocí LT.

Příklad 7.5

Zadání: Určete výstupní napětí $u_2(t)$ napěťového děliče s kmitočtovou kompenzací, buzeného napětím $u_1(t)$ dle obrázků, pokud jsou zadány následující hodnoty prvků: $R_1 = 9\,\mathrm{M\Omega}$, $R_2 = 1\,\mathrm{M\Omega}$, $C_1 = 17\,\mathrm{pF}$ a $C_2 = 120\,\mathrm{pF}$.





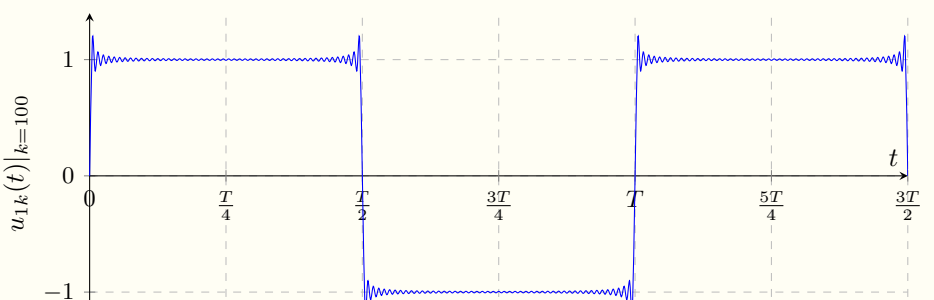
Řešení: Řešit budeme jednak metodou PNUS (kapitola 6), kdy vstupní napětí vyjádříme ve formě součtu harmonických signálů pomocí Fourierovy řady a jednak pomocí LT.

Řešení metodou PNUS

Nejprve vyjádříme vstupní napětí ve formě součtu harmonických signálů pomocí Fourierovy řady, jejíž koeficienty vypočítáme následovně (stejnosměrná složka je evidentně nulová a cosinové členy rovněž):

$$u_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t), \text{ kde } b_k = \frac{2}{T}\int_0^T u_1(t)\sin\left(k\ \omega_0 t\right)\,\mathrm{d}t,\ \omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T} \tag{7.32}$$

$$b_k = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} 1\cdot\sin\Big(\frac{2\pi k}{T}\Big)t = \frac{2-2(-1)^k}{\pi k} = \frac{4}{\pi}, 0, \frac{4}{3\pi}, 0, \frac{4}{5\pi}, 0, \frac{4}{7\pi}, \ldots \tag{7.33}$$



Fázor výstupního napětí (kmitočtovou charakteristiku) lze vyjádřit následovně:

$$\hat{U}_2 = \hat{U}_1 \frac{\hat{Z}_2}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2} = \hat{U}_1 \frac{1}{1 + \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2}} = \hat{U}_1 \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} \frac{1+j\omega R_2 C_2}{1+j\omega R_1 C_1}} \tag{7.34}$$

Nyní lze vyjádřit fázory jednotlivých složek výstupního napětí a výsledné napětí v ustáleném stavu jako součet jednotlivých složek časových funkcí:

$$\hat{U}_{2_k} = b_k \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} \frac{1+j\omega_0 k \ R_2 C_2}{1+j\omega_0 k \ R_1 C_1}}, \ u_2(t) = \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{U}_2| \sin(k\omega_0 t + \arg(\hat{U}_2).$$

Řešení pomocí LT

Přenos systému lze z (7.34) odvodit ve formě

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} \frac{1+sR_2C_2}{1+sR_1C_1}} \tag{7.35}$$

Výpočet odezvy provést po částech, pak pro $0 \leq t \leq T/4$ lze pro obraz a z něho pro časový průběh výstupního napětí psát:

$$U_2(s) = H(s)U_1(s) = H(s)\frac{1}{s}, \quad u_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U_2(s)\} \doteq 0{,}1 + 0{,}024\mathrm{e}^{-8110t} \tag{7.36}$$

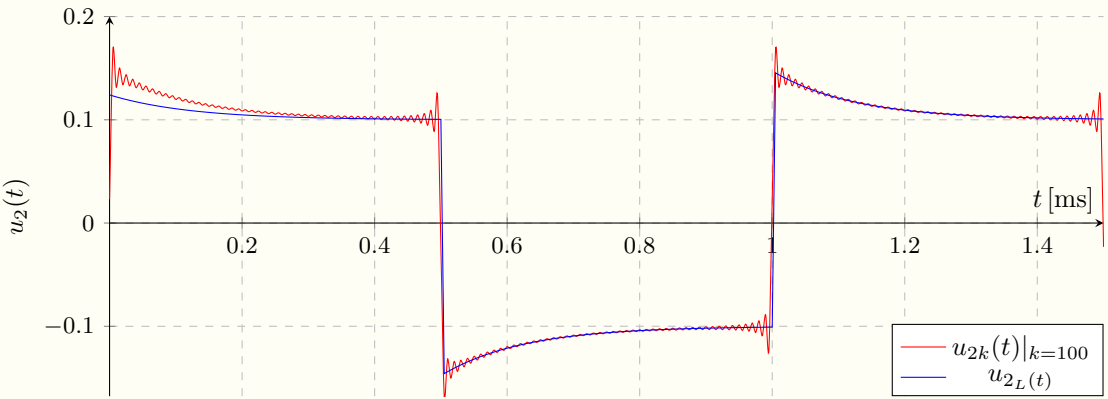
Pro $t > T/2$ nelze použít výpočet na základě přenosu, jelikož nejsou nulové počáteční podmínky. Obraz výstupního napětí lze odvodit např. pomocí metody uzlových napětí:

$$\frac{U_2(s) - U_1(s)}{R_1} + \Big(s\big(U_2(s) - U_1(s)\big) + u_{C_1}(\tau)\Big)C_1 + \frac{U_2(s)}{R_2} + \big(sU_2 - u_{C_2}(\tau)\big)C_2 = 0 \Rightarrow U_2(s)$$

kde $U_1(s) = \pm\,\dfrac{1}{s}$ (podle časového úseku) a počáteční podmínky, tj. $u_{C_1}(\tau) = u_1(\tau) - u_2(\tau)$ orientováno od napětí u_1 k napětí u_2 a $u_{C_2}(\tau) = u_2(\tau)$ vypočítáme vždy na konci předcházejícího přechodného děje postupně v $\tau = \frac{T}{2}, T, \frac{3T}{2}, \ldots$ Výstupní napětí $u_2(t)$ pak dostaneme zpětnou LT $U_2(s)$ pro jednotlivé časové úseky:

$$u_2(t) \doteq \begin{cases} -0{,}0478 \cdot \mathbf{1}(t - 0{,}0005)\big(\mathrm{e}^{-8110t+8.11} + 2.094\big), & T/2 < t \le T \\ \;\;0{,}0473 \cdot \mathbf{1}(t - 0{,}001)\big(\mathrm{e}^{-8110t+8.11} + 2.112\big), & T < t \le 3T/2 \\ \;\;\ldots \end{cases}$$

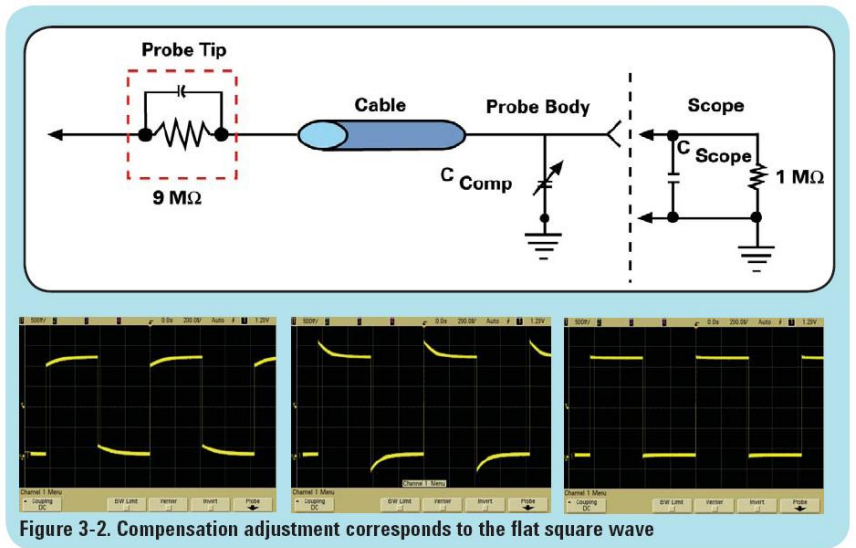
Pro výpočet lze využít i větu pro **obraz periodické funkce**, viz [20]. Nejprve popíšeme první periodu vstupního signálu podobně jako pulz v příkladu 7.2, tj. v tomto případě: $A\big(\mathbf{1}(t) - 2\cdot\mathbf{1}(t - T/2) + \mathbf{1}(t - T)\big)$, kde A je amplituda a T perioda signálu. Jeho obraz pak vynásobíme členem $\dfrac{1}{1 - \mathrm{e}^{-sT}}$ a získáme tak obraz vstupního obdélníkového periodického signálu. Ten vynásobíme přenosem (7.35) a po aplikaci zpětné LT získáme výstupní napětí jako funkci času. Pro výpočet je výhodné použít matematický SW.



Obrázek 7.16: Výstupní napětí v ustáleném stavu $u_{2k}(t)$ vypočítané metodou PNUS s uvažováním prvních 100, resp. 50 harmonických rozvoje $u_1(t)$ a výstupní napětí $u_{2_L}(t)$ včetně počátečního přechodového děje vypočítané pomocí Laplaceoby transformace.

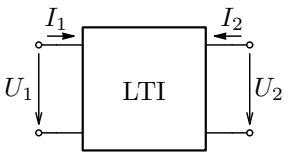
Je zřejmé, že metoda rozvoje vstupního signálu do Fourierovy řady a použitím PNUS je výpočetně podstatně náročnější a než LT a navíc dává přesný výsledek pouze pro $k \to \infty$, komentář viz přednáška.

Aby přenos (7.35) dělicího článku byl kmitočtově nezávislý, je zřejmé, že musí platit $R_1C_1 = R_2C_2$ (viz také příklad 5.4). Pak bude výstupní signál replikou vstupního, tj. se stejným časovým průběhem, pouze vynásobeným dělicím poměrem $R_2/(R_1 + R_2)$. Takto jsou konstruovány osciloskopické sondy, které lze navíc přizpůsobit pro různé kapacitní zátěže (C_2) různých osciloskopů, více viz přednáška.



Obrázek 7.17: Zapojení osciloskopické sondy s kompenzací (převzato z http://vyvoj.hw.cz/).

7.4. Dvojbranový (vnější) popis LTI systémů



$$U_1(s) = \mathcal{L}\{u_1(t)\}, \quad U_2(s) = \mathcal{L}\{u_2(t)\},$$
$$I_1(s) = \mathcal{L}\{i_1(t)\}, \quad I_2(s) = \mathcal{L}\{i_2(t)\}.$$

Všechny veličiny představují Laplaceovy obrazy, tj. $U_i(s)$, $I_i(s)$, Y_{ik} i dále uvedené $z_{ik}(s)$, ..., ale pro jednoduchost zápisu uvádíme níže zkráceně U_i, I_i, atd.

7.4.1. Vnitřní popis LTI systému (obvodové veličiny ve všech uzlech)

Systém s n uzly, tj. s n uzlovými napětími $U_{1..n}$, ale při buzení/zatěžování pouze dvou uzlů, viz dodatek A.

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & \dots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & \dots & Y_{2n} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & \dots & Y_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & Y_{n3} & \dots & Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} \equiv \mathbf{I} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{U} \Rightarrow U_k = \frac{1}{\Delta_{\mathbf{Y}}} \sum_{i=1}^{n} \Delta_{\mathbf{Y}_{ik}} I_i$$

Dvojbranem (dvojbranovým popisem) lze jednoduše modelovat i složitější lineární systémy se dvěma branami, podobně jako Theveninovým či Noronovým zapojením lineární dvojpól. Popis dvojbranu je popisem pouze pro napětí a proudy vstupní a výstupní brány, tj. pro $i = 1$ a 2, přičemž ostatní proudy mimo I_1 a I_2 jsou vždy nulové (více viz kapitolu A.3). Pak pro branová napětí platí:

$$U_1 = \frac{\Delta_{\mathbf{Y}_{11}}}{\Delta_{\mathbf{Y}}} I_1 + \frac{\Delta_{\mathbf{Y}_{21}}}{\Delta_{\mathbf{Y}}} I_2 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2, \qquad U_2 = \frac{\Delta_{\mathbf{Y}_{12}}}{\Delta_{\mathbf{Y}}} I_1 + \frac{\Delta_{\mathbf{Y}_{22}}}{\Delta_{\mathbf{Y}}} I_2 = z_{21} I_1 + z_{22} I_2 \,.$$

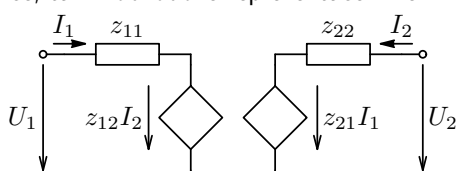
kde $\Delta_{\mathbf{Y}}$ a $\Delta_{\mathbf{Y}_{ik}}$ je determinant a odpovídající subdeterminant výše uvedené matice $\mathbf{Y}$.
Vzhledem k použitým obvodovým veličinám dvojbranu existuje celkem $\binom{4}{2} = 6$ možností popisu pomocí tzv. dvojbranových parametrů, které jsou dále uvedeny.

7.4.2. Imitanční popis – impedanční parametry Z

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$z_{11} = \left.\frac{U_1}{I_1}\right|_{I_2=0}, \quad z_{12} = \left.\frac{U_1}{I_2}\right|_{I_1=0},$$
$$z_{21} = \left.\frac{U_2}{I_1}\right|_{I_2=0}, \quad z_{22} = \left.\frac{U_2}{I_2}\right|_{I_1=0}.$$

Maticový zápis uvedených rovnic vede na impedanční matici $\mathbf{Z}$ s definicí jednotlivých parametrů vlevo. Jejich význam vyplývá jak z definice, tak z obvodové reprezentace níže.



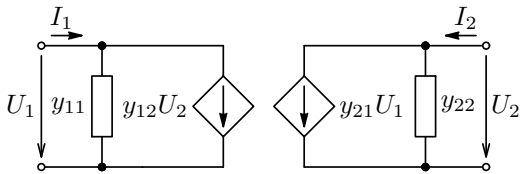
7.4.3. Imitanční popis – admitanční parametry $\mathbf{Y}$

Analogicky k impedančním parametrům je definován popis pomocí admitančních parametrů. Následují odpovídající rovnice, jejich maticový zápis, definiční vztahy pro jednotlivé parametry a náhradní obvodové zapojení dvojbranu.

$$I_1 = y_{11}U_1 + y_{12}U_2,$$
$$I_2 = y_{21}U_1 + y_{22}U_2\,.$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

$$y_{11} = \left.\frac{I_1}{U_1}\right|_{U_2=0}, \quad y_{12} = \left.\frac{I_1}{U_2}\right|_{U_1=0},$$
$$y_{21} = \left.\frac{I_2}{U_1}\right|_{U_2=0}, \quad y_{22} = \left.\frac{I_2}{U_2}\right|_{U_1=0}.$$



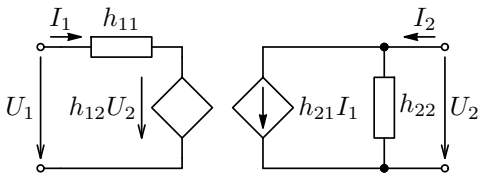
Tyto parametry jsou někdy udávány v katalogovém listu pro náhradní linearizované kmitočtově závislé modely tranzistorů při definovaných podmínkách (pracovním bodě, kmitočtu, ...), tj. místo g_m bude y_{21}, místo g_π bude y_{11} a y_{22} místo $1/r_o$ jako odporové parametry pro malé kmitočty (SKP), viz kapitolu 15.2. Pokud jsou parametry kmitočtově závislé, udávají se jako komplexní čísla pro daný kmitočet.

Dvojbran vykazuje dvě brány, přičemž a jeho stav popisují 4 obvodové veličiny – 2 nezávislé (např. U_1 a I_2) a dvě závislé (I_1 a U_2). Vzhledem k tomu, že vztah mezi nezávislými a závislými veličinami určují parametry dvojbranu, existuje celkem 6 možností popisu. Dále následují definice dalších parametrů zbývajících 4 variant popisu.

7.4.4. Hybridní (smíšený) popis – sériově-paralelní parametry H

$$U_1 = h_{11} I_1 + h_{12} U_2$$
$$I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} U_2$$

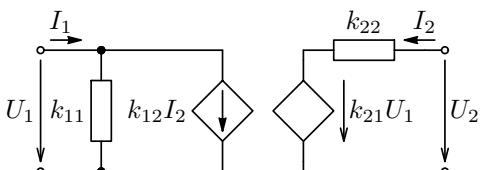
$$h_{11} = \left.\frac{U_1}{I_1}\right|_{U_2=0}, \quad h_{12} = \left.\frac{U_1}{U_2}\right|_{I_1=0}$$
$$h_{21} = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{U_2=0}, \quad h_{22} = \left.\frac{I_2}{U_2}\right|_{I_1=0}$$



7.4.5. Hybridní (smíšený) popis – paralelně-sériové parametry K

$$I_1 = k_{11} U_1 + k_{12} I_2$$
$$U_2 = k_{21} U_1 + k_{22} I_2$$

$$k_{11} = \left.\frac{I_1}{U_1}\right|_{I_2=0}, \; k_{12} = \left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{U_1=0},$$
$$k_{21} = \left.\frac{U_2}{U_1}\right|_{I_2=0}, \; k_{22} = \left.\frac{U_2}{I_2}\right|_{U_1=0},$$



7.4.6. Kaskádní (přenosové) parametry A

$$\begin{aligned} U_1 &= a_{11}U_2 + a_{12}(-I_2) \\ I_1 &= a_{21}U_2 + a_{22}(-I_2) \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = \left.\frac{U_1}{U_2}\right|_{I_2=0}, \quad a_{12} = \left.\frac{U_1}{-I_2}\right|_{U_2=0}$$
$$a_{21} = \left.\frac{I_1}{U_2}\right|_{I_2=0}, \quad a_{22} = \left.\frac{I_1}{-I_2}\right|_{U_2=0}$$

7.4.7. Zpětně kaskádní parametry B

$$\begin{aligned} U_2 &= b_{11}U_1 + b_{12}I_1 \\ -I_2 &= b_{21}U_1 + b_{22}I_1 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix}$$

$$b_{11} = \left.\frac{U_2}{U_1}\right|_{I_1=0}, \quad b_{12} = \left.\frac{U_2}{I_1}\right|_{U_1=0}$$
$$b_{21} = \left.\frac{-I_2}{U_1}\right|_{I_1=0}, \quad b_{22} = \left.\frac{-I_2}{I_1}\right|_{U_1=0}$$

Kaskádní (postupný ani zpětný) popis nelze přímo realizovat obvodovým schématem. Fyzikální význam parametrů je zřejmý z jejich definic: a_{11} je převrácená hodnota napěťového přenosu při výstupu naprázdno, a_{12} je převrácená hodnota transadmitance při výstupu nakrátko, a_{21} je převrácená hodnota transimpedance při výstupu naprázdno, a_{22} je převrácená hodnota proudového přenosu při výstupu nakrátko a obdobně pro zpětné parametry $\mathbf{B}$.

7.4.8. Vztahy mezi dvojbranovými parametry

Z maticových zápisů je zřejmé, že $\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1}$, $\mathbf{K} = \mathbf{H}^{-1}$ a $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, jelikož jsou v jejich popisu zaměněny vektory pravých a levých stran, tj. $y_{11} = \frac{z_{22}}{\Delta_\mathbf{Z}}$, $y_{12} = \frac{-z_{12}}{\Delta_\mathbf{Z}}$, ... Dále je z již definic některých parametrů evidentní, že např. $a_{11} = \frac{1}{k_{21}}$, $k_{21} = \frac{1}{a_{11}} = -\frac{1}{b_{22}}$, ... Pro konverzi všech parametrů mezi sebou lze odvodit následující relace:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_{22}}{\Delta_\mathbf{Y}} & \frac{-y_{12}}{\Delta_\mathbf{Y}} \\ \frac{-y_{21}}{\Delta_\mathbf{Y}} & \frac{y_{11}}{\Delta_\mathbf{Y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta_\mathbf{H}}{h_{22}} & \frac{h_{12}}{h_{22}} \\ \frac{-h_{21}}{h_{22}} & \frac{1}{h_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_{11}} & \frac{-k_{12}}{k_{11}} \\ \frac{k_{21}}{k_{11}} & \frac{\Delta_\mathbf{K}}{k_{11}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{a_{21}} & \frac{\Delta_\mathbf{A}}{a_{21}} \\ \frac{1}{a_{21}} & \frac{a_{22}}{a_{21}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-b_{22}}{b_{21}} & \frac{-1}{b_{21}} \\ \frac{-\Delta_\mathbf{B}}{b_{21}} & \frac{-b_{11}}{b_{21}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \frac{z_{22}}{\Delta_\mathbf{Z}} & \frac{-z_{12}}{\Delta_\mathbf{Z}} \\ \frac{-z_{21}}{\Delta_\mathbf{Z}} & \frac{z_{11}}{\Delta_\mathbf{Z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_{11}} & \frac{-h_{12}}{h_{11}} \\ \frac{h_{21}}{h_{11}} & \frac{\Delta_\mathbf{H}}{h_{11}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta_\mathbf{K}}{k_{22}} & \frac{k_{12}}{k_{22}} \\ \frac{-k_{21}}{k_{22}} & \frac{1}{k_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{a_{12}} & \frac{-\Delta_\mathbf{A}}{a_{12}} \\ \frac{-1}{a_{12}} & \frac{a_{11}}{a_{12}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-b_{11}}{b_{12}} & \frac{1}{b_{12}} \\ \frac{\Delta_\mathbf{B}}{b_{12}} & \frac{-b_{22}}{b_{12}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta_\mathbf{Z}}{z_{22}} & \frac{z_{12}}{z_{22}} \\ \frac{-z_{21}}{z_{22}} & \frac{1}{z_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{y_{11}} & \frac{-y_{12}}{y_{11}} \\ \frac{y_{21}}{y_{11}} & \frac{\Delta_\mathbf{Y}}{y_{11}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_{22}}{\Delta_\mathbf{K}} & \frac{-k_{12}}{\Delta_\mathbf{K}} \\ \frac{-k_{21}}{\Delta_\mathbf{K}} & \frac{k_{11}}{\Delta_\mathbf{K}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_{12}}{a_{22}} & \frac{\Delta_\mathbf{A}}{a_{22}} \\ \frac{-1}{a_{22}} & \frac{a_{21}}{a_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-b_{12}}{b_{11}} & \frac{1}{b_{11}} \\ \frac{-\Delta_\mathbf{B}}{b_{11}} & \frac{-b_{21}}{b_{11}} \end{bmatrix}$$

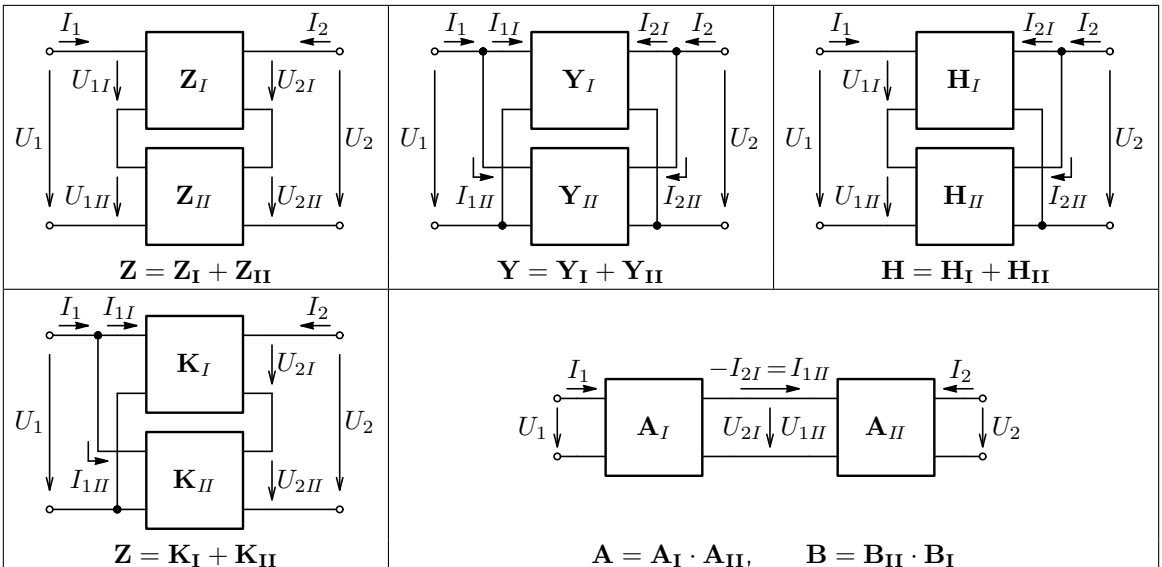
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z_{11}} & \frac{-z_{12}}{z_{11}} \\ \frac{z_{21}}{z_{11}} & \frac{\Delta_{\mathbf{Z}}}{z_{11}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta_{\mathbf{Y}}}{y_{22}} & \frac{y_{12}}{y_{22}} \\ \frac{-y_{21}}{y_{22}} & \frac{1}{y_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{h_{22}}{\Delta_{\mathbf{H}}} & \frac{-h_{12}}{\Delta_{\mathbf{H}}} \\ \frac{-h_{21}}{\Delta_{\mathbf{H}}} & \frac{h_{11}}{\Delta_{\mathbf{H}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_{21}}{a_{11}} & \frac{-\Delta_{\mathbf{A}}}{a_{11}} \\ \frac{1}{a_{11}} & \frac{a_{12}}{a_{11}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-b_{21}}{b_{22}} & \frac{-1}{b_{22}} \\ \frac{\Delta_{\mathbf{B}}}{b_{22}} & \frac{-b_{12}}{b_{22}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{z_{11}}{z_{21}} & \frac{\Delta_{\mathbf{Z}}}{z_{21}} \\ \frac{1}{z_{21}} & \frac{z_{22}}{z_{21}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-y_{22}}{y_{21}} & \frac{-1}{y_{21}} \\ \frac{-\Delta_{\mathbf{Y}}}{y_{21}} & \frac{-y_{11}}{y_{21}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\Delta_{\mathbf{H}}}{h_{21}} & \frac{-h_{11}}{h_{21}} \\ \frac{-h_{22}}{h_{21}} & \frac{-1}{h_{21}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_{21}} & \frac{k_{22}}{k_{21}} \\ \frac{k_{11}}{k_{21}} & \frac{\Delta_{\mathbf{K}}}{k_{21}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_{22}}{\Delta_{\mathbf{B}}} & \frac{-b_{12}}{\Delta_{\mathbf{B}}} \\ \frac{-b_{21}}{\Delta_{\mathbf{B}}} & \frac{b_{11}}{\Delta_{\mathbf{B}}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{z_{22}}{z_{12}} & \frac{-\Delta_{\mathbf{Z}}}{z_{12}} \\ \frac{-1}{z_{12}} & \frac{z_{11}}{z_{21}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-y_{11}}{y_{12}} & \frac{1}{y_{12}} \\ \frac{\Delta_{\mathbf{Y}}}{y_{12}} & \frac{-y_{22}}{y_{12}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_{12}} & \frac{-h_{11}}{h_{12}} \\ \frac{-h_{22}}{h_{12}} & \frac{\Delta_{\mathbf{H}}}{h_{12}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\Delta_{\mathbf{K}}}{k_{12}} & \frac{k_{22}}{k_{12}} \\ \frac{k_{11}}{k_{12}} & \frac{-1}{k_{12}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{\Delta_{\mathbf{A}}} & \frac{-a_{12}}{\Delta_{\mathbf{A}}} \\ \frac{-a_{21}}{\Delta_{\mathbf{A}}} & \frac{a_{11}}{\Delta_{\mathbf{A}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

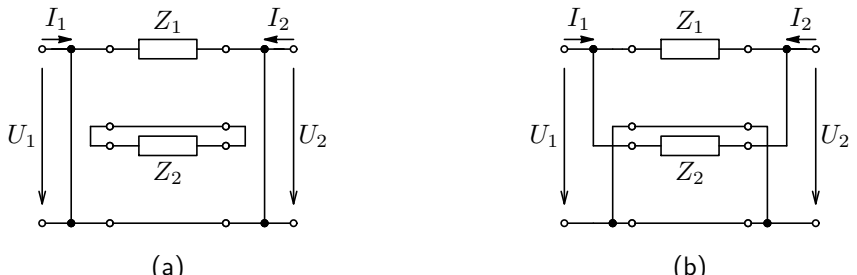
POZOR: dvojbran popisuje pouze vztah mezi dvěma branami, tj. **napětí mezi branami nemá na obvodové veličiny žádný vliv** – v obecném případě mohou být brány galvanicky odděleny (např. pro popis transformátoru), jak je zřejmé z náhradních schémat.

7.4.9. Základní řazení dvojbranů a určení parametrů při jejich spojování



Tabulka 7.1: Základní spojení dvojbranů vyplývající z definic jednotlivých parametrů a vztahy pro výsledné spojení.

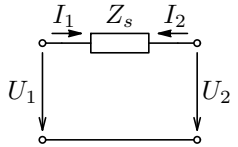
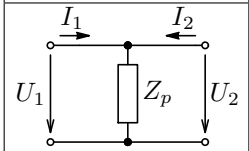
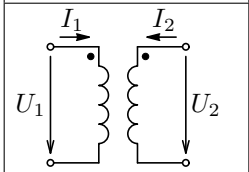
Pro složitější např. zpětnovazební systémy lze pomocí dvojbranů zjednodušit jednotlivé části a řazením těchto dvojbranů popsat celkový systém. V tabulce 7.1 jsou uvedena základní spojení vyplývající z definic jednotlivých parametrů. Aby platily vztahy pro spojování dvojbranů, musí být spojení regulární, tj. musí platit rovnost vtékajícího a vytékajícího proudu každé brány – nesmí být porušeno chování dvojbranu.



Obrázek 7.18: Příklad neregulárního (a) a regulárního spojení (b) dvojbranů.

Degenerované dvojbrany

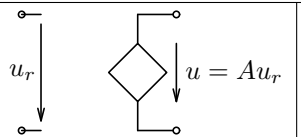
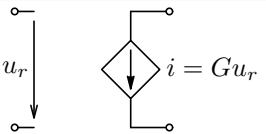
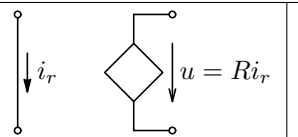
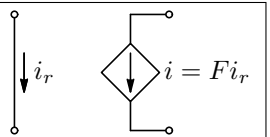
Neregulární spojení vzniklo nevhodným spojením dvou tzv. degenerovaných dvojbranů. Takový dvojbran nemá definované všechny typy parametrů (matice), jelikož některý z prvků vychází nekonečný (dělení nulou). Příklady takových dvojbranů jsou uvedeny níže.

	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Y}$	$\mathbf{H}$	$\mathbf{K}$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{B}$
	neexistuje	$\begin{bmatrix} Y_s & -Y_s \\ -Y_s & Y_s \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Z_s & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & Z_s \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & Z_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -Z_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} Z_p & Z_p \\ Z_p & Z_p \end{bmatrix}$	neexistuje	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & Y_p \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Y_s & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_p & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -Y_p & 1 \end{bmatrix}$
	neexistuje	neexistuje	$\begin{bmatrix} 0 & N \\ -N & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{N} \\ \frac{1}{N} & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & \frac{1}{N} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{N} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}$

Tabulka 7.2: Příklady elementárních degenerovaných pasivních dvojbranů a jejich parametry.

Jednotlivé parametry lze snadno odvodit z jejich definičních vztahů. Model ideálního transformátoru na obrázku 1.17 odpovídá s opačnou orientací proudu i_2 paralelně-smíšeným parametrům $\mathbf{K}$, resp. jejich obvodové reprezentaci.

U následujících základních aktivních prvků (ideální napěťový, transkonduktanční transimpedanční a proudový zesilovač existuje pouze jedna dvojbranová reprezentace pro každý prvek.

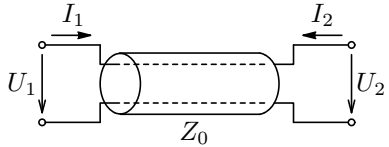
			
$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{bmatrix}$	$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ G & 0 \end{bmatrix}$	$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ Z & 0 \end{bmatrix}$	$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \end{bmatrix}$

Tabulka 7.3: Příklady aktivních elementárních degenerovaných dvojbranů a jejich parametry.

Dvojbrany dělíme podle jejich specifických vlastností, tj. vztahů mezi jejich parametry na:

- **pasivní resp. aktivní**, obsahující pouze pasivní prvky (R, L,C), resp. aktivní prvky (a případně i pasivní).
- **neautonomní**, pokud neobsahují nezávislé zdroje,
- **impedančně souměrné**, pro které lze zaměnit vstupní a výstupní bránu, platí: $z_{11} = z_{22}$, $y_{11} = y_{22}$, $\Delta_{\mathbf{H}} = \Delta_{\mathbf{K}} = 1$ a $a_{11} = a_{22}$, $b_{11} = b_{22}$,
- **reciprocitní**, u nichž buzení na vstupu, resp. výstupu vede na stejnou odezvu na výstupu, resp. vstupu, platí: $z_{12} = z_{21}$, $y_{12} = y_{21}$, $h_{12} = -h_{21}$, $k_{12} = -k_{21}$ a $\Delta_{\mathbf{A}} = \Delta_{\mathbf{B}} = 1$, platí např. pro pasivní dovojbrany,
- **bezeztrátové**, pro které jsou všechny parametry z_{mn}, y_{mn} čistě imaginární a
- **unilaterální**, pro které je nulový zpětný přenos signálu, tj. $z_{12} = y_{12} = h_{12} = k_{12} = 0$.

Dvojbranového popisu se využívá i pro homogenní vedení v harmonickém ustáleném stavu, viz např. [4], přičemž kaskádní matice $\mathbf{A}$ vedení délky l [m] je uvedena níže.



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma l & Z_0 \sinh \gamma l \\ \dfrac{1}{Z_0} \sinh \gamma l & \cosh \gamma l \end{bmatrix} \tag{7.37}$$

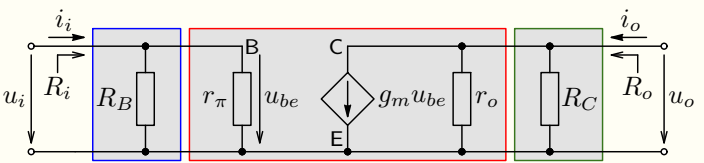
kde $\gamma = \sqrt{Z_l Y_p}$ [m^{-1}] je tzv. činitel šíření a $Z_0 = \sqrt{\frac{Z_l}{Y_p}}$ [Ω] je vlnová (charakteristická) impedance, přičemž Z_l je podélná impedance [Ω/m] a Y_p [S/m] příčná admitance vztažené na jednotku délky. Ty jsou složené z podélné rezistance a induktance ($Z_l = R_l + j\omega L_l$), resp. příčné konduktance a kapacitance ($Y_p = G_l + j\omega C_l$). V simulátorech pak použijeme např. náhradní zapojení uvedené v podkapitole 7.4.3 a kaskádní parametry $\mathbf{A}$ převedeme podle vztahů podkapitoly 7.4.8 na parametry admitanční $\mathbf{Y}$.

Příklad 7.6

Zadání: Odvoďte vztahy pro napěťové zesílení A_u naprázdno a proudové zesílení A_i nakrátko a vstupní i výstupní odpor (R_i, R_o) jednostupňového zesilovače z příkladu 15.10.

Řešení: Pro výpočet změn obvodových veličin ve SKP využijeme náhradní linearizované schéma uvedené v řešení příkladu 15.10, kde je tranzistor nahrazen modelem 15.18 (a).

Linearizované schéma příkladu 15.10 lze rozdělit na 3 části reprezentované následujícími dvojbrany: odpor R_B a odpor R_C a linearizovaným modelem tranzistoru, viz obrázek níže. Vzhledem k jejich kaskádnímu řazení popíšeme jednotlivé dvojbrany kaskádními parametry. Dvojbrany s paralelním odporem dle tabulky 7.2 (druhá varianta) a model tranzistoru nejprve $\mathbf{Y}$ parametry (z definice), které převedeme pomocí vztahů sekce 7.4.8 na parametry $\mathbf{Y}$. Výsledná kaskádní matice je díky kaskádnímu řazení dána součinem jednotlivých matic $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{R_B} \cdot \mathbf{A}_T \cdot \mathbf{A}_{R_C}$, viz tabulku 7.1.



$$\mathbf{A}_{R_B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ G_B & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{R_C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ G_C & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Y}_T = \begin{bmatrix} g_\pi & 0 \\ g_m & g_0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_T = \begin{bmatrix} -\frac{g_0}{g_m} & -\frac{1}{g_m} \\ -\frac{g_\pi g_0}{g_m} & -\frac{g_\pi}{g_m} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \mathbf{A}_{R_B} \cdot \mathbf{A}_T \cdot \mathbf{A}_{R_C} = \begin{bmatrix} -\frac{g_0 + G_C}{g_m} & -\frac{1}{g_m} \\ -\frac{(g_0 + G_C)(g_\pi + G_B)}{g_m} & -\frac{g_\pi + G_B}{g_m} \end{bmatrix}$$

Požadované parametry pak vypočítáme na základě definic dvojbranových parametrů – viz dále.

Přenosové parametry jsou přímo parametry výsledné kaskádní matice $\mathbf{A}$, impedanční parametry obdržíme z imitančních parametrů převodem z parametrů kaskádních:

$$A_u = \frac{u_o}{u_i}\Big|_{i_o=0} = \frac{1}{a_{11}} = -\frac{g_m}{g_0+G_C} = -g_m(R_C||r_0),$$

$$A_i = \frac{-i_o}{i_z}\Big|_{u_o=0} = \frac{1}{a_{22}} = -\frac{g_m}{g_\pi+G_B} = -\frac{g_m r_\pi}{1+r_\pi G_B} = -\frac{\beta R_B}{r_\pi+R_B}, \quad \text{kde} \quad g_m r_\pi = \beta,$$

$$R_i = \frac{u_i}{i_i} = \frac{1}{y_{11}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = z_{11} = \frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{1}{g_\pi+G_B} = r_\pi||R_B,$$

$$R_o = \frac{u_o}{i_o} = \frac{1}{y_{22}} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = z_{22} = \frac{a_{22}}{a_{21}} = \frac{1}{g_0+G_C} = r_0||R_C.$$

Díky uvažovanému nulovému zpětnému přenosu tranzistoru (výsledný dvojbran je unilaterální), platí $z_{11} = 1/y_{11}$ a $z_{11} = 1/y_{22}$. Výsledky korespondují se vztahy (15.28), (15.29) a (15.30).

Uživatel si může dále vyzkoušet např. výpočet parametrů zesilovače z příkladu 15.11 analýzou linearizovaného schématu 15.29 (b), kde si vyzkouší i sériové spojení dvojbarnů (sčítají se $\mathbf{Z}$ matice tranzistorového modelu a odporu R_E opět v zapojení dle 2. varianty tabulky 7.2).

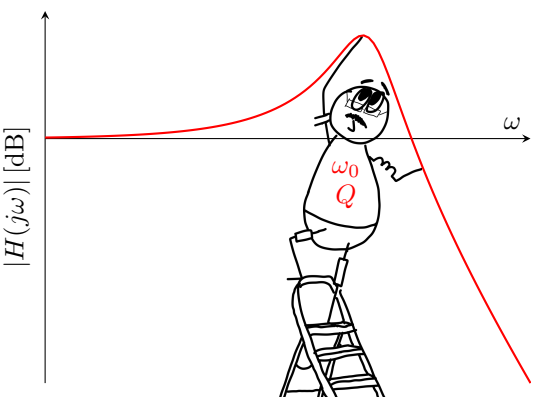
Více o dvojbranovém popisu a příkladech výpočtu dvojbranových parametrů z obvodových schémat lze nalézt zde, případně v [15].

Poznámky VII

Kapitola 8

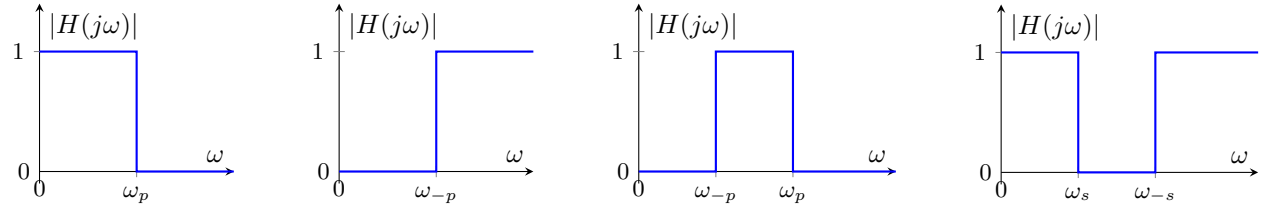
Úvod do kmitočtových filtrů, vlastnosti přenosových funkcí filtrů

Tato kapitola definuje všechny přenosové funkce prvního a druhého řádu, ze kterých lze sestavit obecnou přenosovou funkci vyššího řádu. Jsou shrnuty a porovnány vlastnosti všech těchto funkcí jak v časové, tak kmitočtové oblasti. Uživatel se seznámí s různými možnostmi vyjádření parametrů přenosové funkce, a to jak pomocí pólů a nul, tak pomocí zlomového kmitočtu ω_0 a činitele jakosti Q, ze kterých lze dobře odhadnout vlastnosti (tvar kmitočtové i přechodové charakteristiky) přenosové funkce.To pak využijeme v další kapitole.



© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

8.1. Definice kmitočtového filtru a jeho základní typy



Obrázek 8.1: Ideální modulové charakteristiky základních typů filtrů

Kmitočtový filtr je dynamický LTI systém, jehož vlastnosti jsou většinou předepsány amplitudovou charakteristikou:

(a) **dolní propust (Lowpass – LP)**: propouští harmonické signály s kmitočty dolního pásma $\omega \in \langle 0, \omega_p)$ a naopak signály s kmitočty horního pásma potlačuje,

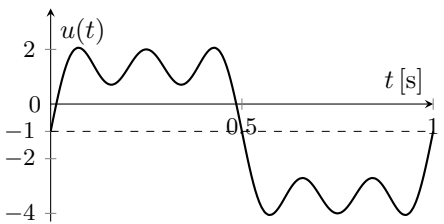
(b) **horní propust (Highpass HP)**: propouští harmonické signály s kmitočty horního pásma $\omega > \omega_{-p}$ a naopak signály s kmitočty dolního pásma potlačuje,

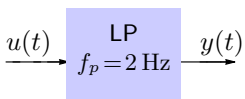
(c) **pásmová propust (Bandpass – BP)**: propouští pouze harmonické signály s kmitočty určeného pásma $\omega \in (\omega_{-p}, \omega_p)$ a signály ostatních kmitočtů potlačuje a

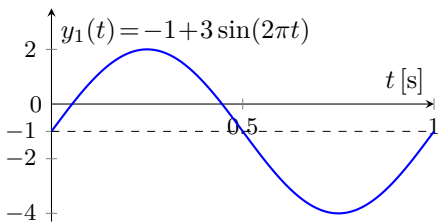
(d) **pásmová zádrž (Band-stop – BS)**: propouští pouze harmonické signály s kmitočty $\omega \in \langle 0, \omega_p) \wedge \omega > \omega_{-p}$ a signály kmitočtů $\omega \in (\omega_{-p}, \omega_p)$ potlačuje.

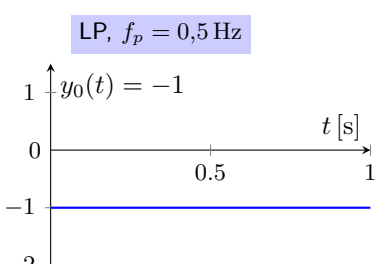
8.1.1. Ilustrace chování ideálních filtrů v časové oblasti (ustálený stav)

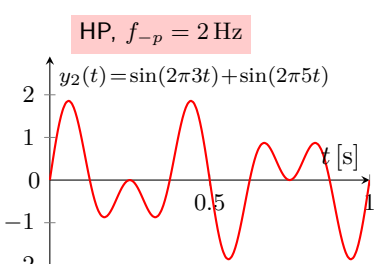
Aplikace různých typů filtrů na signál: $u(t) = -1 + 3\sin(2\pi t) + \sin(2\pi 3t) + \sin(2\pi 5t)$

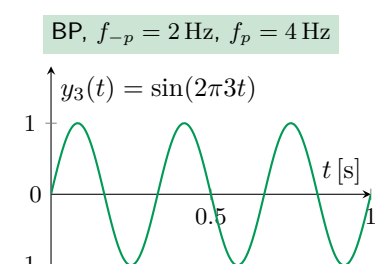




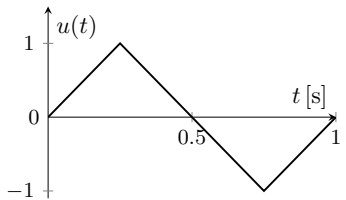


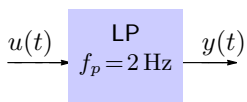


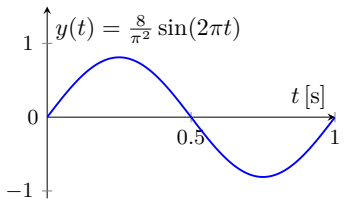




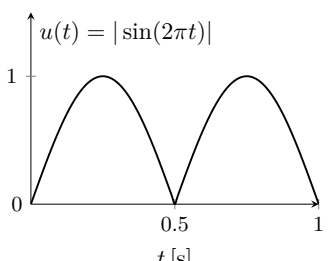
Aplikace dolní propusti na trojúhelníkový signál $u(t) = \frac{8}{\pi^2}\sin(2\pi t) - \frac{8}{9\pi^2}\sin(2\pi 3t) + \frac{8}{25\pi^2}\sin(2\pi 5t) + \cdots$

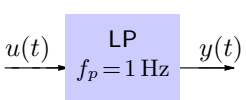


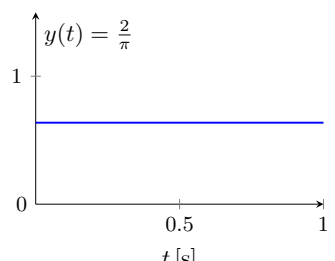




Aplikace dolní propusti na usměrněný sinusový signál $u(t) = |\sin(2\pi t)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{3\pi}\sin(2\pi 2t) - \frac{4}{15\pi^2}\sin(2\pi 4t) + \cdots$







Jedná se o ustálený stav od $t = 0$, tj. přechodový děj při připojení vstupního signálu k filtru nastal v $t \to -\infty$! Chování reálných filtrů včetně přechodového děje viz dále.

Na uvedených amplitudových charakteristikách a časových odezvách byly ukázány vlastnosti jednotlivých ideálních filtrů. V praxi nelze těchto vlastností (např. dokonale utlumit část kmitočtového pásma) dosáhnout, proto je nutné specifikovat potřebné vlastnosti s určitými tolerancemi (tolerančním schématem), jak bude ukázáno v další kapitole. Zde jsou představeny přenosové vlastnosti základních stavebních bloků reálných filtrů, tj. přenosové funkce 1. a 2. řádu, ze kterých jsou složeny všechny analogové filtry.

8.1.2. Základní oblasti použití analogových filtrů

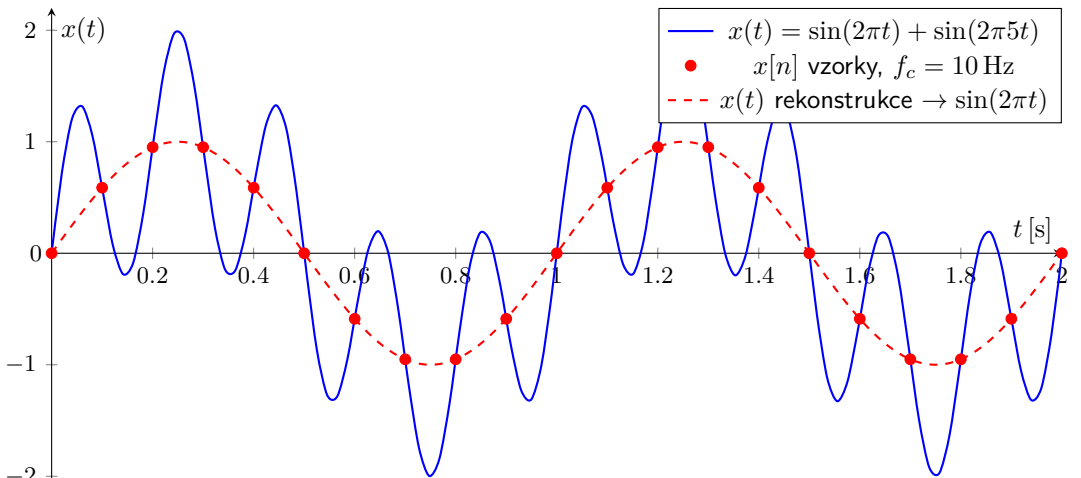
V této podkapitole je uveden stručný přehled současného základního použití analogových filtrů.

- Anti-aliasingové filtry – před vzorkováním (a konverzí na digitální reprezentaci) analogového signálu.
- Telekomunikační technika – kmitočtový multiplex ≡ přenos několika signálů (pomocí různých kmitočtů) jednou přenosovou linkou, dále ve speciálních aplikacích (např. fázový závěs) nebo vysoké kmitočty, kde nelze použít digitální filtry.
- Měřicí technika – odstranění DC složky, rušení 50 Hz, lock-in zesilovače ...
- Rekonstrukční filtry – převod digitálního signálu na analogový.
- a další (zejména výkonová technika).

Následující obrázky ilustrují nutnost použití analogových kmitočtových filtrů před vzorkováním analogového signálu, aby nedocházelo k tzv. aliasingu (překrývání pásem). Problém je ukázán na elementárním příkladu harmonických funkcí v časové oblasti. Dále jsou pak ukázány některé z typických aplikací analogových filtrů.

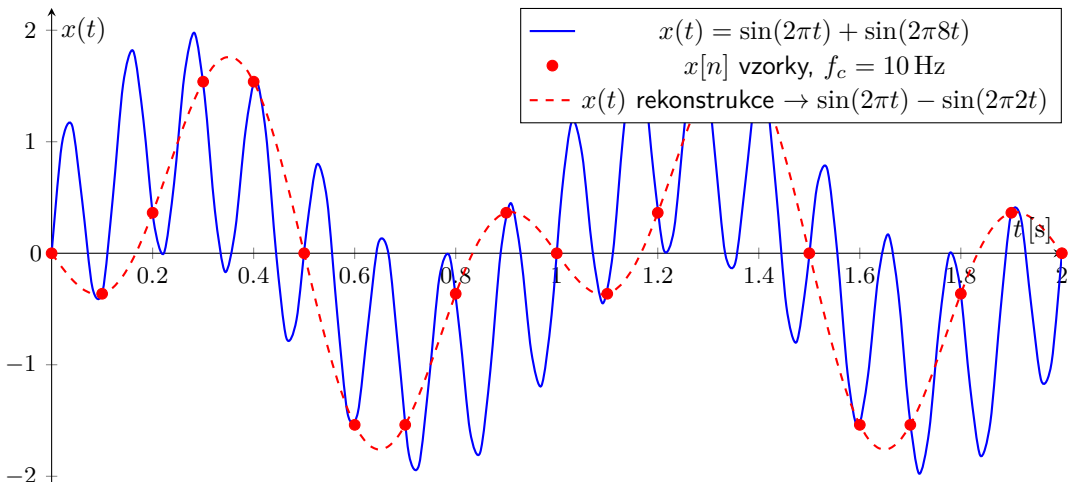
Nutnost analogové filtrace signálů při jejich vzorkování - dodržení vzorkovacího teorému

Z uvedeného obrázku je zřejmé, že při vzorkování signálu $x(t) = \sin(2\pi t) + \sin(2\pi 5t)$ periodou $T_c = \frac{1}{f_c}$ nelze postihnout signál s kmitočtem $f_2 = \frac{f_c}{2}$, který nebude ve výsledku (po rekonstrukci ze snímaných vzorků) přítomen.



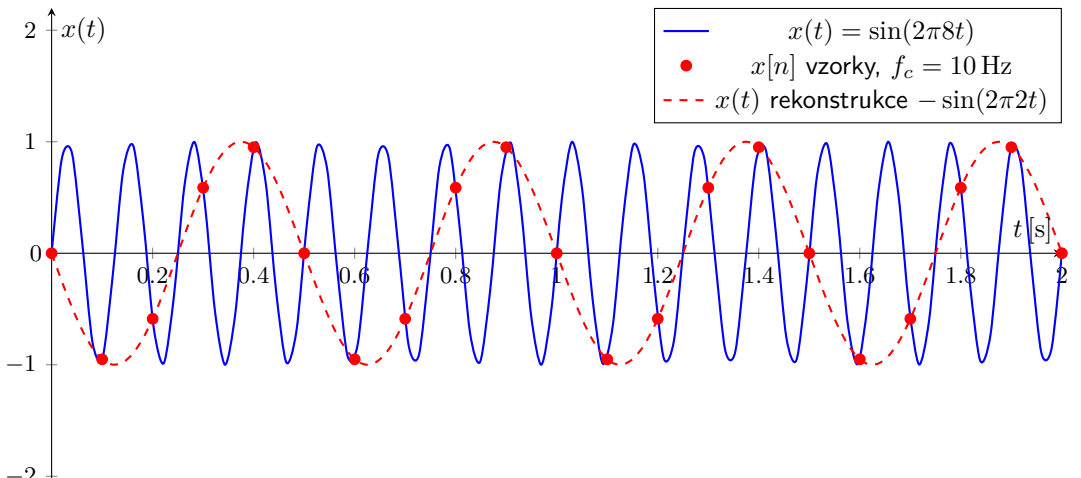
Obrázek 8.2: Vzorkování analogového signálu pro digitální zpracování při $f_1 = 1\,\mathrm{Hz} < \frac{f_c}{2}$ a $f_2 = \frac{f_c}{2} = 5\,\mathrm{Hz}$.

V tomto případě má druhá spektrální složka analogového signálu $x(t)$ větší kmitočet než je polovina vzorovacího kmitočtu $f_2 > \frac{f_c}{2}$, což s sebou přináší tzv. „zrcadlení“, kdy se tato složka v rekonstruovaném signálu objeví jako „falešná“ s kmitočtem $f_c - f_2 = 2\,\mathrm{Hz}$ spadajícím do základního pásma $\langle 0, \frac{f_c}{2})$!



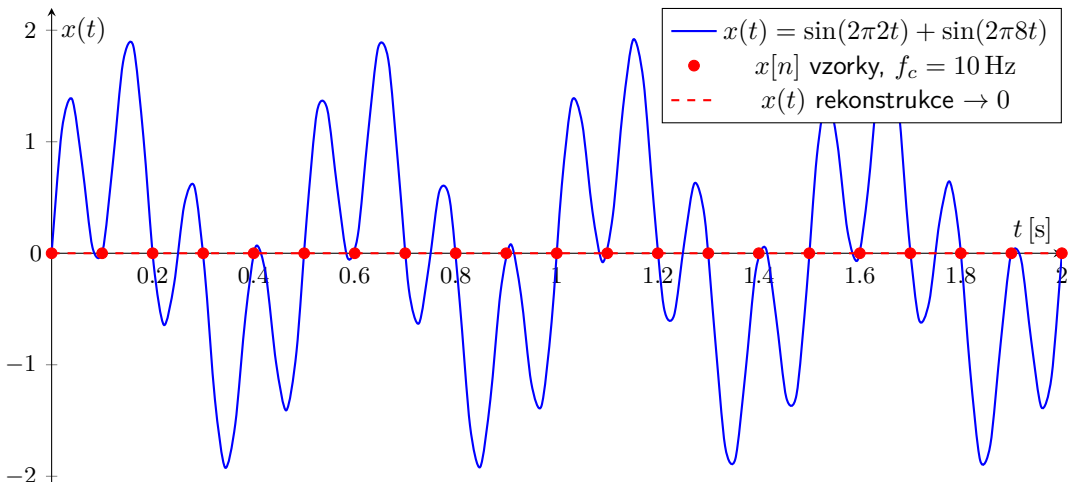
Obrázek 8.3: Vzorkování analogového signálu pro digitální zpracování při $f_1 = 1\,\mathrm{Hz} < \frac{f_c}{2}$ a $f_2 = 8\,\mathrm{Hz} > \frac{f_c}{2}$.

Při vzorkování harmonického signálu s kmitočtem $f \in \left\langle \frac{f_c}{2}, f_c \right)$ se tedy díky „zrcadlení“, objeví signál v základním pásmu s kmitočtem $f_c - f = 2\,\mathrm{Hz}$, k čemuž pak dochází i v dalších pásmech nad f_s (v našem případě dostaneme stejný výsledek pro $f = 12, 18, 22, \ldots\ \mathrm{Hz}$). Řešením je aplikace dolní propusti s $f_s \leq \frac{f_c}{2}$ před vzorkováním signálu.



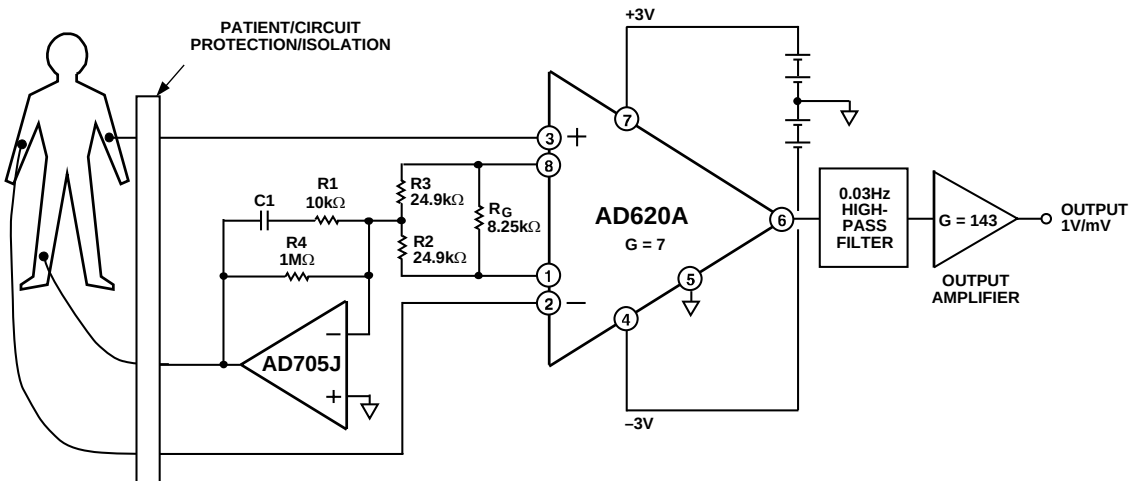
Obrázek 8.4: Vzorkování analogového signálu pro digitální zpracování při $f = 8\,\mathrm{Hz} > \frac{f_c}{2}$.

Pokud $x(t) = \sin(2\pi 2t) + \sin(8\pi t)$, tj. $f_1 = f_c - f_2$, tak se v rekonstruovaném signálu obě složky právě vyruší vzhledem k tomu, že „zrcadlená“ složka má obrácenou fázi. Z uvedeného je zřejmé, že před vzorkováním je třeba ze signálu signálu odstranit (filtrovat analogovou dolní propustí) spektrální složky s kmitočty vyššími než $\frac{f_c}{2}$!



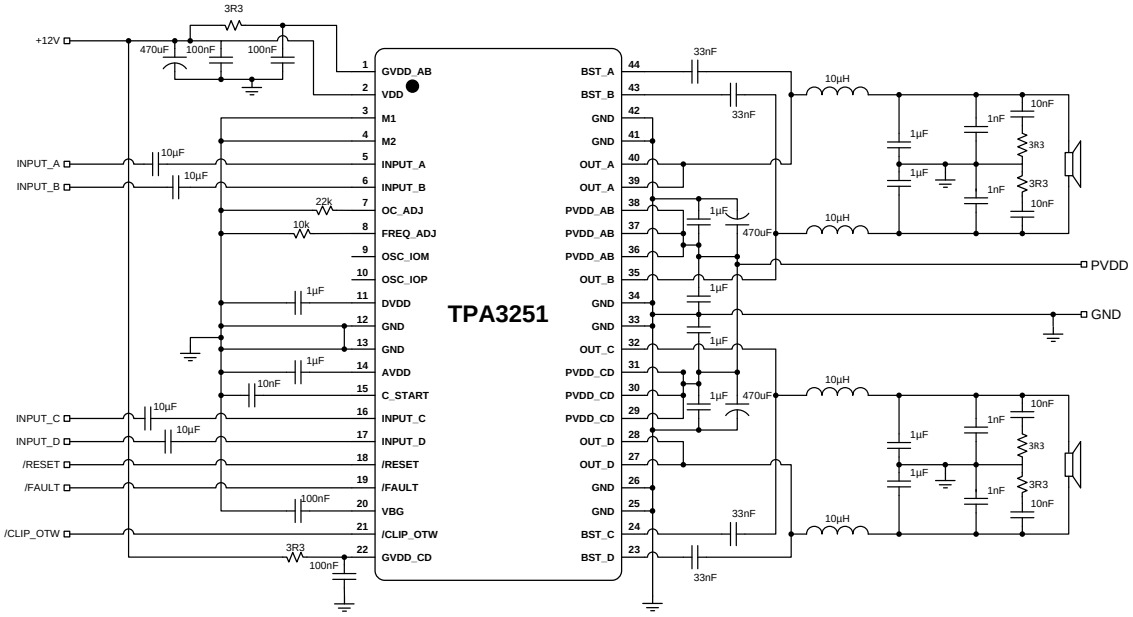
Obrázek 8.5: Vzorkování analogového signálu pro digitální zpracování při $f_1 = 2\,\mathrm{Hz} < \frac{f_c}{2}$ a $f = 8\,\mathrm{Hz} > \frac{f_c}{2}$.

Filtry v elektronických aplikacích



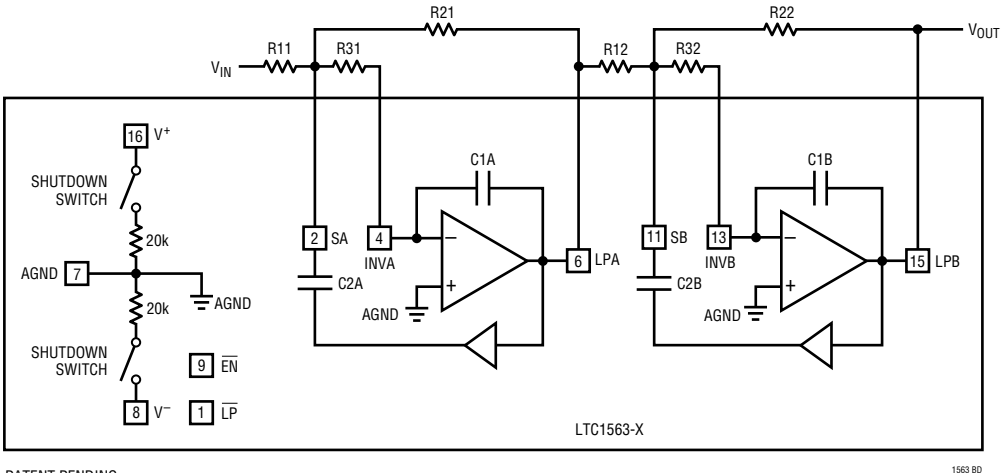
Obrázek 8.6: Zesilovač pro snímáni biologických signálů – Elektrokardiograf (EKG) s aktivním potlačením (filtrací) rušivých složek, převzato z www.analog.com.

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL



Obrázek 8.7: Digitální zesilovač tpa3251 s výstupními LC filtry, převzato z www.ti.com.

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL



Obrázek 8.8: LTC1563 – aktivní RC filtr pro antialiasingové, rekonstrukční, . . . filtry, převzato z www.analog.com.

Uvedené zapojení je typické pro realizaci filtrů zejména nízkých kmitočtů. Vlastní realizaci však předchází nejprve návrh (syntéza) přenosové funkce, který uvádí následující kapitola 9. V této kapitole ukážeme vlastnosti základních přenosových funkcí, ze kterých se pak přenosové funkce všech analogových filtrů skládají.

8.2. Přenosové funkce filtrů

Přenosová funkce filtru je racionálně lomenou funkcí proměnné s (Laplaceova operátoru)[1].

$$H(s) = \frac{s^M + a_{M-1}s^{M-1} + \cdots + a_0}{b_N s^N + b_{N-1}s^{N-1} + \cdots + b_0} = H_C \frac{(s - s_{n_1})(s - s_{n_2}) \cdots (s - s_{n_M})}{(s - s_{p_1})(s - s_{p_2}) \cdots (s - s_{p_N})}, \quad \text{kde } H_C = H_0 \frac{\prod_{k=1}^{N} -s_{p_k}}{\prod_{i=1}^{M} -s_{n_i}}, \tag{8.1}$$

přičemž s_{p_k} nazýváme póly a s_{n_i} nuly přenosové funkce a $H_0 = \lim_{s \to 0} H(s) = H(0)$ je pak přenos pro stejnosměrný signál, tzv. „DC gain“. Póly a nuly jsou velmi důležité parametry filtru, které udávají celkové chování systému jak v časové, tak kmitočtové oblasti! Neudávají pouze posun modulové charakteristiky (zisk/útlum) H_0.

Pro přenosovou funkci filtru dále platí $M \leq N$. Např. pro dolní propust evidentně platí $H(0) = H_0 > H_\infty = \lim_{\omega \to \infty} H(j\omega)$ a v mnoha případech je $M < N$, jelikož $H_\infty = 0$. Naopak pro ideální horní propust platí $M = N$, protože $H_\infty > H_0$.

Pro reálné systémy (s parazitními vlivy na vf) platí $M < N$, tj. pro velmi vysoké kmitočty jejich přenos klesá (vliv parazitních kapacit a indukčností, případně ztrátových vedení).

[1] Vyplývá to z popisu lineárních soustav pomocí lineárních diferenciálních rovnic, které po Laplaceově transformaci (derivace vede na násobení operátorem s) vedou na polynomiální tvar.

8.2.1. Vlastnosti soustav s přenosovou funkcí 1. řádu

- Obecná přenosová funkce 1. řádu

$$H_1(s) = \frac{K(s - s_n)}{s - s_p} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Rightarrow} h(t) = K\big(\delta(t) + (s_p - s_n)\mathrm{e}^{s_p t}\big), \tag{8.2}$$

  $\delta(t)$ funkci obsahuje impulzní charakteristika $h(t)$ takový přenosových funkcí, pro které je $M = N$.

- Přenosová funkce dolní propusti (LP) 1. řádu, např. integrační RC článek

$$H_{\mathrm{LP1}}(s) = \frac{K}{s - s_p} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Rightarrow} h(t) = K\mathrm{e}^{s_p t}, \tag{8.3}$$

  kde $K \in \mathbb{R}$ je konstanta a $s_p \in \mathbb{R}$ je pól přenosové funkce. Pro $s_p < 0$ je systém stabilní, jelikož $\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$.

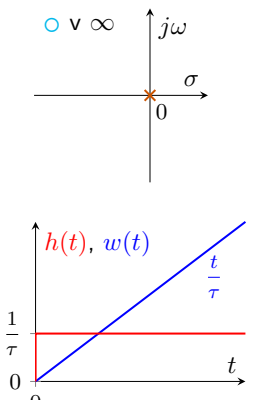
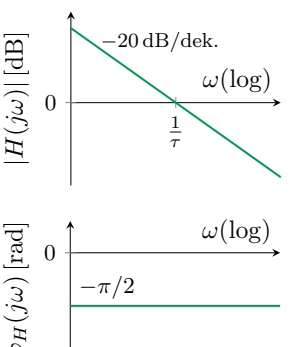
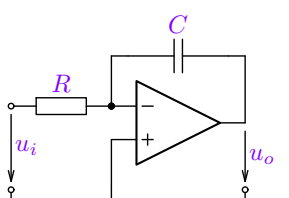
- Přenosová funkce horní propusti (HP), např. derivační RC článek

$$H_{\mathrm{HP1}}(s) = \frac{Ks}{s - s_p} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Rightarrow} h(t) = K(\delta(t) + s_p\mathrm{e}^{s_p t}) \tag{8.4}$$

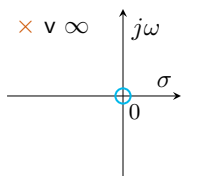
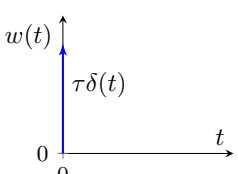
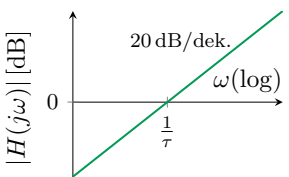
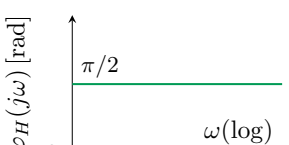
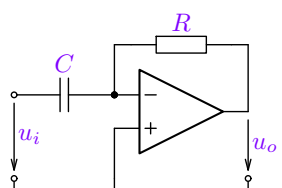
Je zřejmé, že na charakter časové odezvy (tj. i stabilitu) systému mají vliv pouze póly přenosové funkce. Nuly (společně s póly) přenosové funkce mají vliv na kmitočtovou charakteristiku systému $H(j\omega)$.

Následující tabulky uvádějí vlastnosti a charakteristiky všech systémů s přenosových funkcí 1. řádu.

V tabulkách jsou v závislosti na tvaru přenosové funkce uvedeny základní vlastnosti systému, tj. poloha pólů a nul a časové odezvy: impulzní $h(t)$ a přechodová charakteristika $w(t)$. Dále jsou uvedeny kmitočtové charakteristiky (amplitudová a fázová) a nakonec možná obvodová realizace dané přenosové funkce.

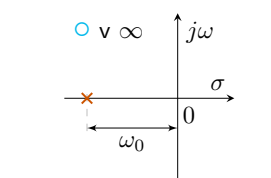
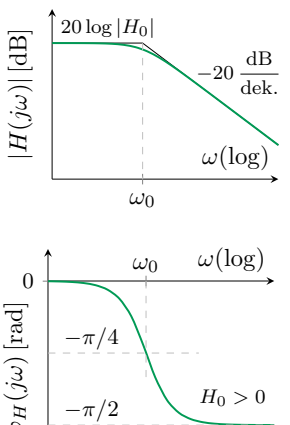
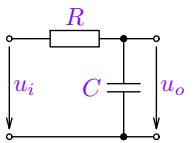
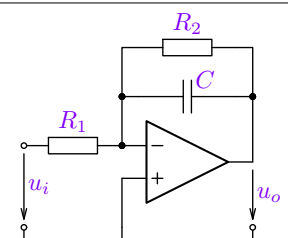
Přenosová funkce	Póly a nuly $H(s)$, časové odezvy	Kmitočtová amplitudová a fázová charakteristika	Obvodová realizace
Ideální integrátor $H(s) = \frac{1}{s\tau}$ $h(t) = \frac{1}{\tau}$ $w(t) = \frac{t}{\tau}$			Realizace pasivním obvodem neexistuje. Invertující integrátor, viz 11.10  $\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = -\frac{1}{s\tau}$, $\tau = RC$

Tabulka 8.1: Vlastnosti ideálního integrátoru, viz také analýzy (systémovou i obvodovou).

Přenosová funkce	Póly a nuly $H(s)$, časové odezvy	Kmitočtová amplitudová a fázová charakteristika	Obvodová realizace
Ideální derivátor $H(s) = s\tau$ $h(t) = \tau \frac{\mathrm{d}\delta(t)}{\mathrm{d}t}$ $w(t) = \tau\delta(t)$	 	 	Realizace pasivním obvodem neexistuje. Invertující derivátor, viz 11.11  $\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = -s\tau,\ \tau = RC$

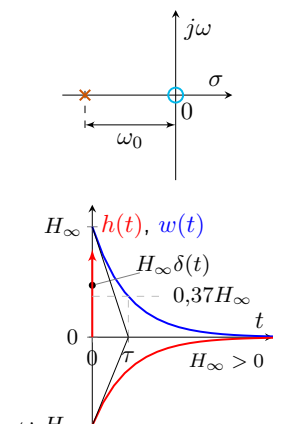
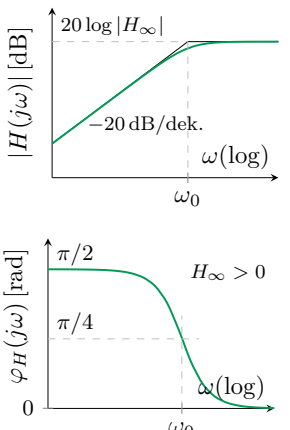
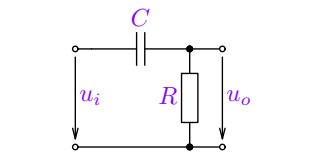
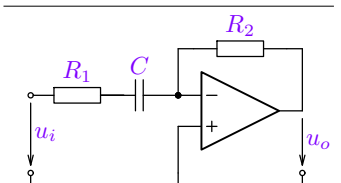
Tabulka 8.2: Vlastnosti ideálního derivátoru, viz také analýzy (systémovou i obvodovou).

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

Přenosová funkce	Póly a nuly $H(s)$, časové odezvy	Kmitočtová amplitudová a fázová charakteristika	Obvodová realizace
Dolní propust (LP_1), ztrátový integrátor $H(s) = \dfrac{H_0\omega_0}{s+\omega_0}$ $\omega_0 > 0,\ H(\infty) = 0$ $h(t) = \omega_0 H_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$ $w(t) = H_0\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ $\tau = \dfrac{1}{\omega_0}$			 $\omega_0 = \frac{1}{RC},\ H_0 = 1$  $\omega_0 = \frac{1}{R_2 C},\ H_0 = -\frac{R_2}{R_1}$

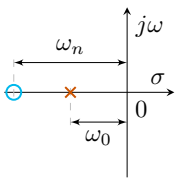
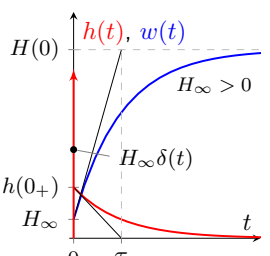
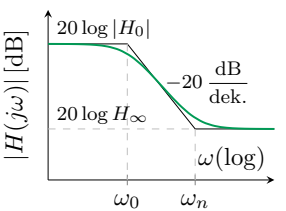
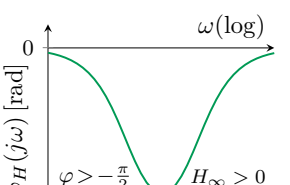
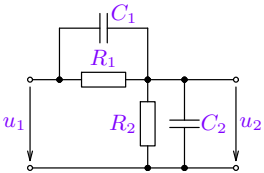
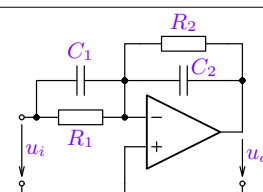
Tabulka 8.3: Vlastnosti dolní propusti 1. řádu, viz také analýzy (systémovou i obvodovou).

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

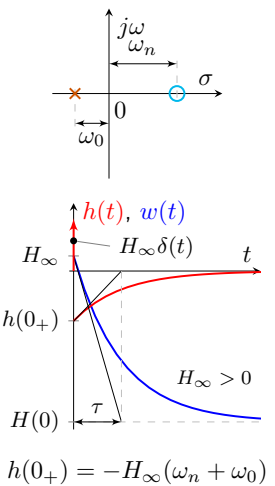
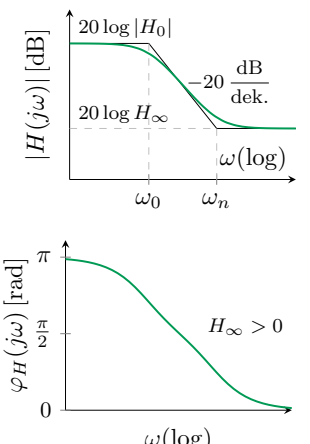
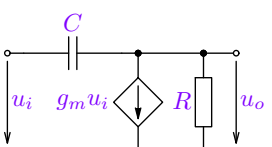
Přenosová funkce	Póly a nuly $H(s)$, časové odezvy	Kmitočtová amplitudová a fázová charakteristika	Obvodová realizace
Horní propust (HP_1), ztrátový derivátor $H(s) = \frac{H_\infty s}{s+\omega_0}$ $\omega_0 > 0,\ H(0) = 0$ $h(t) = H_\infty\big(\delta(t) - -\omega_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\big)$ $w(t) = H_\infty \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$ $\tau = \frac{1}{\omega_0}$			 $\omega_0 = \frac{1}{RC},\ H_\infty = 1$  $\omega_0 = \frac{1}{R_1 C},\ H_\infty = -\frac{R_2}{R_1}$

Tabulka 8.4: Vlastnosti horní propusti 1. řádu, viz také analýzy (systémovou i obvodovou).

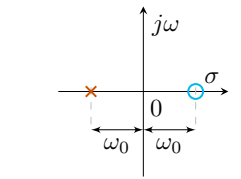
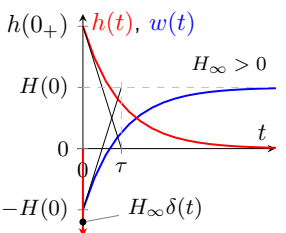
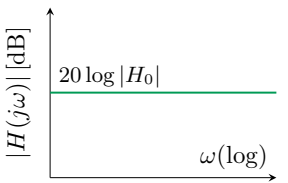
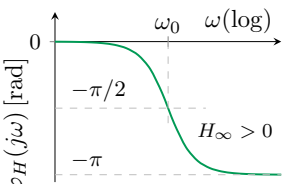
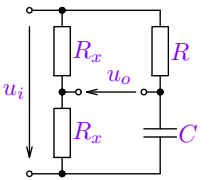
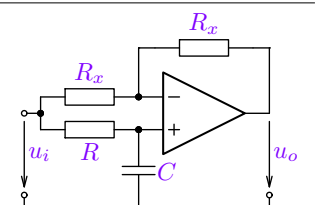
© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

Přenosová funkce	Póly a nuly $H(s)$, časové odezvy	Kmitočtová amplitudová a fázová charakteristika	Obvodová realizace
$H(s) = H_\infty \dfrac{s+\omega_n}{s+\omega_0}$ $\omega_0 > 0,\ \omega_n > 0$ $H(0) = H_\infty \dfrac{\omega_n}{\omega_0}$ $h(t) = H_\infty\big(\delta(t) + +(\omega_n-\omega_0)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\big)$ $w(t) = H(0) + +\big(H_\infty - H(0)\big)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$ $\tau = \dfrac{1}{\omega_0}$	  $h(0_+) = H_\infty(\omega_n - \omega_0)$	 	 $\omega_0 = \frac{1}{(R_1\|R_2)(C_1+C_2)},\ \omega_n = \frac{1}{R_1C_1}$ $H_0 = \frac{R_2}{R_1+R_2},\ H_\infty = \frac{C_1}{C_1+C_2}$  $\omega_0 = \frac{1}{R_2C_2},\ \omega_n = \frac{1}{R_1C_1}$ $H_0 = -\frac{R_2}{R_1},\ H_\infty = -\frac{C_1}{C_2}$

Tabulka 8.5: Vlastnosti obecného systému 1. řádu pro $s_n = -\omega_n$, viz také analýzy (systémovou i obvodovou).

Přenosová funkce	Póly a nuly $H(s)$, časové odezvy	Kmitočtová amplitudová a fázová charakteristika	Obvodová realizace
$H(s) = H_\infty \dfrac{s-\omega_n}{s+\omega_0}$ $\omega_0 > 0,\ \omega_n > 0$ $H(0) = -H_\infty \dfrac{\omega_n}{\omega_0}$ $h(t) = H_\infty\big(\delta(t) - -(\omega_n+\omega_0)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\big)$ $w(t) = H(0) + +\big(H_\infty - H(0)\big)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$ $\tau = \dfrac{1}{\omega_0}$	 $h(0_+) = -H_\infty(\omega_n+\omega_0)$		**Systém s tzv. neminimální fází** – s nulou přenosu v pravé polorovině, která má vliv jak na časovou odezvu v ustáleném stavu (obrací fázi), tak zejména na fázovou charakteristiku, což má vliv na stabilitu zpětnovazebních obvodů, viz kapitolu 10.8.4.  $\omega_0 = \frac{1}{RC},\ \omega_n = \frac{g_m}{C}$ $H_0 = -\frac{g_m}{R},\ H_\infty = 1.$

Tabulka 8.6: Vlastnosti obecného systému 1. řádu pro $s_n = \omega_n$, viz také analýzy (systémovou i obvodovou).

Přenosová funkce	Póly a nuly $H(s)$, časové odezvy	Kmitočtová amplitudová a fázová charakteristika	Obvodová realizace
Fázovací článek 1. ř. (All pass –AP1) $H(s) = H_\infty \frac{s-\omega_0}{s+\omega_0}$ $\omega_0 > 0$ $H(0) = -H_\infty$ $h(t) = H_\infty\big(\delta(t) - 2\omega_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\big)$ $w(t) = H(0)\big(1 - 2\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\big)$ $\tau = \frac{1}{\omega_0}$	  $h(0_+) = 2\omega_0 H(0)$	 	 $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, $H_0 = 1/2$, pro $H_0 = 1$ viz úpravu.  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, $H_0 = 1$

Tabulka 8.7: Vlastnosti fázovacího článku ($s_n = \omega_0$) 1. řádu, viz také analýzy (systémovou i obvodovou).

8.2.2. Vlastnosti soustav s přenosovou funkcí 2. řádu

- Obecná přenosová funkce 2. řádu (bikvadratická)

$$H_2(s) = \frac{K(s-s_{n_1})(s-s_{n_2})}{(s-s_{p_1})(s-s_{p2})} \quad \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Longrightarrow} \quad h(t) = K\delta(t) + K_1 \mathrm{e}^{s_{p_1}t} + K_2 \mathrm{e}^{s_{p_2}t}, \tag{8.5}$$

kde $K \in \mathbb{R}$ je konstanta, K_1, K_2 jsou závislé na K, s_{n_i} a s_{p_i},
$s_{n_i} \in \mathbb{C}$ jsou nuly a $s_{p_i} \in \mathbb{C}$ póly přenosové funkce.
Impulzní charakteristika opět obsahuje Diracův impulz $\delta(t)$, jelikož je $N = M$.

Charakter odezvy (stabilita) je plně dán póly přenosové funkce. Vliv pólů na kmitočtové i časové charakteristiky ukážeme na přenosové funkci dolní propusti.

- Přenosová funkce dolní propusti (LP) 2. řádu s komplexně sdruženými póly $s_{p_i} = \sigma_{p_i} \pm j\omega_{p_i}$:

$$H_{\mathrm{LP2}}(s) = \frac{K}{(s-s_{p_1})(s-s_{p_2})} = \frac{H_0\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \quad \forall\ \sigma_p < 0, \tag{8.6}$$

kde $H_0 = H_{\mathrm{LP2}}(0) = \frac{K}{s_{p_1}s_{p_2}} = \frac{K}{\omega_0^2}$ je stejnosměrný zisk,
$s_{p12} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}$ jsou (komplexně sdružené) póly přenosu,
$\omega_0 = |s_{p12}| = \sqrt{\omega_p^2 + \sigma_p^2}$ je tzv. zlomový kmitočet a
$Q = -\frac{1}{2}\frac{\omega_0}{\sigma_p} = \frac{1}{2\xi}$ je činitel jakosti, který se někdy udává pomocí tzv. relativní činitel tlumení $\xi = \frac{1}{2Q}$.

Impulzní charakteristika a její závislost na velikosti činitele jakosti Q

Impulzní charakteristiku systému s přenosovou funkcí $H_{LP}(s)$, tj. póly $s_{p_{12}} = \sigma_p \pm j\omega_p$ lze vyjádřit ve tvaru:

$$H_{\mathsf{LP2}}(s) = \frac{H_0\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \quad \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Longrightarrow} \quad h_{\mathsf{LP2}}(t) = \left| \frac{H_0\omega_0^2}{\omega_p} \mathrm{e}^{\sigma_p t} \sin(\omega_p t) \right|_{s_{p12}=\sigma_p \pm j\omega_p}. \tag{8.7}$$

Pro **stabilní systém** ($\lim_{t\to\infty} h_{LP}(t) = 0$) musí evidentně platit $\sigma_p < 0$, tj. **reálná část pólu musí být záporná**.

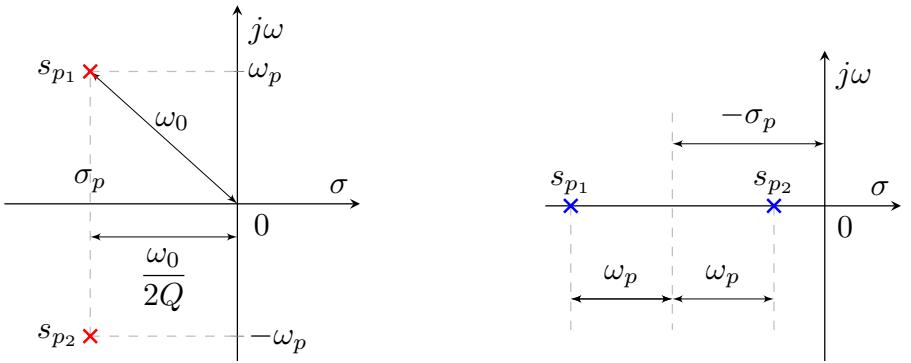
Vzhledem k tomu, že komplexně sdružený pól přenosu $H_{\mathsf{LP2}}(s)$ lze vyjádřit pomocí $s_{p_{12}} = \frac{\left(-1 \pm \sqrt{1-4Q^2}\right)\omega_0}{2Q}$, závisí charakter pólů na činiteli Q následovně:

1. $Q < \frac{1}{2}$, $\xi > 1$: dva reálné póly,
2. $Q = \frac{1}{2}$, $\xi = 1$: jeden dvojnásobný reálný pól,
3. $Q > \frac{1}{2}$, $\xi < 1$: komplexně sdružený pól $s_{p_{12}} = \sigma_p \pm j\omega_p \rightarrow$ časová odezva obsahuje periodickou odezvu!,

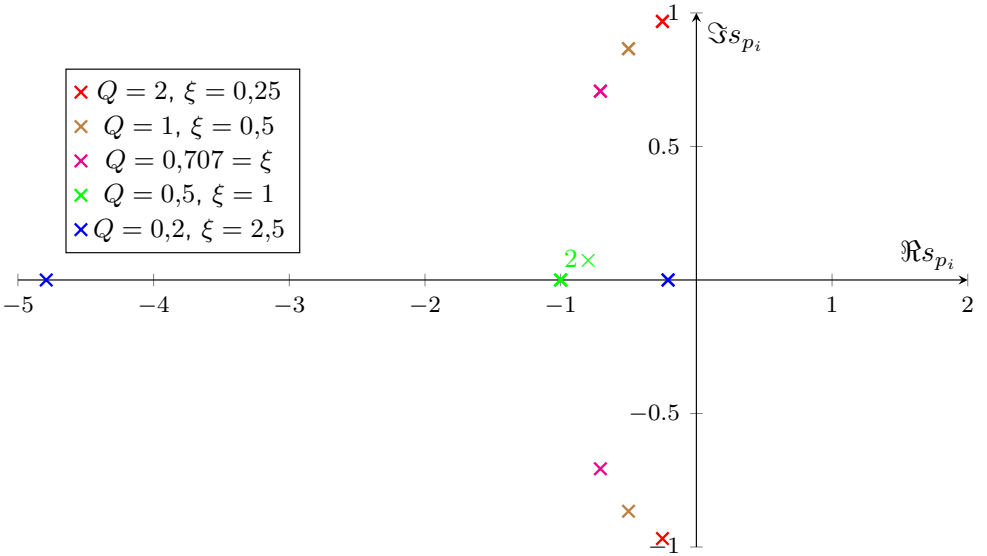
   $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} = \xi$: speciální případ komplexně sdruženého pólu s $\sigma_p = \omega_p$.

Časové i kmitočtové charakteristiky systému 2. řádu v závislosti na poloze pólů

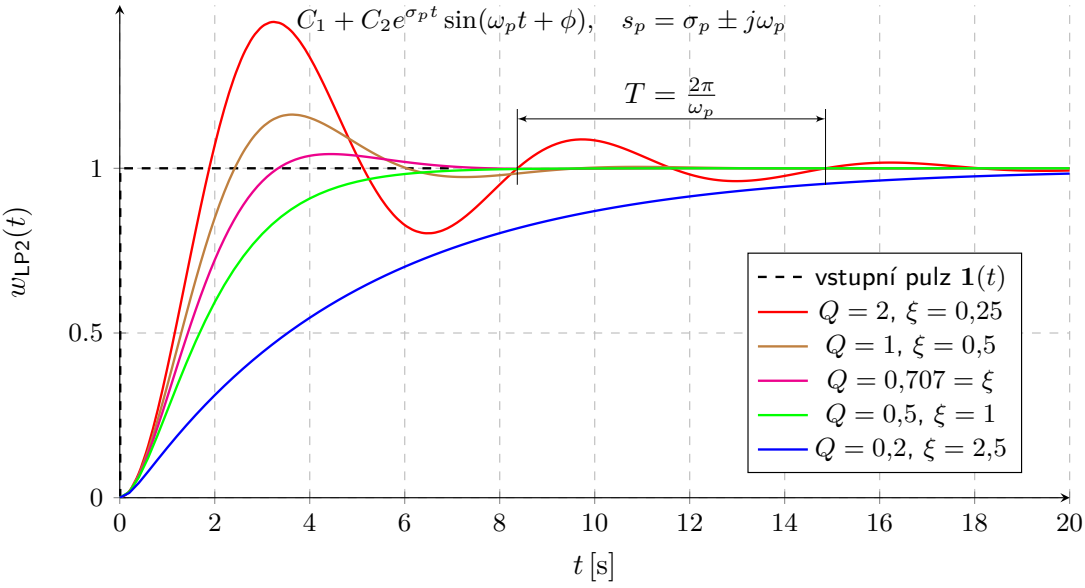
Analogicky jako u systému 1. řádu následují i v tomto případě ukázky vlastností všech systémů 2. řádu a to jak v časové, tak kmitočtové oblasti. Zde jsou navíc vlastnosti prezentovány pro různé činitele jakosti Q, což bude ukázáno na přenosové funkci dolní propusti. U ostatních typů přenosových funkcí jsou tyto závislosti analogické.



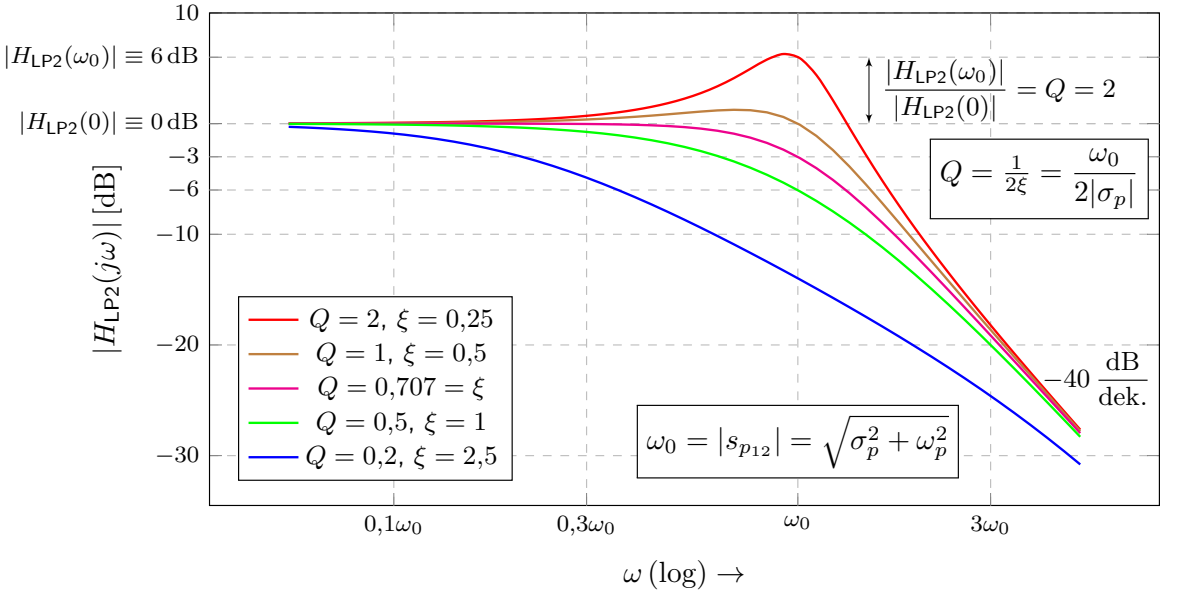
Obrázek 8.9: Grafická reprezentace pólů přenosové funkce 2. řádu v komplexní rovině s.



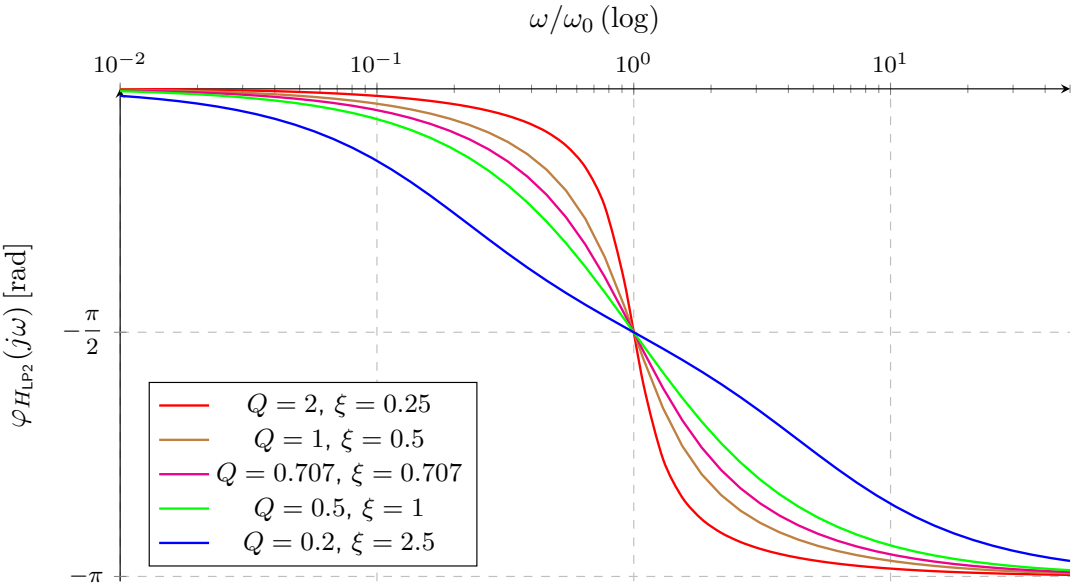
Obrázek 8.10: Poloha pólů bikvadratické funkce $H_{\mathrm{LP2}}(s)$ pro $\omega_0 = |s_{pi}| = 1$ a různé hodnoty Q.



Obrázek 8.11: Přechodová charakteristika $w_{\mathsf{LP2}}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H_{LP}(s)/s\}$ pro $H_0 = 1$, $\omega_0 = 1$ a různé hodnoty Q.

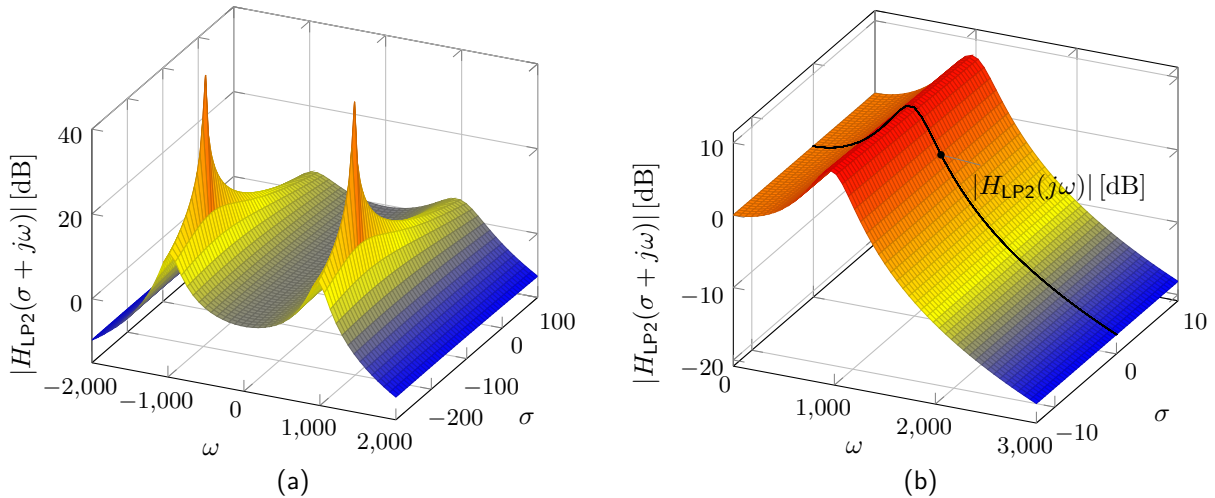


Obrázek 8.12: Amplitudová kmitočtová charakteristika $|H_{\mathrm{LP2}}(j\omega)|$ pro $H_{\mathrm{LP2}}(0) = H_0 = 1$ a různé hodnoty Q.

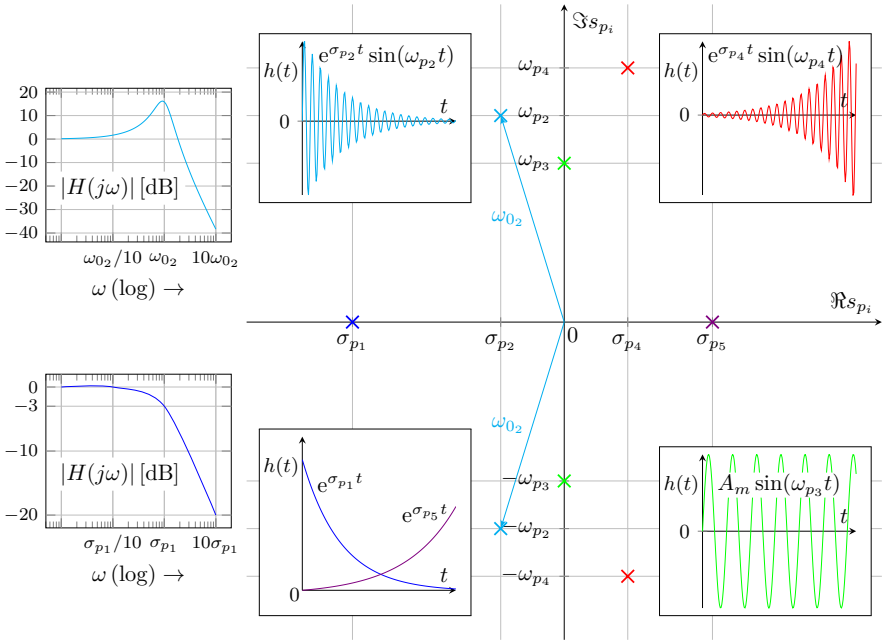


Obrázek 8.13: Fázová kmitočtová charakteristika $\angle H_{\mathrm{LP2}}(j\omega) = \varphi_{H_{\mathrm{LP2}}}(j\omega)$ pro $H_0 > 0$ a různé hodnoty Q.

Na následujícím obrázku je prostorové vykreslení přenosové funkce (8.6), tj. $H_{\mathsf{LP2}}(\sigma + j\omega)$ pro $s_{p_{12}} = \sigma_p \pm j\omega_p = 200 \pm j980 \Rightarrow \omega_0 \doteq 1000\,\mathrm{rad/s}$ a $Q \doteq 2{,}5$. Z obrázku (a) je zřejmá poloha pólů, pro které platí $|H_{\mathsf{LP2}}(s_{p_{12}})| \to \infty$. Ve výřezu na obrázku (b) je pak pro $\sigma = 0$ zvýrazněna amplitudová charakteristika $|H_{\mathsf{LP2}}(j\omega)|$.



Obrázek 8.14: 3D vykreslení funkce $|H(\sigma+j\omega)|\,[\mathrm{dB}]$ (a) a její výřez (b) s amplitudovou charakteristikou $|H_{\mathsf{LP2}}(j\omega)|$.



Vzdálenost pólu od počátku udává zlomový kmitočet kmitočtové charakteristiky $|s_p| = \omega_0$ a charakter pólu (reálný/komplexní) je pro stabilní systémy ($\sigma_p = \Re\{s_p\} < 0$) dán velikostí činitele jakosti Q, který určuje i převýšení amplitudové charakteristiky pro $\omega = \omega_0$ (viz obrázek 8.12). Z činitele Q lze usuzovat i na charakter časové odezvy (viz obrázek 8.11), kde tlumení je dáno tzv. absolutním činitelem tlumení $\sigma_p = \Re\{s_p\}$, tj. reálné části pólu a úhlový kmitočet kmitavé odezvy je dán tzv. vlastním (přirozeným) kmitočtem $\omega_p = \Im\{s_p\}$, tj. imaginární částí pólu.

Uvedené vlastnosti shrnuje souhrnná grafická ilustrace vlevo.

Obrázek 8.15: Vliv polohy pólů přenosové funkce na vlastnosti LTI systému 2. řádu.

Stejně jako u dolní propusti jsou vlastnosti ostatních funkcí dány polohou pólů, tj. velikostí Q. Jmenovatel dalších přenosových funkcí je vždy stejný a jejich typ je určen nulami přenosu.

- Přenosová funkce horní propusti (HP) 2. řádu (dvojnásobná nula přenosu v počátku):

$$H_{\mathrm{HP2}}(s) = \frac{H_\infty s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \quad \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Longrightarrow} \quad h_{HP}(t) = \Big|_{s_{p12}=\sigma_p \pm j\omega_p} H_\infty \delta(t) + \mathrm{e}^{\sigma_p t} K_H \sin(\omega_p t + \varphi_H) \tag{8.8}$$

  kde H_∞ je zisk pro $\omega \to \infty$, tj. $\lim\limits_{\omega\to\infty} |H_{\mathrm{HP2}}(j\omega)| = H_{\mathrm{HP2}}(\infty)$.

- Přenosová funkce pásmové propusti (BP) 2. řádu (nula přenosu v počátku):

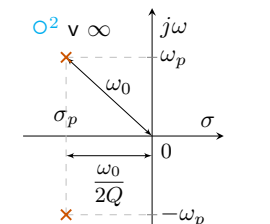
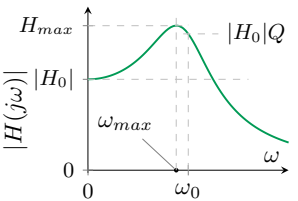
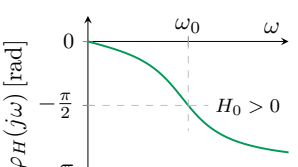
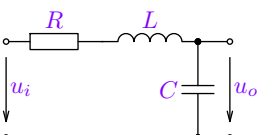
$$H_{\mathrm{BP2}}(s) = \frac{H_B \frac{\omega_0}{Q} s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \quad \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Longrightarrow} \quad h_{BP}(t) = \Big|_{s_{p12}=\sigma_p \pm j\omega_p} \mathrm{e}^{\sigma_p t} K_B \sin(\omega_p t + \varphi_B) \tag{8.9}$$

- Obecný tvar „eliptické“ přenosové funkce 2. řádu (komplexně sdružená nula přenosu):

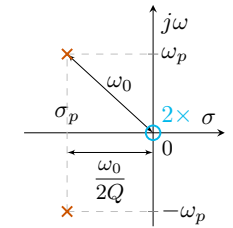
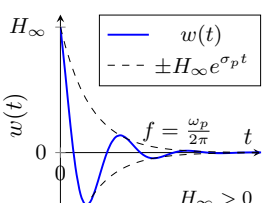
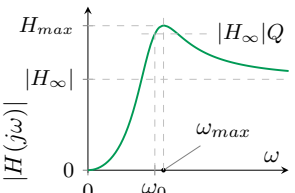
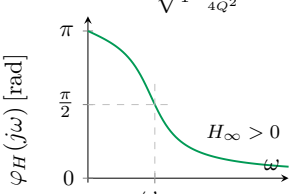
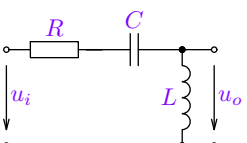
$$H_2(s) = H_\infty \frac{(s - s_{n_1})(s - s_{n_2})}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} = \frac{H_\infty(s^2 + \omega_n^2)}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Longrightarrow} h_{HP}(t) = \Big|_{s_{p12}=\sigma_p \pm j\omega_p} H_\infty \delta(t) + \mathrm{e}^{\sigma_p t} K_2 \sin(\omega_p t + \varphi_2). \tag{8.10}$$

  kde $s_{n12} = \pm j\omega_n$ je evidentně komplexně sdružená nula přenosu na imaginární ose (využívané pro filtry). Podle polohy (velikosti) nuly $\omega_n = |s_n|$ vůči velikosti pólu $\omega_0 = |s_{p12}|$ rozlišujeme tři případy, jak bude uvedeno níže.

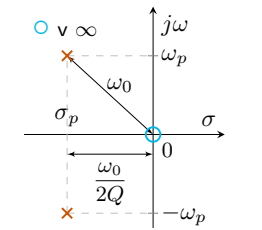
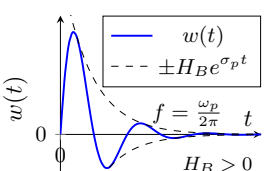
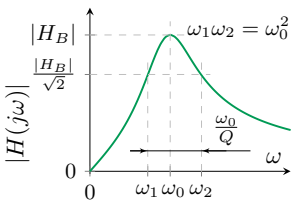
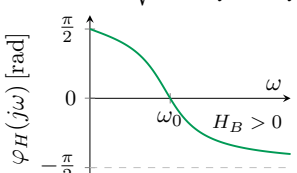
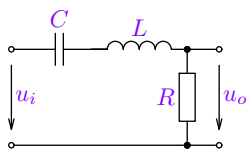
V následujících tabulkách jsou shrnuty charakteristiky všech typů bikvadratických přenosových funkcí (2. řádu).

Přenosová funkce	Póly a nuly $H(s)$, časové odezvy	Kmitočtová amplitudová a fázová charakteristika	Obvodová realizace
Dolní propust (LP_2) $H(s) = \frac{H_0\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$ $Q > 0,\ \omega_0 > 0,$ $H(\infty) = 0$ $h(t),\ w(t)$ viz analýzu, $h(0_+) = \left.\frac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t}\right\|_{t=0_+} = 0$	 $g(t) = H_0(1 - e^{\sigma_p t})$	 $\omega_{max} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ $H_{max} = \frac{\lvert H_0\rvert Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$ 	 $H_0 = 1,$ $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},\ Q = \omega_0\frac{L}{R}$ další modifikace zapojení aktivní realizace ⇒ viz kapitolu 17

Tabulka 8.8: Vlastnosti základní dolní propusti 2. řádu, viz také analýzy (systémovou i obvodovou).

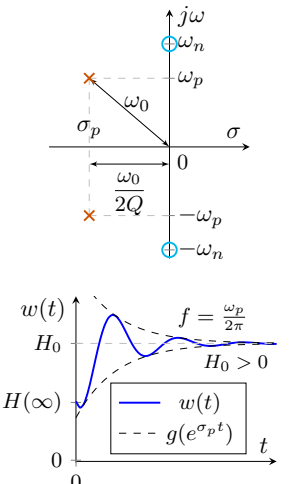
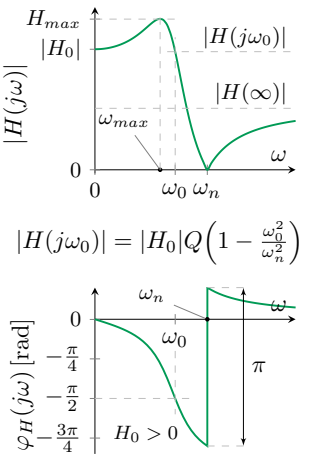
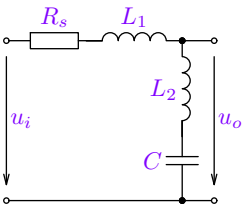
Přenosová funkce	Póly a nuly $H(s)$, časové odezvy	Kmitočtová amplitudová a fázová charakteristika	Obvodová realizace
Horní propust (HP_2) $H(s) = \frac{H_\infty s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$ $Q > 0,\ \omega_0 > 0$ $H(0) = 0$ $h(t)$, $w(t)$ viz analýzu, $h(0_+) = -H_\infty \frac{\omega_0}{Q}$	 	 $\omega_{max} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}}$ $H_{max} = \frac{\|H_\infty\|Q}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$ 	 $H_\infty = 1,$ $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},\ Q = \omega_0 \frac{L}{R}$ další modifikace zapojení aktivní realizace ⇒ viz kapitolu 17

Tabulka 8.9: Vlastnosti základní horní propusti 2. řádu, viz také analýzy (systémovou i obvodovou).

Přenosová funkce	Póly a nuly $H(s)$, časové odezvy	Kmitočtová amplitudová a fázová charakteristika	Obvodová realizace
Pásmová propust (BP_2) $H(s) = \dfrac{H_B \frac{\omega_0}{Q} s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}$ $Q > 0,\ \omega_0 > 0$ $H(0) = H(\infty) = 0$ $h(t),\ w(t)$ viz analýzu, $h(0_+) = H_B \dfrac{\omega_0}{Q}$	 	 $\omega_1, \omega_2 = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \mp \frac{\omega_0}{2Q}$ 	 $H_B = 1,$ $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},\ Q = \omega_0 \frac{L}{R}$ další modifikace zapojení aktivní realizace ⇒ viz kapitolu 17

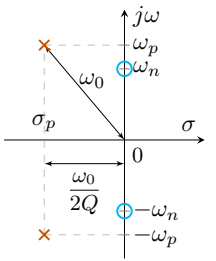
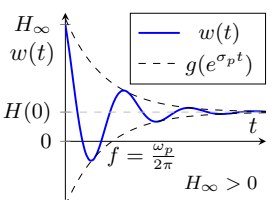
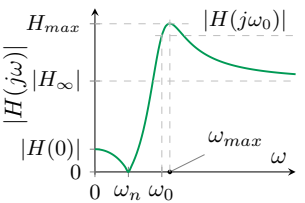
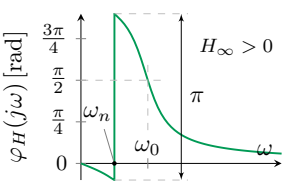
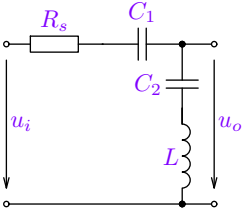
Tabulka 8.10: Vlastnosti pásmové propusti 2. řádu, viz také analýzy (systémovou i obvodovou).

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

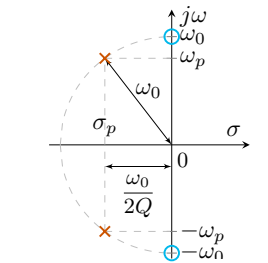
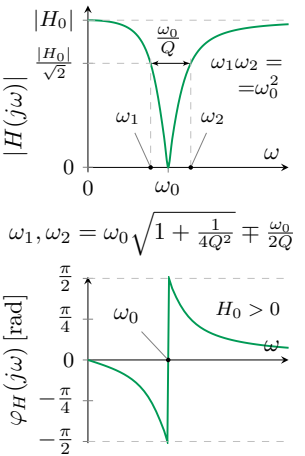
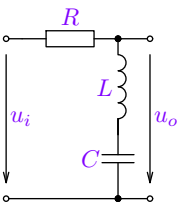
Přenosová funkce	Póly a nuly $H(s)$, časové odezvy	Kmitočtová amplitudová a fázová charakteristika	Obvodová realizace
Dolní propust „eliptická“ (Low pass notch – LPN) $H(s) = \dfrac{H_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_n^2}(s^2+\omega_n^2)}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$ $\omega_n > \omega_0 > 0$ $Q > 0,\ H(\infty) = H_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_n^2}$ $h(t)$, $w(t)$ viz analýzu, $h(0_+) = -H_0 \dfrac{\omega_0^2}{\omega_n^2}\dfrac{\omega_0}{Q}$			 $H_0 = 1,\ H(\infty) = \frac{L_2}{L_1+L_2}$ $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{(L_1+L_2)C}}$ $\omega_n = \frac{1}{\sqrt{L_2 C}}$ $Q = \omega_0 \frac{(L_1+L_2)}{R_s}$ aktivní realizace ⇒ viz kapitolu 17

Tabulka 8.11: Vlastnosti eliptické dolní propusti 2. řádu, viz také analýzy (systémovou i obvodovou).

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

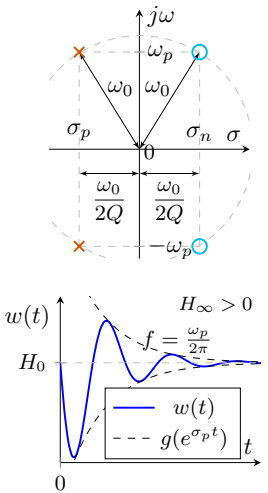
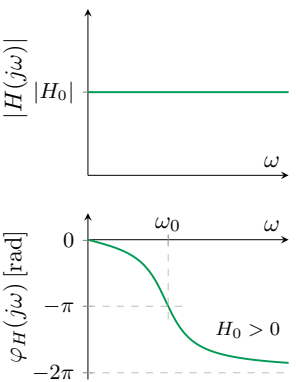
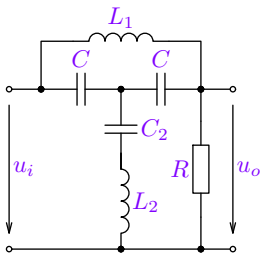
Přenosová funkce	Póly a nuly $H(s)$, časové odezvy	Kmitočtová amplitudová a fázová charakteristika	Obvodová realizace
Horní propust „eliptická“ (High pass notch – HPN) $H(s) = \frac{H_\infty(s^2+\omega_n^2)}{s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0^2}$ $\omega_0 > \omega_n > 0$ $Q > 0,\ H(0) = H_\infty \frac{\omega_n^2}{\omega_0^2}$ $h(t),\ w(t)$ viz analýzu, $h(0_+) = -H_\infty \frac{\omega_0}{Q}$	 	 $\lvert H(j\omega_0)\rvert = \lvert H_\infty\rvert Q\left(1-\frac{\omega_n^2}{\omega_0^2}\right)$ 	 $H_\infty = 1,\ H(0) = \frac{C_1}{C_1+C_2}$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_1C_2L}}$ $\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC_2}},\ Q = \omega_0 \frac{L}{R}$ aktivní realizace ⇒ viz kapitolu 17

Tabulka 8.12: Vlastnosti eliptické horní propusti 2. řádu, viz také analýzy (systémovou i obvodovou).

Přenosová funkce	Póly a nuly $H(s)$, časové odezvy	Kmitočtová amplitudová a fázová charakteristika	Obvodová realizace
Pásmová zádrž (Notch – N) $H(s) = \frac{H_0(s^2+\omega_0^2)}{s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0^2}$ $\omega_0 > 0,\ Q > 0$ $H(\infty) = H(0) = H_0$ $h(t),\ w(t)$ viz analýzu, $h(0_+) = -H_0\frac{\omega_0}{Q}$			 $H_0 = H(\infty) = 1,$ $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},\ Q = \omega_0\frac{L}{R}$ další modifikace zapojení aktivní realizace ⇒ viz kapitolu 17

Tabulka 8.13: Vlastnosti pásmové zádrže 2. řádu, viz také analýzy (systémovou i obvodovou).

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

Přenosová funkce	Póly a nuly $H(s)$, časové odezvy	Kmitočtová amplitudová a fázová charakteristika	Obvodová realizace
Fázovací článek 2. řádu (All pass – AP2) $H(s) = H_0 \dfrac{s^2 - \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$ $\omega_0 > 0,\ Q > 0$ $H(\infty) = H(0) = H_0$ $h(t),\ w(t)$ viz analýzu, $h(0_+) = -2H_0\dfrac{\omega_0}{Q}$			 $H_0 = H(\infty) = 1,$ $C = \frac{Q}{\omega_0 R},\ C_2 = \frac{2Q}{\omega_0 R(Q^2-1)}$ $L_1 = \frac{2R}{\omega_0 Q},\ L_2 = \frac{QR}{2\omega_0}$ aktivní realizace ⇒ viz kapitolu 17

Tabulka 8.14: Vlastnosti fázovacího článku 2. řádu, viz také analýzy (systémovou i obvodovou).

8.2.3. Rekapitulace

Podobně jako u dolní propusti 2. řádu, můžeme učinit i závěry pro ostatní přenosové funkce druhého řádu. Jejich vlastnostem je třeba se věnovat vzhledem k možnosti komplexních kořenů (pólů a nul). V případě reálných kořenů lze přenosovou funkci rozdělit na součin dvou funkcí 1. řádu, což v případě komplexně sdružených kořenů nelze!

- Komplexně sdružená dvojice pólů má zásadní vliv na charakter časové odezvy. Vzhledem k tomu, že se jednotlivé typy přenosových funkcí liší pouze polohou nul, je charakter jejich časových odezev (kmitavý/nekmitavý) stejný a liší se pouze násobnými koeficienty a aditivním členem.
- Při komplexně sdružených pólech $s_{p_{12}} = \sigma_p \pm j\omega_p$, tj. činiteli jakosti pólu $Q = \frac{1}{2}\frac{\omega_0}{|\sigma_p|} > \frac{1}{2}$, obsahuje časová odezva harmonickou (kmitavou) složku, která je dobře patrná v případech, kdy je $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, viz obrázek 8.11. Její úhlový kmitočet je dán imaginární složkou pólu ω_p.
- Pro stabilní systémy je časová odezva tlumená, přičemž absolutní činitel tlumení odpovídá reálné složce pólu $\sigma_p \Rightarrow$, tj. platí $\sigma_p < 0$. Impulzní charakteristika $h(t)$ pak musí konvergovat k nule a přechodová charakteristika $w(t) = \int_0^t h(\tau)\mathrm{d}\tau$ dle (7.4) musí konvergovat ke stejnosměrné hodnotě (konstantě), odpovídající přenosu $H(0)$ (DC gain≡zisk), viz výpočet koncové hodnoty v tabulce na straně VII-14.
- Komplexně sdružené póly mají vliv i na strmost kmitočtové charakteristiky (amplitudové i fázové) v okolí zlomového kmitočtu $\omega_0 = |s_{p_{12}}|$, která se zvyšuje se zvyšující se hodnotou Q, viz 8.12 a 8.13. Pro $\omega = \omega_0$ je při $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$, tj. $\sigma_p = \omega_p$ pokles amplitudové charakteristiky $|H(j\omega_0)|$ pouze $3\,\mathrm{dB}$ (při dvojnásobném reálném pólu je pokles $2 \times 3\,\mathrm{dB} = 6\,\mathrm{dB}$). Pro $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ pak nastává na modulové charakteristice převýšení, jehož velikost je pro základní přenosy (nula v počátku nebo ∞) rovna právě Q, viz tabulky 8.8 a 8.9.

- Pro základní dolní propust 2. řádu s přenosem 8.6 dle tabulky 8.8 je evidentně $H(0) = H_0$ a $H(\infty) = 0 \Rightarrow$ utlumuje signály pro $\omega > \omega_0$. Přechodová charakteristika začíná v nule (nulové počáteční podmínky) a má zde nulovou derivaci (viz také obdobou realizaci – kapacitor s $u_C(0) = 0$ je v $t = 0$ nabíjen proudem $i_L(0) = 0$)! Končí v $w(\infty) = H_0$ (po odeznění přechodového děje přenáší DC signál, tj. $1\,\mathrm{V}$)!
- Pro základní horní propust 2. řádu s přenosem 8.8 dle tabulky 8.9 je evidentně $H(0) = 0$ a $H(\infty) = H_\infty \Rightarrow$ utlumuje signály s $\omega < \omega_0$. Přechodová charakteristika nezačíná v nule, ale $w(0) = H_\infty$, jelikož $u_C(0+) = 0$, $i_L(0+) = 0$ a končí v $w(\infty) = 0$ (v čase připojení DC signálu se tento objeví na výstupu a po odeznění přechodového děje se nepřenáší)!
- Pro pásmovou propust 2. řádu s přenosem 8.9 dle tabulky 8.10 je evidentně $H(0) = H(\infty) = 0$ a $|H(\omega_0)| = |H_B| \Rightarrow$ utlumuje signály pro $\omega \neq \omega_0$. Přechodová charakteristika začíná i končí v nule, tj. v čase připojení DC signálu i po ustálení je výstup nulový (nepřenáší vysoké kmitočty ani DC signál – nízké kmitočty)!
- Pro „eliptickou" dolní propust 2. řádu s přenosem 8.10 a $\omega_n > \omega_0$ dle tabulky 8.11 je $H(0) = H_0$ a $H(\infty) = H_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_n^2} \Rightarrow$ utlumuje signály pro $\omega > \omega_0$ vzhledem k relaci $\omega_n > \omega_0$, nicméně $H(\infty) \neq 0$! K totálnímu útlumu dochází v bodě $\omega = \omega_n \Rightarrow |H(j\omega_n)| = 0$. Přechodová charakteristika nezačíná v nule, ale $H(\infty)$ (viz také obdobou realizaci – vstupní napětí se v $t = 0_+$ rozdělí v poměru indukčností, viz. 2.2.3)! Končí v $w(\infty) = H_0$ (po odeznění přechodového děje přenáší DC signál)!
- Pro „eliptickou" holní propust 2. řádu s přenosem 8.10 a $\omega_n < \omega_0$ dle tabulky 8.12 je $H(\infty) = H_\infty$ a $H(0) = H_\infty \frac{\omega_n^2}{\omega_0^2} \Rightarrow$ utlumuje signály pro $\omega < \omega_0$ vzhledem k relaci $\omega_n < \omega_0$, nicméně $H(0) \neq 0$! K totálnímu útlumu dochází také v bodě $\omega = \omega_n \Rightarrow |H(j\omega_n)| = 0$. Přechodová charakteristika začíná v $H(\infty)$ (vstupní

napětí se v $t = 0_+$ rozdělí v obráceném poměru kapacit, viz. 2.2.3) a končí v $w(\infty) = H_0 \neq 0$ (po odeznění přechodového děje částečně propouští i DC signál)!

- Pro pásmovou zádrž 2. řádu s přenosem 8.10, kde $\omega_n = \omega_0$ dle tabulky 8.13 je evidentně $H(0) = H_\infty = H_0$, přičemž pro $\omega = \omega_0$ dochází k totálnímu útlumu, tj. $|H(j\omega_0)| = 0$. Přechodová charakteristika začíná i končí v H_0 (po odeznění přechodového děje se vrací na hodnotu H_0, tj. propouští jak DC signál, tak signál s $\omega \gg \omega_0$)!
- Komplexně sdružená nula na imaginární ose u přenosu 8.10, tj. dle tabulky 8.11 až 8.13 má pro $\omega = \omega_n$ za následek jak nulový přenos $|H(j\omega_n)| = 0 = -\infty\,\mathrm{dB}$, tak i skokovou změnu fáze o π! Je to zřejmé z čitatele přenosu, kdy $s^2 + \omega_n^2$ vede v kmitočtové oblasti na $(j\omega)^2 + \omega_n^2 = -\omega^2 + \omega_n$, tj. pro pro $\omega < \omega_n$ je fáze tohoto členu nulová, ale pro $\omega > \omega_n$ je fáze evidentně $\pm\pi$.
- Pro fázovací článek 2. řádu s přenosem dle tabulky 8.14 je $s_{n_{12}} = -s_{p_{12}}$, proto je $|H(j\omega)| = H_0$ konstantou. Mění se pouze fázová charakteristika $\varphi_H(j\omega)$, přičemž nula přenosu má stejný vliv jako pól (nula je v pravé polorovině, tj. mění fázi do záporných hodnot). Přechodová charakteristika začíná i končí v H_0 podobně jako u pásmové zádrže 2. řádu (po odeznění přechodového děje se vrací na hodnotu H_0, přičemž propouští stejně signály všech kmitočtů, nicméně je to dynamický systém – zpožďuje signál)!

Mnohé z uvedených skutečností si může čtenář ověřit, mimo uvedených odkazů na GEEC, také zde, případně si po stažení zdrojového souboru pro SW Maple, může výrazy upravovat a přidávat další výpočty. Viz také kapitolu U.6, kde si lze znalosti procvičit.

Z uvedeného je zřejmé, že vždy platí $w(0) = H(\infty)$ a $w(\infty) = H(0)$, což vyplývá výpočtu z počáteční a koncové hodnoty v tabulce na straně VII-14. Zde je tato skutečnost ověřena i na obvodových realizacích (chování akumulačních prvků pro nekonečně rychlou změnu – připojení jednotkového skoku a pro ustálený stejnosměrný stav – odeznění přechodového děje).

Je také zřejmé, že časové a kmitočtové vlastnosti dynamického systému jsou pevně svázány předpisem přenosové funkce, což platí i pro modulovou a fázovou charakteristiku[2]. Není možné libovolně, na sobě nezávisle, definovat modulovou a fázovou charakteristiku a stejně tak ani kmitočtové a časové odezvy dynamické soustavy.

V této části byly ukázány vlastnosti všech základních přenosových funkcí, tj. funkcí 1. a druhého řádu[3]. Všechny složitější funkce lze z těchto základních funkcí vytvořit násobením a jejich vlastnosti lze odvodit z polohy jednotlivých pólů (resp. parametrů ω_0 a Q) a nul. To je dáno tím, že přenosy kaskádně řazených systémů se násobí, tj. jejich kmitočtové charakteristiky se sčítají (amplitudová díky logaritmické míře v $[\mathrm{dB}]$ a fázová díky skutečnosti, že $\mathrm{e}^{j\varphi_1}\mathrm{e}^{j\varphi_2} = \mathrm{e}^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$). Obdobně se sčítají i jednotlivé časové odezvy vzhledem k tomu, že celkový přenos lze rozdělit na součet parciálních zlomků s póly v jednotlivých jmenovatelích. Vlastnosti složitějších přenosových funkcí lze tedy jednoduše skládat ze znalostí výše uvedených vlastností přenosů základních, což využijeme v úvodu do analogových kmitočtových filtrů v následující kapitole.

[2] Pro systém s minimální fází (nulami přenosu v levé polorovině s) lze navíc jednoznačně určit fázovou charakteristiku z amplitudové a obráceně (s využitím Hibertovi transformace).

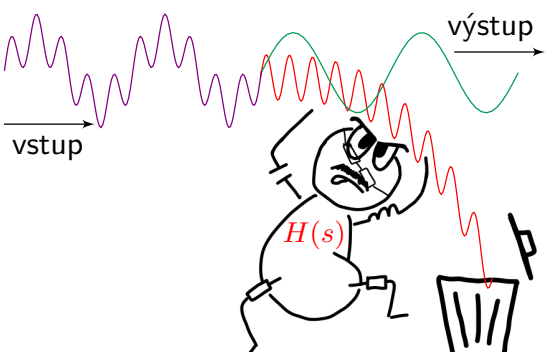
[3] Nebyla uvedena pouze funkce s obecnou dvojicí nul přenosu, která se však pro návrh standardních filtrů nevyužívá.

Poznámky VIII

Kapitola 9

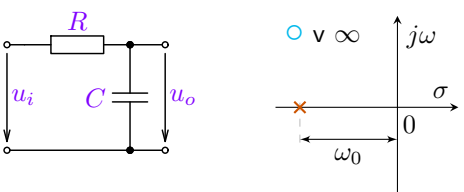
Úvod do syntézy kmitočtových filtrů (motivace, návrh přenosové funkce)

Tato kapitola se zabývá návrhem přenosové funkce $H(s)$ analogového filtru na základě jeho specifikace pomocí tolerančního schématu. Jedná se pouze o úvod do problematiky. Pozornost je věnována zejména rozdílným vlastnostem základních aproximací jak v kmitočtové, tak časové oblasti. Uživatel dostane dobrou orientaci v uvedené problematice, potřebnou např. pro kvalifikovaný návrh filtru pomocí software. Matematické odvození a postupy jsou pouze nastíněny. Přesný postup odvození je uveden v citované literatuře.



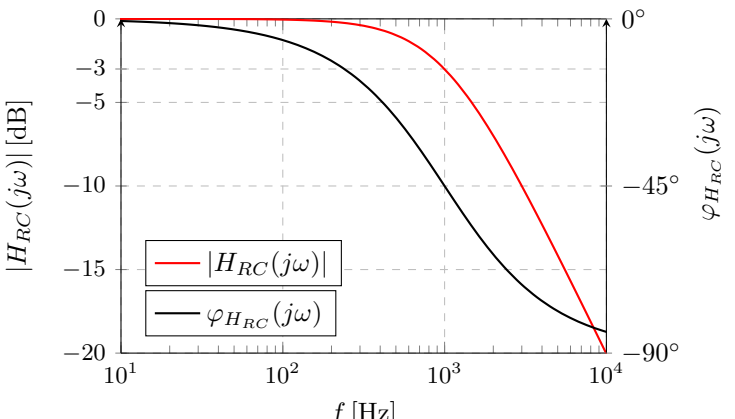
9.1. Jak navrhnout filtr? Motivace

Pokusme se jednoduše vytvořit kmitočtový filtr např. typu dolní propusti. Vyjděme z elementární realizace známé z předchozí kapitoly 8. Její vlastnosti byly představeny např. v tabulce 8.3 a vybrané jsou zde uvedeny.



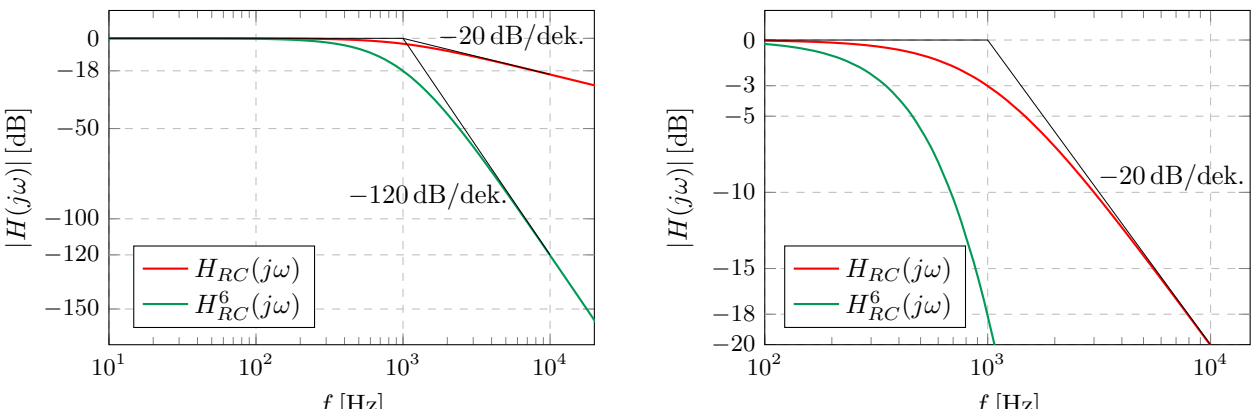
kde $H_{RC}(s) = \dfrac{U_o(s)}{U_i(s)} = \dfrac{H_0\omega_0}{s+\omega_0}$,

$H_0 = 1, \quad \omega_0 = 2\pi f_0 = \dfrac{1}{RC}$.



Obrázek 9.1: Elementární realizace dolní propusti – integrační RC článek, rozložení pólů a nul přenosu a jeho kmitočtové charakteristiky pro $f_0 = 10\,\mathrm{kHz}$.

Je zřejmé, že od amplitudové charakteristiky ideální dolní propusti dle obrázku 8.1 (a) se uvedená charakteristika $|H_{RC}(j\omega)|$ značně liší. Jednak vykazuje na zlomovém kmitočtu nenulový útlum a v nepropustné oblasti není útlum nekonečný. Pro vylepšení vlastností je nutné volit vyšší řád přenosové funkce – nabízí se nejjednodušší (ale nejhorší) metoda, tj. kaskádní (impedančně oddělené) řazení uvedeného filtru, které vede na přenosovou funkci $H_{RC}^{6}(s)$ se šestinásobným reálným pólem v $-\omega_0$. Porovnání vlastnosti obou amplitudových charakteristik je uvedeno níže.



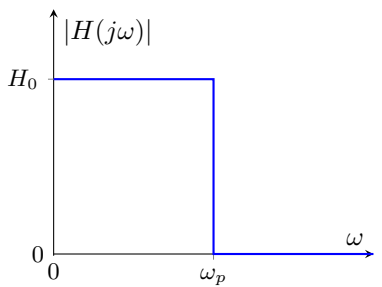
Obrázek 9.2: Modulové charakteristiky jednoho a „šestinásobného“ RC článku a jejich detail pro $f_0 = 10\,\mathrm{kHz}$.

9.1.1. Toleranční schéma filtru typu dolní propusti (LP)

Z kapitoly 8.2 je zřejmé, že přenosová funkce filtru musí být racionálně lomenou funkcí, která se bude se skládat z přenosů uvedených v tabulce 8.3 až 8.12. K ideální amplitudové charakteristice filtru se lze pouze přiblížit volbou řádu filtru – čím větší řád, tím lepší přiblížení, ale na úkor dalších vlastností a obtížnosti realizace, navíc póly přenosové funkce filtru budou zřejmě komplexně sdružené (přidávání reálných pólů nevede k použitelným výsledkům). Pro specifikaci vlastností filtru se proto používá tzv. toleranční schéma filtru, viz. níže:

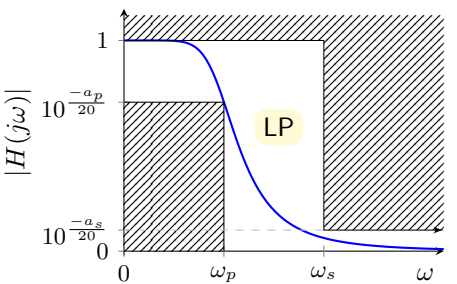
Amplitudová charakteristika ideálního LP filtru

propustné pásmo: $\omega \in \langle 0, \omega_0 \rangle$, $|H| = H_0$,
přechodové pásmo neexistuje,
nepropustné pásmo $\omega \in (\omega_0, \infty)$, $|H| = 0$,
tj. $\omega_p = \omega_s = \omega_0$.

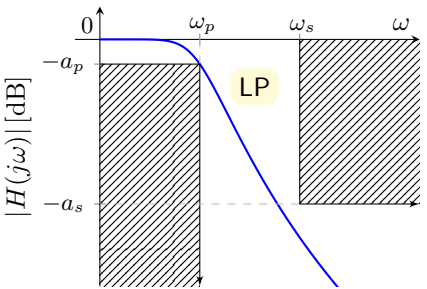


Toleranční schéma reálného filtru typu LP

předpokládejme $H_0 = 1$, tj. $0\,\mathrm{dB}$,
propustné pásmo: $\omega \in \langle 0, \omega_p \rangle$, $|H| \in \langle 10^{\frac{-a_p}{20}}, 1 \rangle$,
přechodové pásmo: $\omega \in (\omega_p, \omega_s)$,
nepropustné pásmo: $\omega \in \langle \omega_s, \infty \rangle$, $|H| < 10^{\frac{-a_s}{20}}$



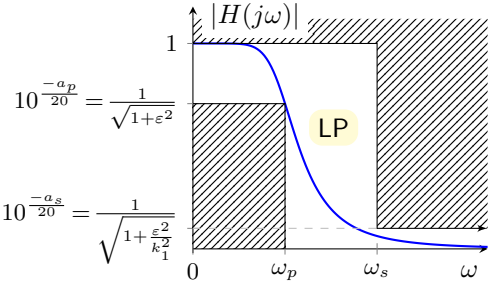
Pro vyšší útlumy je podstatně vhodnější uvádět amplitudovou charakteristiku v logaritmickém měřítku, tj. v $[\mathrm{dB}]$, jak ukazuje toleranční schéma na obrázku 9.3 (a) s definicí útlumových parametrů. Souvislost se schématem s lineárním měřítkem modulu přenosu je na obrázku (b).



(a)

a_p je maximální útlum v propustném pásmu filtru vyjádřený v $[\mathrm{dB}]$,

a_s je minimální útlum v nepropustném pásmu filtru vyjádřený opět v $[\mathrm{dB}]$.



(b)

Obrázek 9.3: Toleranční schémata dolní propusti v logaritmickém a lineárním měřítku modulu přenosu.

Parametr ε vyjadřuje amplitudovou chybu v propustném pásmu filtru (viz podkapitolu 9.2) a k_1 odpovídá odstupu modulu přenosu v propustném a nepropustném pásmu. Jedná se o odvozené parametry, pro které evidentně platí:

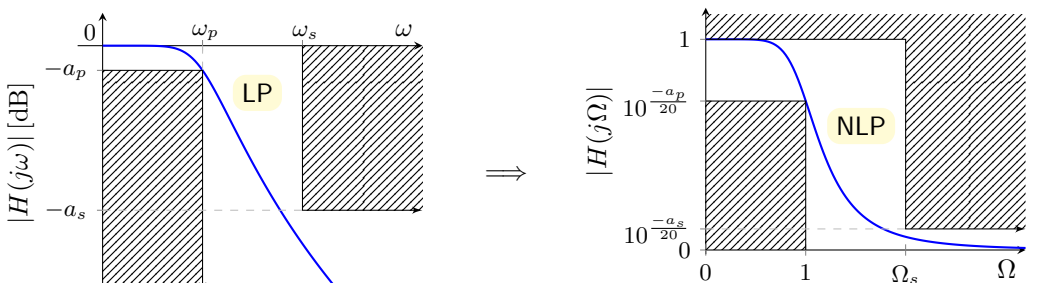
$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{\left(10^{\frac{-a_p}{20}}\right)^2} - 1} = \sqrt{10^{\frac{a_p}{10}} - 1}, \qquad \left(10^{\frac{-a_s}{20}}\right)^{-2} - 1 = \frac{\varepsilon^2}{k_1^2} \Rightarrow k_1 = \sqrt{\frac{10^{\frac{a_p}{10}} - 1}{10^{\frac{a_s}{10}} - 1}} \tag{9.1}$$

9.2. Aproximace modulové charakteristiky NLP

9.2.1. Kmitočtové normování dolní propusti

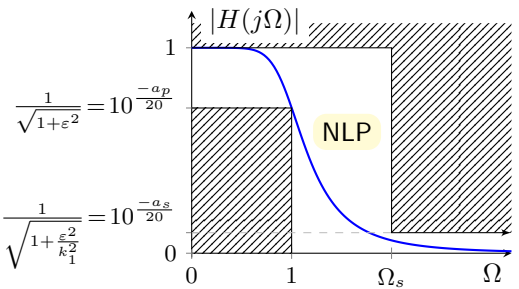
Pro návrh přenosové funkce dolní propusti je výhodnější uvažovat tzv. normovanou dolní propust (NLP) dle obrázku 9.4, přičemž kmitočtovou osu normujeme $\omega \Rightarrow \Omega$ tak, aby hraniční kmitočet propustného pásma Ω_p byl:

$$\Omega_p = \frac{\omega_p}{\omega_p} = 1, \qquad \omega_s \Rightarrow \Omega_s = \frac{\omega_s}{\omega_p} = \frac{1}{k}, \qquad \text{kde} \quad k = \frac{1}{\Omega_s} \quad \text{je tzv. selektivita.} \tag{9.2}$$



Obrázek 9.4: Kmitočtová transformace tolerančního schématu dolní propusti na normovanou dolní propust v lineárním měřítku modulu přenosu.

Je několik postupů pro výpočet přenosové funkce tak aby její modul vyhovoval schématu NLP. V každém případě se nesnažíme přímo hledat $H(j\omega)$, resp. $|H(j\Omega)|$, ale $|H(j\Omega)|^2 = H(j\Omega)H(-j\Omega)$ podle tzv. charakteristické rovnice (9.3), což je podstatně jednodušší, jelikož pak hledáme reálnou funkci reálné proměnné $F^2(\Omega)$!



$$|H(j\Omega)|^2 = H(j\Omega)H(-j\Omega) = \frac{1}{1+\varepsilon^2|\varphi(j\Omega)|^2} = \\ = \frac{1}{1+\varepsilon^2 F^2(\Omega)}\,, \quad (9.3)$$

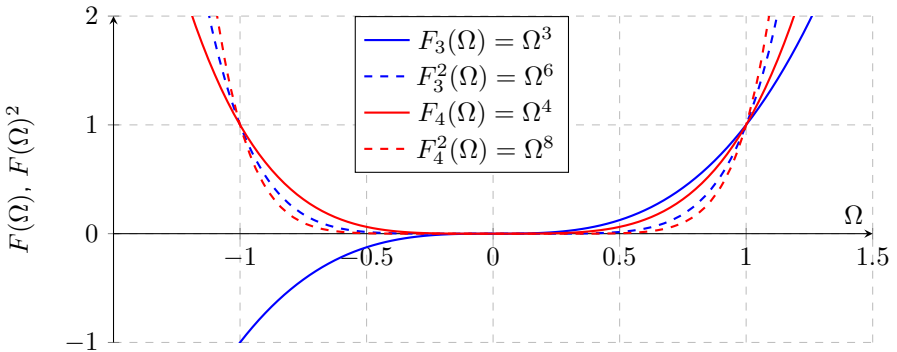
kde $\varphi(s)$ je charakteristická funkce, přičemž $|\varphi(j\Omega)|^2 = F^2(\Omega)$ musí v propustném pásmu aproximovat 0, aby $|H(j\Omega)| \approx 1$ a v nepropustném pásmu se blíží k ∞ (min. a_s), aby $|H(j\Omega)|^2 \approx 0$. Pro $F^2(\Omega_p) = F^2(1) = 1$ je pak chyba v propustném pásmu jednoduše definovaná parametrem ε, viz obrázek vlevo.

Podle tvaru charakteristické funkce $F^2(\Omega)$ pak rozeznáváme 4 základní typy aproximací modulové charakteristiky NLP: Butterworthovu aproximaci, Čebyševovu aproximaci a Inverzní Čebyševovu a Cauerovu aproximaci, které vykazují jak póly, tak nuly přenosu. V dalších podkapitolách ukážeme vlastnosti a úvod do těchto aproximací. Postup výpočtu přesahuje rámec tohoto materiálu a pro jeho studium lze vyjít např. z [15, 17].

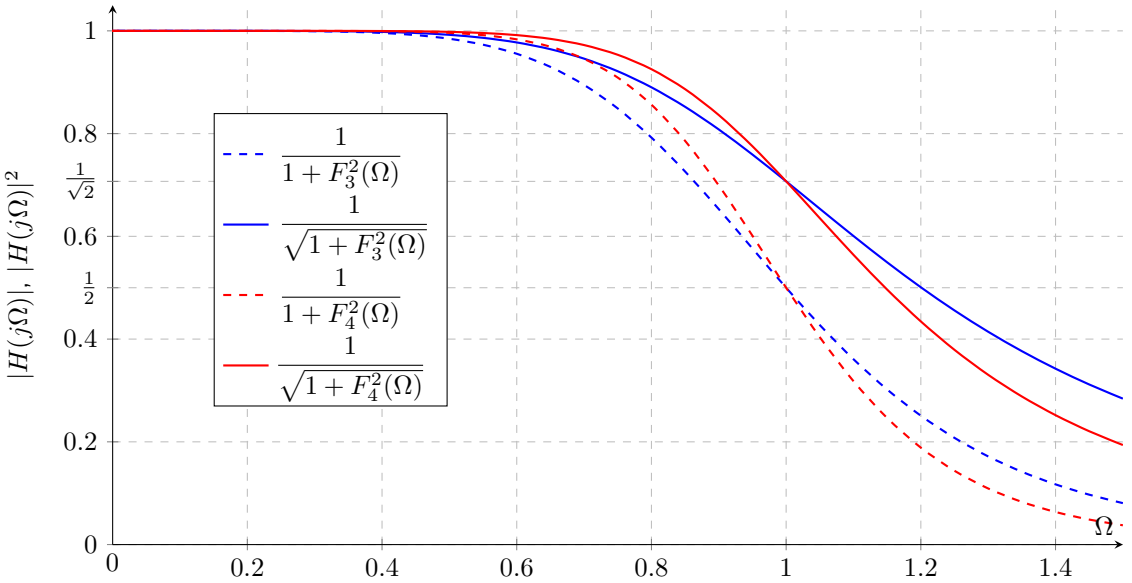
9.2.2. Maximálně plochá charakteristika – Butterworthova aproximace amplitudové charakteristiky

Předpokládejme přenosovou funkci $H(s)$ v níže uvedeném tvaru, kde $b_0 = b_n = 1$, tj. pro $s = 0$ je pak $H(0) = 1$. Pak lze odvodit charakteristickou funkci ve tvaru $F^2(\Omega) = \Omega^{2n}$ a tím i $|H(j\Omega)|^2$.

$$H(s) = \frac{1}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_n s^n}, \qquad H(j\Omega)H(-j\Omega) = |H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \Omega^{2n}} \tag{9.4}$$

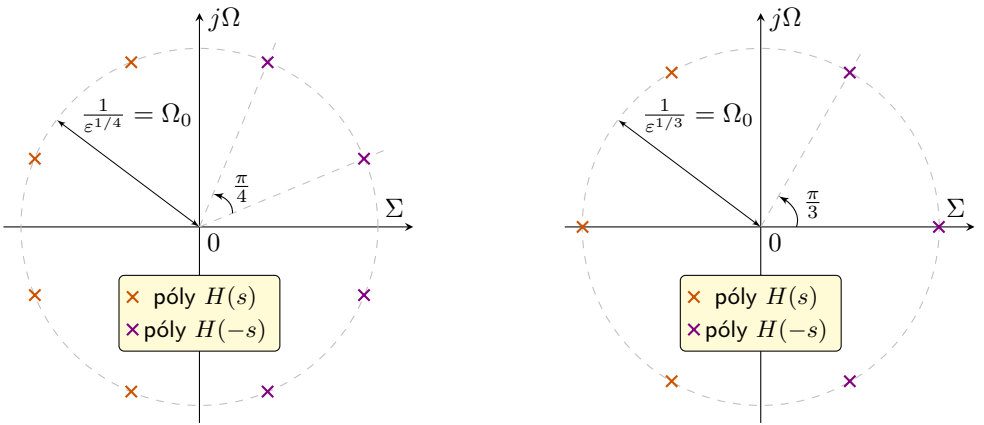


Obrázek 9.5: Průběhy funkcí $F_n(\Omega)$ a $F_n^2(\Omega)$ pro Butterwothovu aproximaci stupně $n = 3$ a $n = 4$ pro $\varepsilon = 1$.



Obrázek 9.6: Průběhy funkcí $|H_n(j\Omega)|$ a $|H_n(j\Omega)|^2$ pro Butterwothovu aproximaci stupně $n = 3$ a $n = 4$ pro $\varepsilon = 1$.

Rozložení pólů funkce přenosové funkce $H(s)$, resp. $H(s)H(-s)$ pro Butterworthovu aproximaci je evidentně na kružnici, jak ukazuje následující obrázek. Díl přenosové funkce (dané jednotlivými komplexně sdruženými póly mají tedy stejný zlomový kmitočet Ω_0 (jedná se o NLP), který je pro $\varepsilon = 1$ roven právě $\Omega_0 = \Omega_p = 1$.



(a): $n = 4$ (b): $n = 3$

Obrázek 9.7: Rozložení pólů funkce $H(s)H(-s)$ v komplexní rovině pro různé řády přenosové funkce $H(s)$.

Jmenovatel přenosu $H(s)$ výrazu (9.4) jsou tzv. Butterworthovy polynomy, $b_n(s)$ a filtry s touto přenosovou funkcí se nazývají Butterworthovy filtry. Následující tabulka udává vyčíslení koeficientů pro $\varepsilon = 1$ a stupně $n = 1$ až $n = 6$.

n	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
1	1	1,0000000	–	–	–	–	–
2	1	1,4142136	1,0000000	–	–	–	–
3	1	2,0000000	2,0000000	1,0000000	–	–	–
4	1	2,6131259	3,4142131	2,6131259	1,000000	–	–
5	1	3,2360680	5,2360680	5,2360680	3,2360680	1,000000	–
6	1	3,8637033	7,4641016	9,1416202	7,4641016	3,8637033	1,0000000

Tabulka 9.1: Koeficienty Butterworthových polynomů $b_n(s) = b_0 + \cdots + b_n s^n$.

Butterworthovy polynomy jsou reciproké se symetrií koeficientů $b_i = b_{i-k}$, pro které lze pro $\varepsilon = 1$ nalézt vztah (9.5). Odvození výpočtu koeficientů Butterworthových polynomů a určení jejich kořenů přesahuje rámec tohoto materiálu a je uveden např. v [15]. To platí i o dalších typech aproximací, které jsou dále pouze stručně představeny. Pro výpočet lze s výhodou použít aplikaci SYNTFIL.

$$b_{i+1} = \prod_{l=1}^{i+1} \frac{\cos\frac{(l-1)\pi}{2n}}{\sin\frac{l\pi}{2n}}, \quad \text{přičemž stupeň} \quad n \geq \frac{\log\frac{1}{k_1}}{\log\frac{1}{k}}. \tag{9.5}$$

9.2.3. Stejnoměrná (izoextremální) aproximace v propustném pásmu – Čebyševova aproximace amplitudové charakteristiky

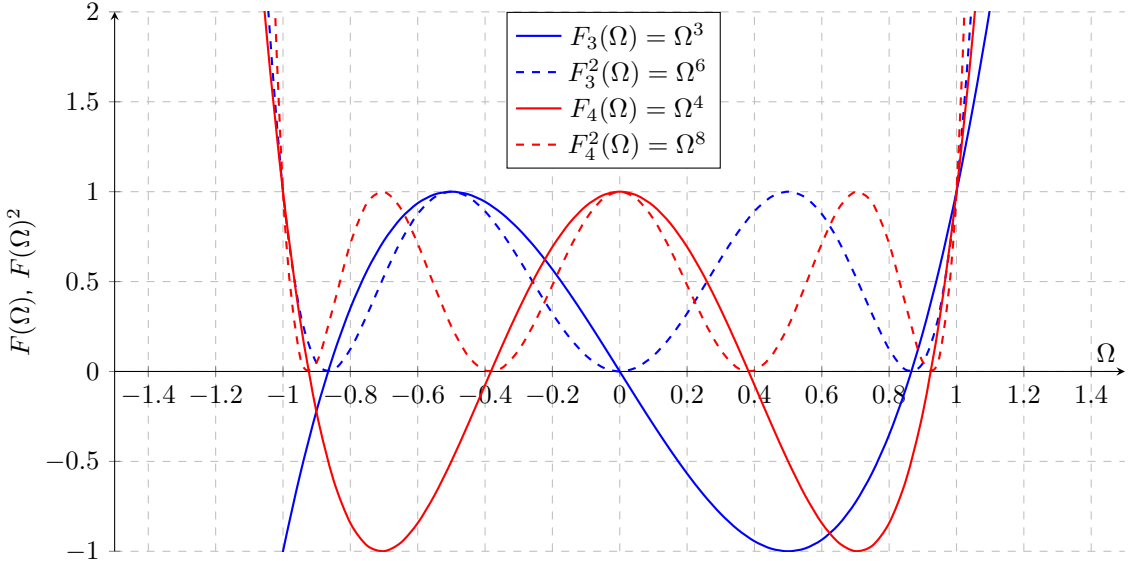
Aproximace vychází opět ze vztahu (9.3) kde $F(\Omega) = T_n(\Omega)$ jsou tzv. Čebyševovy polynomy (9.6), které lze vyjádřit polynomem (9.7), přičemž koeficienty těchto Čebyševových polynomů pro různé řády n uvádí následující tabulka:

$$F_n(\Omega) = T_n(\Omega) = \cos(n \arccos \Omega), \tag{9.6}$$

$$F_n(\Omega) = T_n(\Omega) = t_0 + \cdots + t_n \Omega^n. \tag{9.7}$$

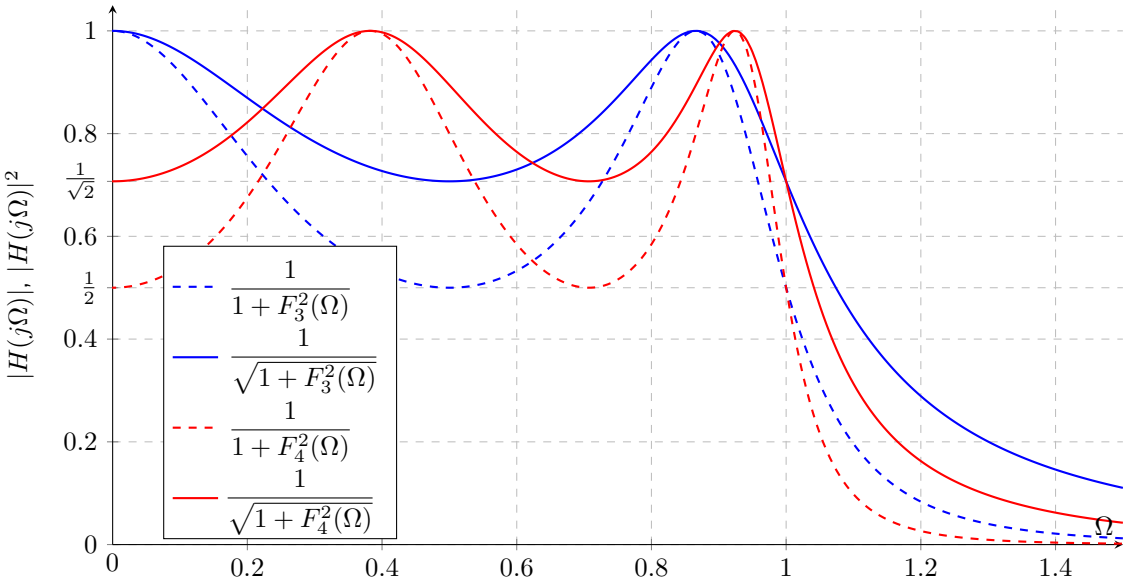
n	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7
1	0	1	–	–	–	–	–	–
2	−1	0	2	–	–	–	–	–
3	0	−3	0	4	–	–	–	–
4	1	0	−8	0	8	–	–	–
5	0	5	0	−20	0	16	–	–
6	−1	0	18	0	−48	0	32	–
7	0	−7	0	56	0	−112	0	64

Tabulka 9.2: koeficienty Čebyševových polynomů (9.7) pro $n = 1$ až $n = 7$.



Obrázek 9.8: Průběhy funkcí $F_n(j\Omega)$ a $F_n^2(j\Omega)$ pro Čebyševovu aproximaci stupně $n = 3$ a $n = 4$ pro $\varepsilon = 1$.

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

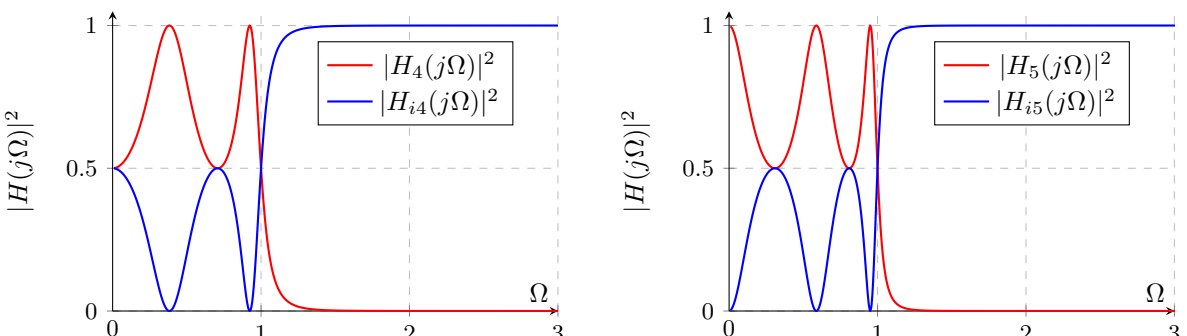


Obrázek 9.9: Průběhy funkcí $|H_n(j\Omega)|$ a $|H_n(j\Omega)|^2$ pro Čebyševovu aproximaci stupně $n = 3$ a $n = 4$ pro $\varepsilon = 1$.

9.2.4. Stejnoměrná aproximace v nepropustném pásmu – inverzní Čebyševova aproximace amplitudové charakteristiky

Inverzní charakteristiku $|H_i(j\Omega)|$ dostaneme z předcházející funkce $|H(j\Omega)|$) z následujícího výrazu. Vykreslení všech funkcí je pak ukázáno na následujících grafech.

$$|H(j\Omega)|^2 + |H_i(j\Omega)|^2 = 1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{1+\varepsilon^2 T_n^2(\Omega)} + \frac{\varepsilon^2 T_n^2(\Omega)}{1+\varepsilon^2 T_n^2(\Omega)} = 1 \tag{9.8}$$



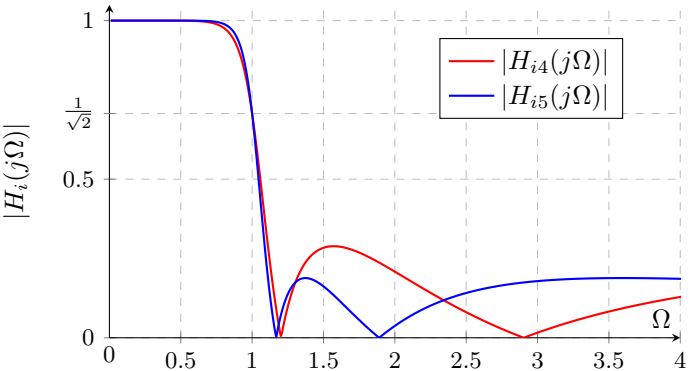
Obrázek 9.10: Průběhy funkcí $|H_n(j\Omega)|^2$ Čebyševovy aproximace a $|H_{in}(j\Omega)|^2$ pro $\varepsilon = 1$ a stupně $n = 4$ a $n = 5$.

Funkce $|H_i(j\Omega)|$ je evidentně amplitudovou charakteristikou horní propusti s izoextremálním průběhem modulu v nepropustném pásmu. Tu však lze velmi snadno transformovat na dolní propust použitím substituce $\Omega \to \frac{1}{\Omega}$. Aby však byl zlomový kmitočet $\Omega_p = 1$, tj, jednalo se o normovanou dolní propust, je nutné zavést ještě kmitočtové normování, podobně jako v případě (9.2), tj.:

$$\Omega \to \frac{1}{k\Omega} = \frac{\omega_s}{\omega_p \Omega}\text{, pak} \qquad (9.9)$$

$$H_i(j\Omega)H_i(-j\Omega) = \frac{1}{1+\varepsilon^2 \dfrac{T_n^2(\frac{1}{k})}{T_n^2(\frac{1}{k\Omega})}}, \qquad (9.10)$$

kde $\varepsilon^2 \to \dfrac{1}{\varepsilon^2 T_n^2(\frac{1}{k})}$ je nový činitel pro chybu aproximace v propustném pásmu, vypočtený z původního pro Čebyševovu aproximaci.



Obrázek 9.11: Průběhy funkcí $|H_{in}(j\Omega)|^2$ inverzní Čebyševovy aproximace pro stupně $n = 4$ a $n = 5$, $\varepsilon = 1$ a $k = 0{,}9$.

Všímavý čtenář si jistě všiml, že pro sudý stupeň přenosové funkce nezačíná amplitudová charakteristika Čebyševovy aproximace v $H(0) = 1$, tj. $0\,\mathrm{dB}$, ale v $-a_p\,\mathrm{dB}$. To pak vede u inverzní charakteristiky k tomu, že $H_i(\infty) \approx -a_s\,[\mathrm{dB}]$ pro sudý řád a $H_i(\infty) = 0 = -\infty\,\mathrm{dB}$ pro řád lichý.

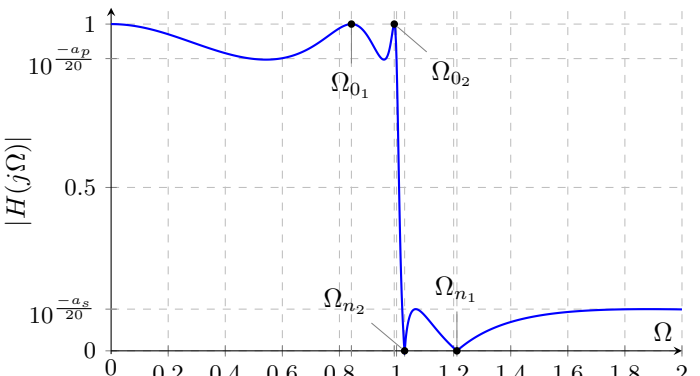
9.2.5. Stejnoměrná aproximace v propustném i nepropustném pásmu – Cauerova aproximace amplitudové charakteristiky

Aproximace vychází opět ze vztahu (9.3) kde $F(\Omega)$ je racionálně lomená funkce v následujícím tvaru pro lichý a sudý stupeň n:

$$F(\Omega) = C\,\Omega \prod_{i=1}^{m} \frac{\Omega^2 - \Omega_{0i}^2}{1 - k^2\Omega_{0i}^2\Omega^2}\,, \qquad m = \frac{n-1}{2}$$

$$F(\Omega) = C \prod_{i=1}^{m} \frac{\Omega^2 - \Omega_{0i}^2}{1 - k^2\Omega_{0i}^2\Omega^2}\,, \qquad m = \frac{n}{2}\,.$$

Kmitočty nulových bodů Ω_{n_i} a pólů Ω_{0_i} přenosové funkce $H(s)$ jsou vzájemně inverzní: $\Omega_{n_i}\Omega_{0_i} = \Omega_s = \frac{1}{k}$. Ty lze odvodit z nelineární diferenciální rovnice, kde řešení lze nalézt v parametrickém tvaru pomocí Jacobiho eliptických funkcí → eliptické filtry. Kompletní řešení je matematicky složité. Stručný popis lze nalézt např. v [15], kde jsou pak další odkazy.

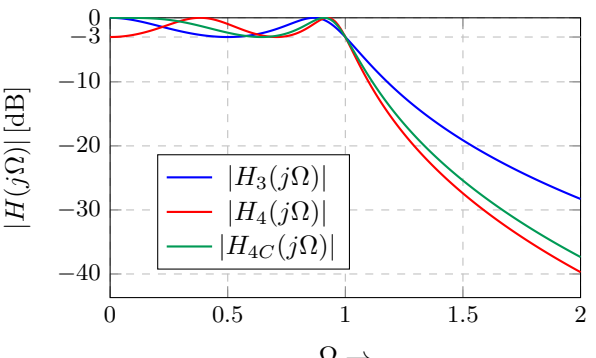


Obrázek 9.12: Amplitudová charakteristika $|H(j\Omega)|$ Cauerovy aproximace stupně $n = 5$ pro $\varepsilon = 0{,}5$ a $\Omega_s = \frac{1}{k} = 1{,}02$.

Přenosová funkce Butterworthovy a Čebyševovy aproximace amplitudové charakteristiky je ve tvaru (9.4), tj. má n násobnou nulu pro $s \to \infty$. Přenosová funkce inverzní Čebyševovy aproximace vykazuje vzhledem k (9.10) nuly na konečném kmitočtu a pro lichý řád navíc jednu nulu v nekonečnu (proto $H_i(\infty) = 0$ pro lichý řád), tj. i čitatel přenosové funkce je ve tvaru polynomu a to řádu m, přičemž $m = n$ pro sudý a $m = n - 1$ pro lichý řád přenosové funkce. Kořeny čitatele přenosové funkce (nuly) jsou vždy komplexně sdružené – jejich počet je proto sudý a leží na imaginární ose, viz. (8.10) a tabulku 8.11.

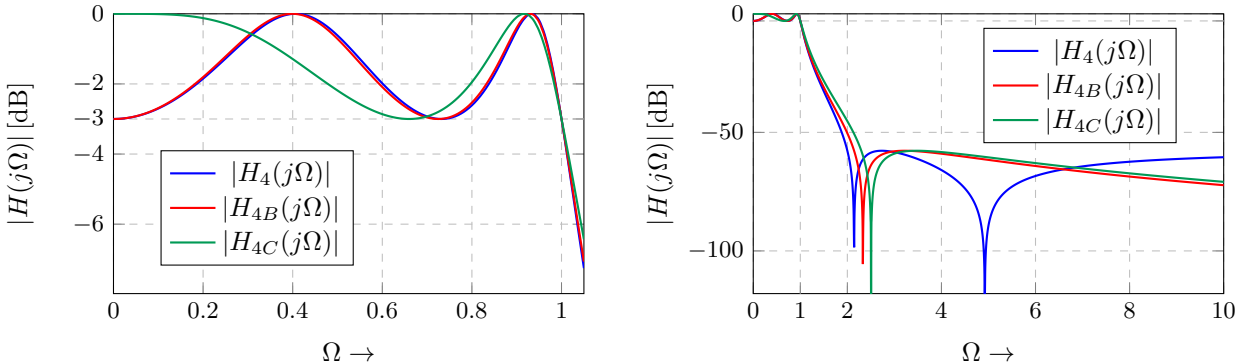
Jak bylo uvedeno, vychází modulová charakteristika přenosové funkce Čebyševovy aproximace sudého řádu z $H(0) = 10^{\frac{-a_p}{20}} < 1$, což může v některých případech vadit. Existuje proto modifikace „C“ této aproximace (posunem pólů tak, aby $a_0 = 1$ vztahu (9.4)), která tento problém řeší za cenu mírného snížení selektivity, viz porovnání na obrázku vpravo.

V případě výpočtu inverzní Čebyševovy aproximace z této modifikace je pak evidentně $H(\infty) \to 0$ i pro sudý řád přenosové funkce (odsouvá poslední nulu do ∞). To může být v mnoha případech požadováno. Taková modifikace se pak u inverzní aproximace označuje jako „B“. Grafická ukázka viz dále (Cauer).



Obrázek 9.13: Amplitudová charakteristika Čebyševovy aproximace $n = 3$ a pro $n = 4$ včetně varianty C.

Analogické případy obou modifikací pak existují u Cauerovy aproximace, viz. následující obrázek.



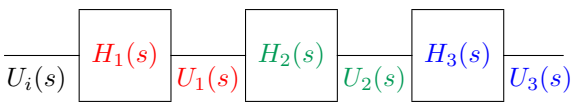
Obrázek 9.14: Amplitudová charakteristika $|H(j\Omega)|$ Cauerovy aproximace stupně $n = 4$ ve variantách A (klasická), B a C, jak pouze propustné pásmo, tak celková charakteristika.

Je zřejmé, že před vlastním výpočtem přenosové funkce je z tolerančního schématu nutné určit její řád jako celé číslo, pro které platí $|H_n(j\Omega_s)| \leq -a_s\,[\mathrm{dB}]$. Vlastní výpočet pólů a nul požadované charakteristické a z ní pak i přenosové funkce je poměrně náročný. Pro zájemce lze doporučit reference [15, 17], ze kterých lze vyjít.

Celý návrh lze velmi snadno uskutečnit v návrhovém systému SYNTFIL , který stejně jako GEEC vznikl na katedře teorie obvodů, ČVUT FEL.

9.3. Porovnání vlastností základních aproximací modulové charakteristiky

Základní vlastnosti uvedených aproximací jsou prezentovány na konkrétních přenosových funkcích 6. řádu typu dolní propusti (LP) s hranicí propustného pásma $f_p = 1\,\mathrm{kHz}$. Tu z NLP dostaneme evidentně dle (9.2) dosazením $\Omega = \frac{\omega}{\omega_p} = \frac{f}{f_p}$. Přenosové funkce $H(s)$ jednotlivých aproximací lze získat např. v aplikaci SYNTFIL. Ty rozdělíme na součin dílčích přenosových funkcí 2. řádu dle obrázku 9.15, abychom mohli porovnat jejich vlastnosti (póly/nuly).



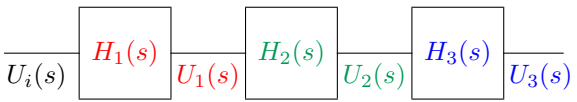
Obrázek 9.15: Kaskádní struktura přenosové funkce $H(s) = H_1(s)H_2(s)H_3(s) = H_{i\to 3}(s)$.

$H_k(s)$ je dílčí přenosová funkce k-tého bloku ($U_0 = U_i$) a $H_{i\to k}(s)$ je přenosová funkce k bloků:

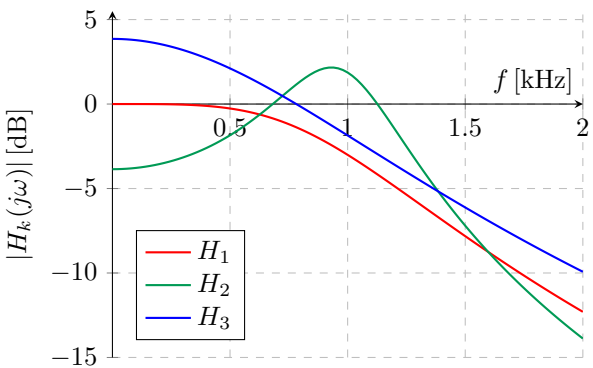
$$H_k(s) = \frac{U_k(s)}{U_{k-1}(s)}, \qquad H_{i\to k}(s) = \frac{U_k(s)}{U_i(s)} = \prod_{l=1}^{k} H_l(s) \tag{9.11}$$

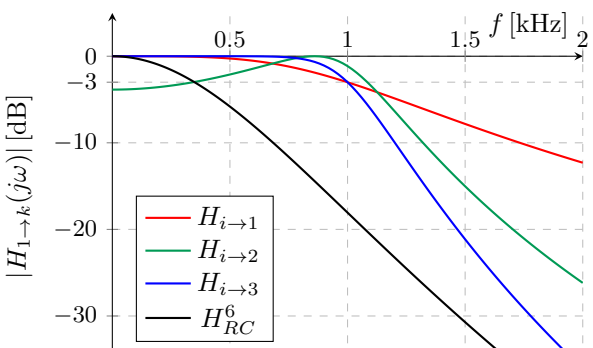
kde jednotlivé přenosové funkce jsou ve tvaru (8.6), tj. $H_k(s) = \frac{H_0\omega_{0k}^2}{s^2 + \frac{\omega_{0k}}{Q_k}s + \omega_{0k}^2}$, přičemž pro $Q > 1/2$ (póly přenosové funkce jsou komplexně sdružené). Místo ω_{0k} budeme udávat $f_p = \frac{\omega_{0k}}{2\pi}$, vzhledem k zadanému f_p.

Butterworthův filtr (s maximálně plochou modulovou charakteristikou)



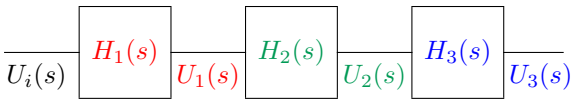
$f_{01} = 1\,\text{kHz}$ $f_{02} = 1\,\text{kHz}$ $f_{03} = 1\,\text{kHz}$
$Q_1 = 0{,}71$ $Q_2 = 1{,}9$ $Q_3 = 0{,}52$



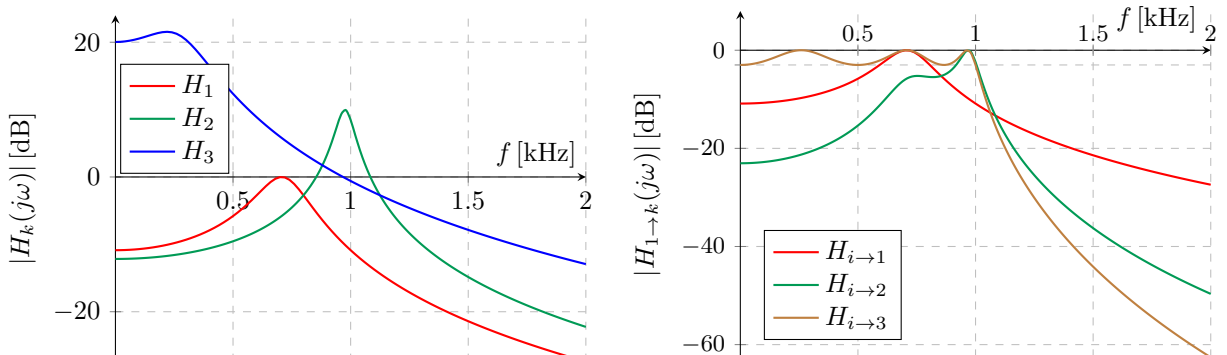


Obrázek 9.16: Amplitudové charakteristiky $|H_k(j\omega)|$ a $|H_{i\to k}(j\omega)|$ Butterworthovy aproximace 6. řádu.

Čebyševův filtr (se stejnoměrnou aproximací modulové charakteristiky v propustném pásmu)

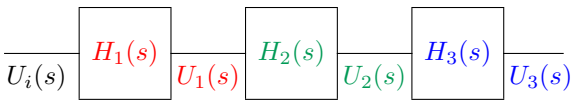


$f_{01} = 0{,}7\,\text{kHz}$ $f_{02} = 0{,}98\,\text{kHz}$ $f_{03} = 0{,}3\,\text{kHz}$
$Q_1 = 3{,}5$ $Q_2 = 13$ $Q_3 = 1$

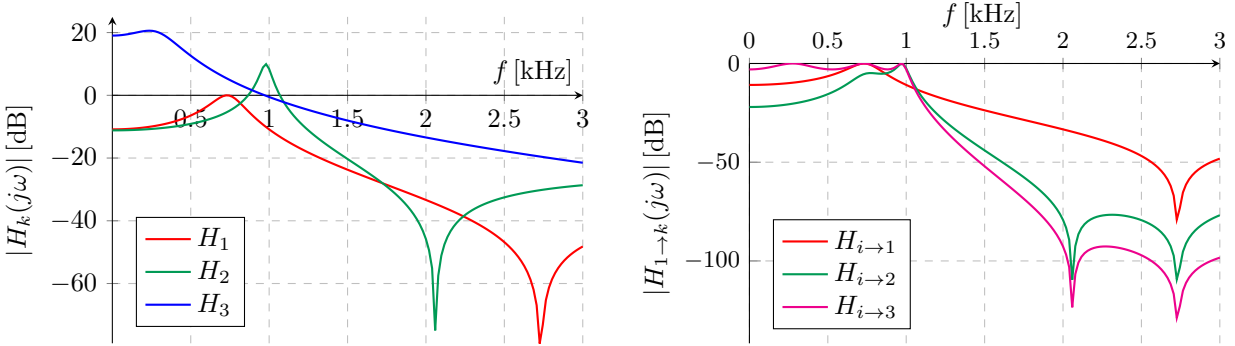


Obrázek 9.17: Amplitudové charakteristiky $|H_k(j\omega)|$ a $|H_{i\to k}(j\omega)|$ Čebyševovy aproximace 6. řádu.

Cauerův filtr (se stejnoměrnou aproximací modulové charakteristiky v obou pásmech)



$f_{01} = 0{,}75\,\text{kHz}$ $f_{02} = 0{,}98\,\text{kHz}$ $f_{03} = 0{,}32\,\text{kHz}$
$f_{n1} = 2{,}7\,\text{kHz}$ $f_{n2} = 2{,}1\,\text{kHz}$ $f_{n3} = 7{,}2\,\text{kHz}$
$Q_1 = 3{,}7$ $Q_2 = 15$ $Q_3 = 1{,}1$



Obrázek 9.18: Amplitudové charakteristiky $|H_k(j\omega)|$ a $|H_{i\to k}(j\omega)|$ Cauerovy aproximace 6. řádu.

9.3.1. Souvislost parametrů přenosových funkcí a jejich charakteristik

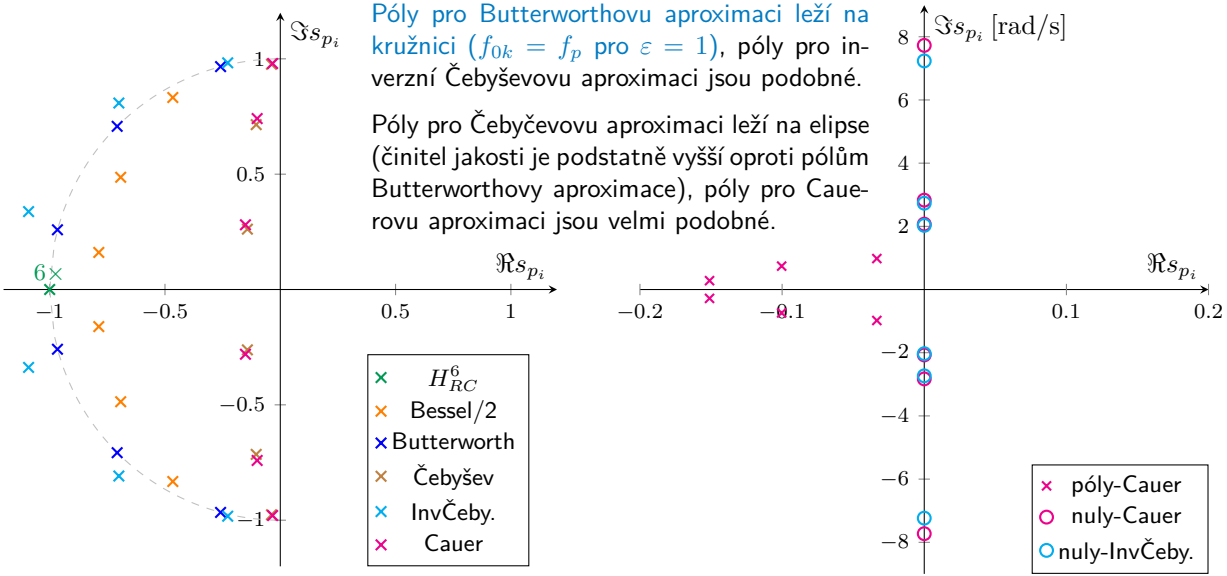
	$H_1(s)$	$H_2(s)$	$H_3(s)$
RC[6]	$f_{01} = 1\,\mathrm{kHz}$ $Q_1 = 0{,}5$	$f_{02} = 1\,\mathrm{kHz}$ $Q_2 = 0{,}5$	$f_{03} = 1\,\mathrm{kHz}$ $Q_3 = 0{,}5$
Be	$f_{01} = 1{,}69\,\mathrm{kHz}$ $Q_1 = 0{,}61$	$f_{02} = 1{,}91\,\mathrm{kHz}$ $Q_2 = 1{,}02$	$f_{03} = 1{,}61\,\mathrm{kHz}$ $Q_3 = 0{,}51$
B	$f_{01} = 1\,\mathrm{kHz}$ $Q_1 = 0{,}71$	$f_{02} = 1\,\mathrm{kHz}$ $Q_2 = 1{,}9$	$f_{03} = 1\,\mathrm{kHz}$ $Q_3 = 0{,}52$
Č	$f_{01} = 0{,}7\,\mathrm{kHz}$ $Q_1 = 3{,}5$	$f_{02} = 0{,}98\,\mathrm{kHz}$ $Q_2 = 13$	$f_{03} = 0{,}3\,\mathrm{kHz}$ $Q_3 = 1$
IČ	$f_{01} = 1{,}1\,\mathrm{kHz}$ $f_{n1} = 2{,}8\,\mathrm{kHz}$ $Q_1 = 0{,}8$	$f_{02} = 1\,\mathrm{kHz}$ $f_{n2} = 2{,}1\,\mathrm{kHz}$ $Q_2 = 2{,}2$	$f_{03} = 1{,}14\,\mathrm{kHz}$ $f_{n3} = 7{,}7\,\mathrm{kHz}$ $Q_3 = 0{,}52$
C	$f_{01} = 0{,}75\,\mathrm{kHz}$ $f_{n1} = 2{,}7\,\mathrm{kHz}$ $Q_1 = 3{,}7$	$f_{02} = 0{,}98\,\mathrm{kHz}$ $f_{n2} = 2{,}1\,\mathrm{kHz}$ $Q_2 = 15$	$f_{03} = 0{,}32\,\mathrm{kHz}$ $f_{n3} = 7{,}2\,\mathrm{kHz}$ $Q_3 = 1{,}1$

Tabulka 9.3: Parametry přenosových funkcí 6. řádu.

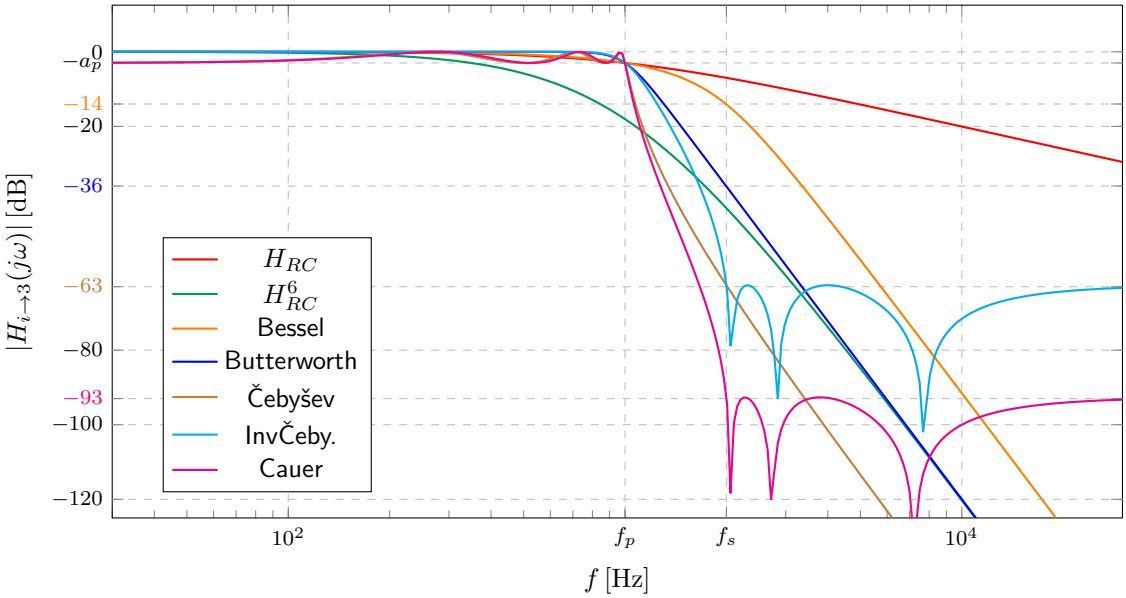
Srovnání charakteristik uvedených aproximací je uvedeno včetně jednoduchého a „šestinásobného“ integračního RC článku a navíc i Besselovy aproximace, viz tabulku vlevo, obrázky 9.16 až 9.18 a tabulky 8.3, 8.8 a 8.11).

Přenosové funkce všech aproximací vedou na komplexně sdružené póly. Izoextremální průběh amplitudové charakteristiky v propustném pásmu (Čebyšev a Cauer) je spojen s vysokým činitelem jakosti Q a rozptylem zlomových kmitočtů f_0.

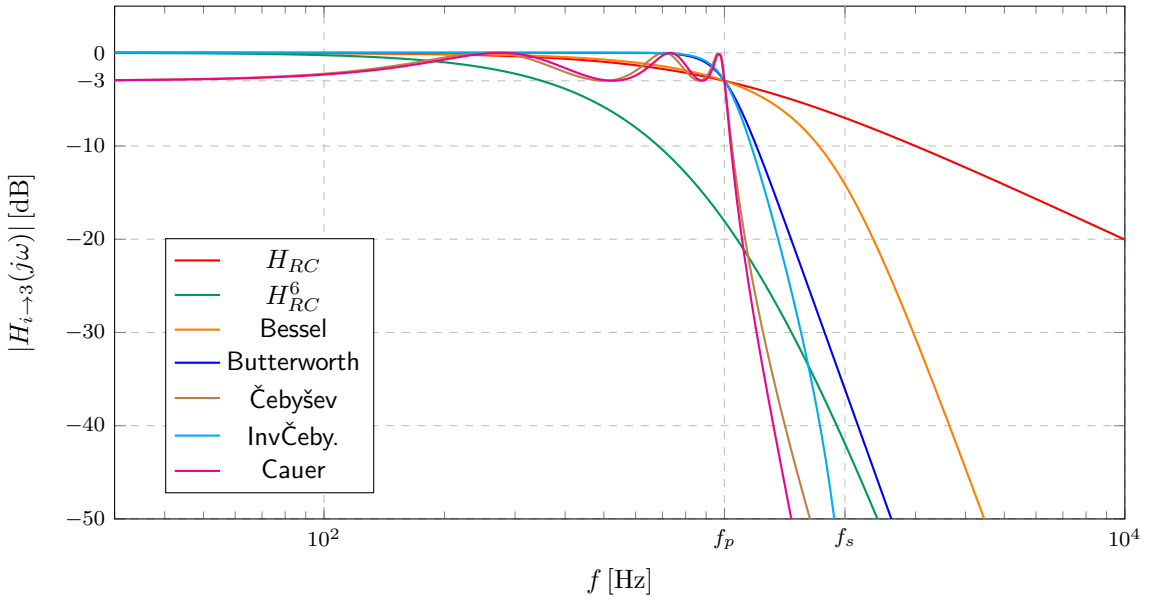
Z celkového srovnání na obrázku 9.20 je zřejmé, že nejvyšší strmosti, resp. útlumu a_s dosahují právě izoextremální aproximace: $a_s \doteq 14$, 36, a 63 dB pro Besselovu, Butterworhovu a Čebyševovu, resp. Inverzní Čebyševovu aproximaci) a $a_s = 93\,\mathrm{dB}$ pro Cauerovu aproximaci a $f_s = 2\,\mathrm{kHz}$, více viz přednáška a analýza.



Obrázek 9.19: Porovnání polohy pólů a nul přenosových funkcí „všech“ aproximací v s-rovině pro normovaný úhlový kmitočet $\omega_0 = 1$ (velikost pólů přenosové funkce Besselovi aproximace je dělena 2).

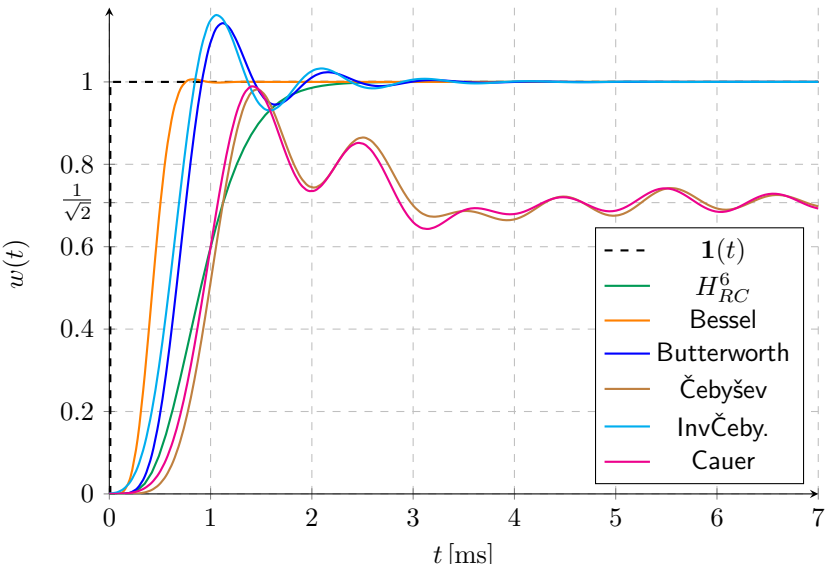


Obrázek 9.20: Porovnání amplitudových charakteristik pro uvedené přenosové funkce 6. řádu („všech“ aproximací).



Obrázek 9.21: Porovnání amplitudových charakteristik pro uvedené přenosové funkce – detail.

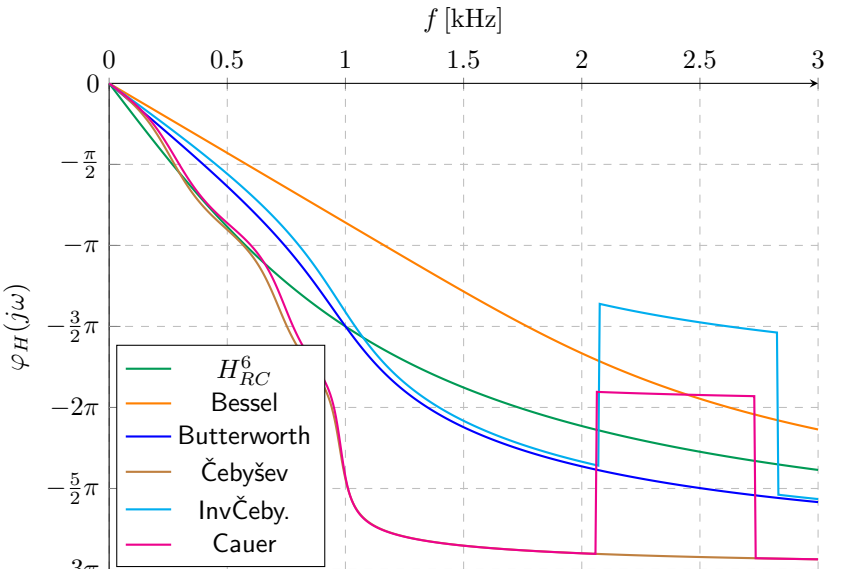
S kmitočtovými vlastnostmi souvisí i časové odezvy, které mohou být důležité i u kmitočtových filtrů, např. při filtraci stejnosměrné složky $|\sin(\omega t)|$, viz VIII-4, demodulace signálů, ... Charakter časové odezvy systému je plně určen polohou jeho pólů (vztah (8.5)) a čas ustálení závisí na velikosti Q, viz obrázek 8.11. Proto filtry s izoextremálním průběhem amplitudové charakteristiky v propustném pásmu mají tento čas i několikanásobně delší v porovnání s ostatními aproximacemi. Kompromisem mezi dobrou selektivitou a časem ustálení je Butterwothova (případně IČ) aproximace, navíc s maximálně plochou amplitudovou charakteristikou v propustném pásmu vhodnou např. pro měřicí účely, více viz přednáška.



Obrázek 9.22: Porovnání přechodových charakteristik pro uvedené přenosové funkce 6. řádu („všech“ aproximací).

Nedokonalost výše uvedené časové odezvy vyplývá z tzv. lineárního zkreslení: pokud periodický skok rozložíme na jednotlivé harmonické (viz vztah (7.32), případně zde) a aplikujeme ideální dolní propust měl by výsledek obsahovat pouze dané spektrum složek, které by měly mít stejné zpoždění. Tím se na výstupu složky „správně“ sčítají a výsledkem je pak posunutý pulz s omezeným spektrem, jako u Besselovi aproximace. Pro dosažení stejného zpoždění u jednotlivých spektrálních složek je nutné, aby fázová charakteristika zejména v propustném pásmu filtru byla lineární, jelikož zpoždění $\tau_g(\omega) = -\frac{\mathrm{d}\varphi_H(j\omega)}{\mathrm{d}\omega}$.

Nespojitost fáze je dána nulami přenosu na imaginární ose, viz. 8.2.3.



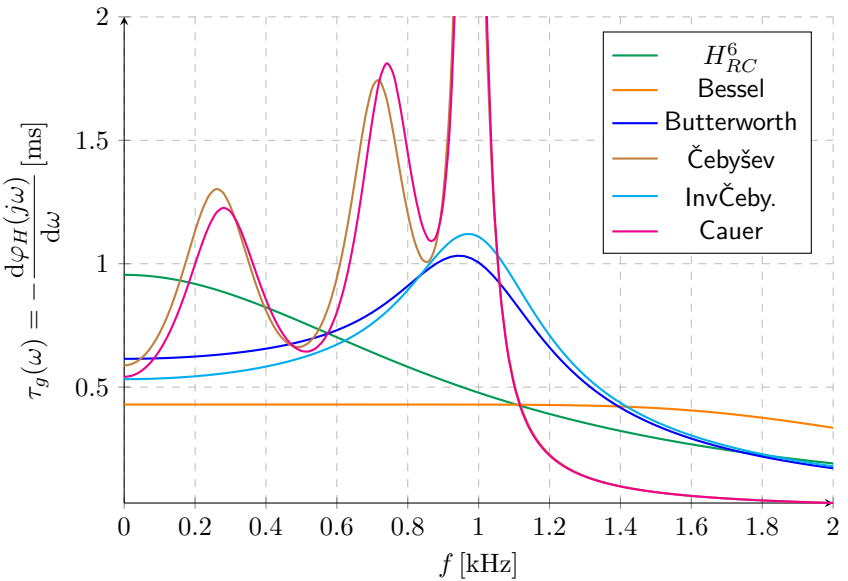
Obrázek 9.23: Porovnání fázových charakteristik pro uvedené přenosové funkce 6. řádu („všech“ aproximací).

Skutečnost, že pro stejné zpoždění signálu musí být jeho fáze přímo úměrná jeho kmitočtu lze demonstrovat na jednoduchém příkladě fáze harmonického signálu např. pro zpoždění $\tau = 1/2\,\mathrm{ms}$ pak fáze je:

f [kHz]	T [ms]	$\tau = 1/2\,\mathrm{ms}$
1	1	$T/2 \equiv 1\pi$
2	1/2	$1T \equiv 2\pi$
6	1/6	$3T \equiv 6\pi$

kde f je kmitočet, T je perioda signálu a τ je jeho časové zpoždění.

Vzhledem k tomu, že se linearita posuzuje lépe podle derivace, používáme místo fáze charakteristiku tzv. skupinového zpoždění. Z výsledků je zřejmé, že z pohledu časových odezev je Čebyševova, resp. Cauerova aproximace méně vhodná, viz také analýzu a dodatek P.



Obrázek 9.24: Porovnání charakteristik skupinového zpoždění pro uvedené přenosové funkce 6. řádu („všech“ aproximací).

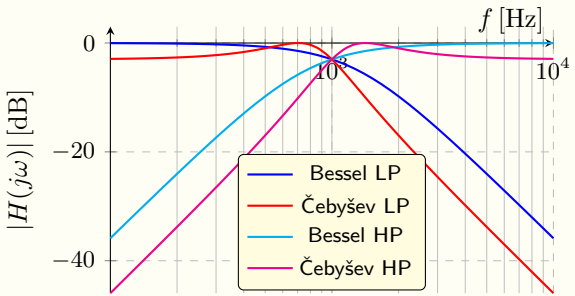
Následuje příklad, na kterém je ukázáno chování jednoduchých filtrů pro často používané úlohy – jednak pro omezení kmitočtového pásma a jednak pro odstranění stejnosměrné složky. Jako vstupní signál byl vybrán signál s obdélníkovým časovým průběhem.

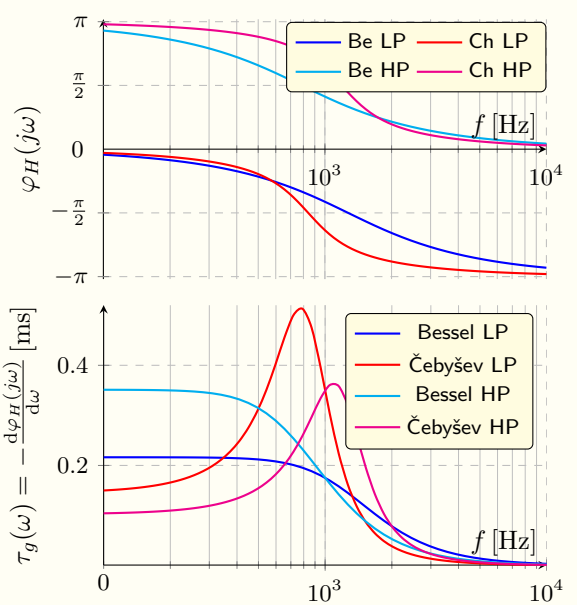
Příklad 9.1 *Porovnání vlastností filtrů.*

Zadání: Navrhněte fitry typu dolní (LP) a horní (HP) propust různých aproximací s hraničním kmitočtem propustného pásma $f_p = 1\,\mathrm{kHz}$ a porovnejte jejich vlastnosti v kmitočtové a zejména časové oblasti na odezvě na signál s obdélníkovým časovým průběhem a kmitočtem $f_s = 1\,\mathrm{kHz}$. Upravte mezní kmitočet filtrů f_p pro zlepšení chování filtrů – LP pro omezení kmitočtového pásma a HP pro odstranění DC složky signálu.

Řešení: Byly navrženy filtry 2. řádu s Beselovou (BE), Butterwothovou (B) a Čebyševovou (Ch) aproximací modulové charakteristiky. Zde budou ukázány výsledky pouze filtrů BE a Ch. Kompletní analýza všech filtrů včetně dvojitého RC článku je uvedena zde. Parametry přenosových funkcí filtrů Be a Ch typu LP i HP jsou: $H_{0_{Be}} = 1,\ Q_{Be} \doteq 0{,}577$ a $H_{0_{Ch}} \doteq 0{,}708,\ Q_{Ch} \doteq 1{,}305$ pro LP i HP a

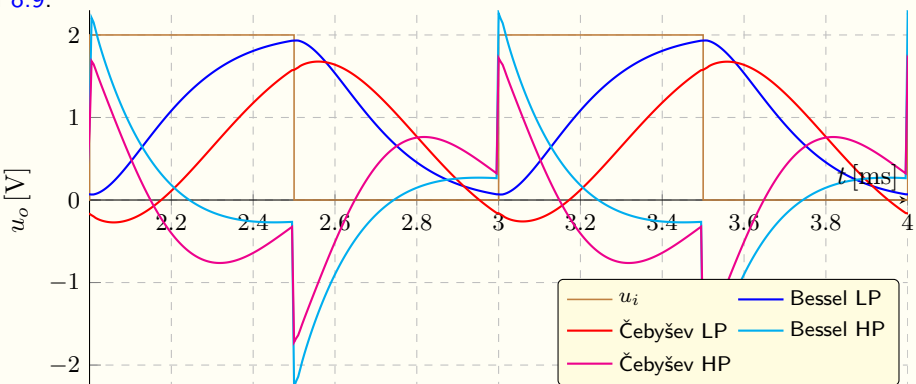
$$f_{0_{Be}} \doteq 1{,}274\,\mathrm{kHz}, \quad f_{0_{Ch}} \doteq 0{,}841\,\mathrm{kHz} \quad \text{pro LP a}$$
$$f_{0_{Be}} \doteq 0{,}785\,\mathrm{kHz}, \quad f_{0_{Be}} \doteq 1{,}189\,\mathrm{kHz} \quad \text{pro HP.}$$

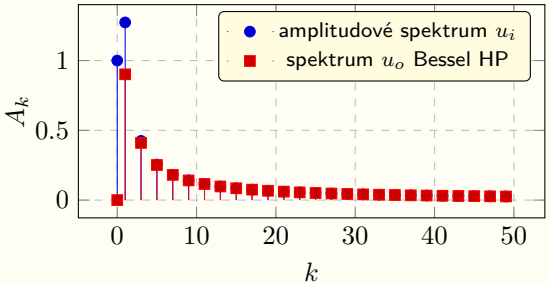


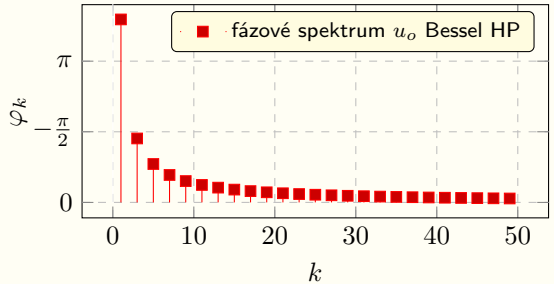


Obrázek 9.25: Amplitudové a fázové charakteristiky ($|H(j\omega)|$, $\varphi_H(j\omega)$), včetně průběhu skupinového zpoždění $\tau_g(\omega)$ navržených filtrů typu LP a HP s Besselovou a Čebyševovou aproximací, viz také analýzu.

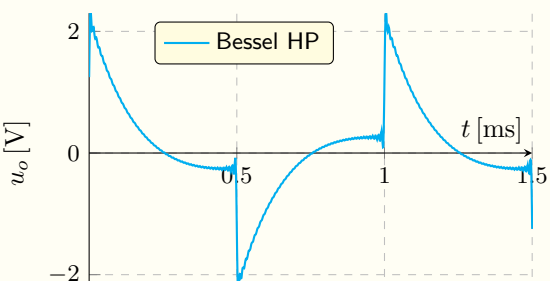
Na níže uvedeném obrázku jsou zobrazeny časové průběhy výstupního signálu u_o filtrů buzených signálem u_i obdélníkového průběhu s amplitudou a stejnosměrnou složkou shodně $1\,\mathrm{V}$. Použité filtry byly typu dolní i horní propusti s Besselovou a Čebyševovou aproximací modulové charakteristiky s mezním kmitočet propustného pásma právě $f_p = 1\,\mathrm{kHz}$. V případě LP odfiltruje vyšší harmonické samozřejmě lépe Čebyševův LP filtr než Besselův LP. U horní propusti nastává při změně vstupního signálu přechodový děj, který má periodu kmitavé složky (imaginární část pólu – viz analýzu) srovnatelnou s periodou vstupního signálu, viz také tabulku 8.9.



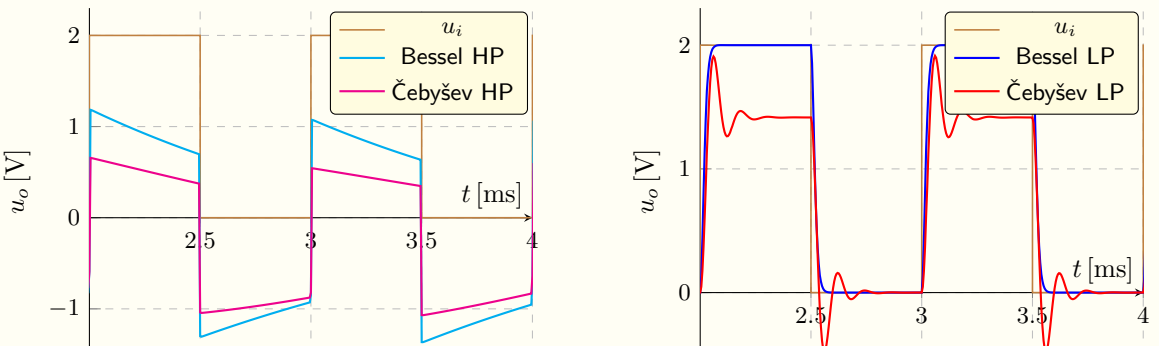




Skutečnost, že u horní propusti je časový průběh zcela rozdílný od průběhu vstupního signálu, byť obsahuje jednotlivé harmonické (k) signálu prakticky se stejnou amplitudou A_k (HP $f_{-p} = 1\,\mathrm{kHz}$), je dána fázovou charakteristikou filtrů. Fáze jednotlivých harmonických φ_k se mění nelineárně, tj. skupinové zpoždění $\tau_g(\omega)$ pro $f > 1\,\mathrm{kHz}$ není konstantní. Součet prvních padesáti harmonických na výstupu Besselova filtru pak ukazuje obrázek vpravo, který souhlasí s výše uvedeným průběhem.



Pokud přeladíme filtr HP na $f_{-p} = 100\,\mathrm{Hz}$ dostáváme po ustálení již očekávanou odezvu – odstranění DC složky. U LP filtru s $f_p = 10\,\mathrm{kHz}$ bude, při omezení kmitočtového pásma, vykazovat příznivější časový průběh Besselův LP filtr na obrázku vpravo. Menší amplituda výstupního signálu Čebyševova filtru je dána sudým řádem ($H_0 = 0{,}708$, viz amplitudovou charakteristiku na obrázku 9.25).



Obrázek 9.26: Odezva filtrů HP s hranicí propustného pásma $f_{-p} = 100\,\mathrm{Hz}$ a LP s $f_p = 10\,\mathrm{kHz}$ na obdélníkový signál s $f_s = 1\,\mathrm{kHz}$.

9.4. Kmitočtové transformace a normování

Doposud jsme se zabývali návrhem filtru typu dolní propust, resp. normovaná dolní propust. V této podkapitole je ukázán postup návrhu ostatních typů filtrů pomocí kmitočtové transformace z normované dolní propusti.

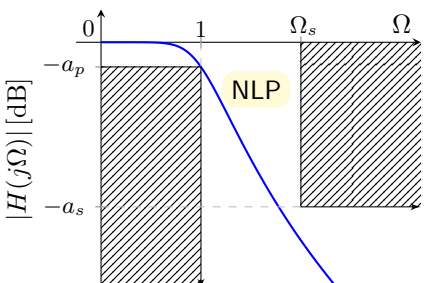
9.4.1. Transformace dolní propusti

Návrh NLP, normování dolní propusti na normovanou dolní propust (NLP) byla ukázaná v podkapitole 9.2.1. Pro transformaci kmitočtů mezi LP a NLP platí vztah (9.2), který lze rozšířit na transformaci Laplaceova operátoru:

$$S = \frac{s}{\omega_p} \Rightarrow \Omega = \frac{\omega}{\omega_p} = \frac{f}{f_p} \qquad (9.12)$$

kde S je normovaný operátor a Ω úhlový kmitočet pro normovanou dolní propust,
ω je pak úhlový kmitočet dolní propusti (nenormované).

Pomocí tohoto vztahu lze určit jednak parametry NLP (Ω_s), jak bylo ukázáno v podkapitole 9.2.1, tak přejít zpět od navržené přenosové funkce NLP k LP substitucí (9.12) za S.



Obrázek 9.27: Toleranční schéma normované dolní propusti v logaritmickém měřítku ([dB]) modulu přenosu.

9.4.2. Transformace horní propusti

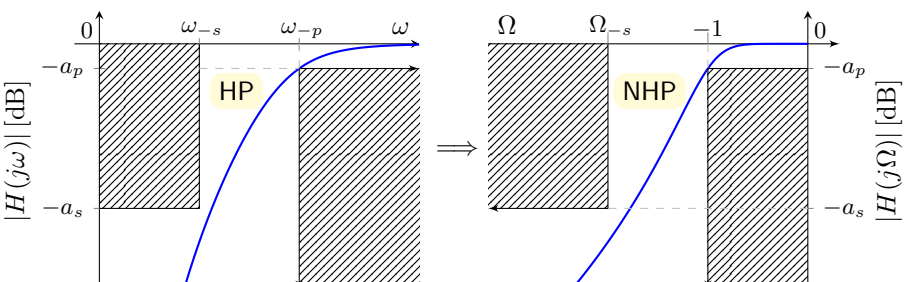
Jak lze převést dolní propust na horní? Pokud porovnáme elementární vztahy z tabulek 8.3 a 8.4 je zřejmé, že pokud dosadíme transformační vztah $s \to \frac{\omega_0^2}{s}$ do vztahu pro LP v tabulce 8.3, dostaneme 8.4, pokud navíc budeme normovat, pak $s \to \frac{\omega_0}{s}$ a dostaneme horní propust s normovaným zlomovým kmitočtem Ω_{-p}, tzv. normovanou horní propust (NHP). Obecně tedy lze zavést kmitočtovou transformaci:

$$S = \frac{1}{\frac{s}{\omega_{-p}}} = \frac{\omega_{-p}}{s} \quad (9.13)$$

$$\Rightarrow \Omega = -\frac{\omega_p}{\omega} = -\frac{f_p}{f} \quad (9.14)$$

$$\Omega_{-s} = -\frac{\omega_p}{\omega_s} = -\Omega_s \quad (9.15)$$

kde S je operátor a Ω úhlový kmitočet pro normovanou horní propust a ω je pak úhlový kmitočet horní propusti.



Obrázek 9.28: Toleranční schéma horní propusti a její transformace na normovanou horní propust (NHP).

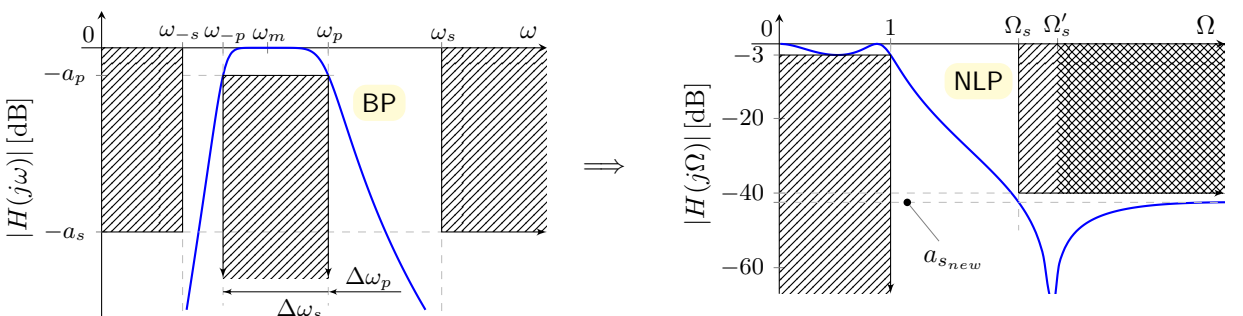
Z (9.14) je zřejmé, že kmitočtová osa pro NHP se na rozdíl od NLP transformuje do levé poloroviny. Mezní kmitočet propustného pásma odpovídající normované dolní propusti Ω_s pak získáme dle (9.15).

9.4.3. Transformace pásmové propusti

Vzhledem k tomu, že pásmovou propust lze složit z dolní a horní propusti, lze transformační vztah odvodit ze součtu výše uvedeného:

$$S = \frac{1}{\Delta\omega_p}\left(s + \frac{\omega_m^2}{s}\right) \quad \Rightarrow \quad \Omega = \frac{1}{\Delta\omega_p}\left(\omega + \frac{\omega_m^2}{\omega}\right) = \frac{\omega^2 - \omega_m^2}{\Delta\omega_p \cdot \omega} = \frac{f^2 - f_m^2}{\Delta f_p \cdot f} \tag{9.16}$$

kde S je operátor a Ω úhlový kmitočet pro normovanou pásmovou propust, ω je úhlový kmitočet pásmové propusti $\Delta\omega_p = \omega_p - \omega_{-p}$ je šířka a $\omega_m = \sqrt{\omega_{-p}\omega_p}$ je geometrický střed jejího propustného pásma, viz obrázek níže.



Obrázek 9.29: Toleranční schémata pásmové propusti a její transformace na normovanou dolní propust.

Je zřejmé, že výpočet kmitočtu hranice nepropustného pásma NLP je nutné provést jak pro ω_{-s}, tak ω_s. Pro nesymetrickou propust, tj. pro $\sqrt{\omega_{-s}\omega_s} \neq \omega_m$, dostáváme dva kmitočty Ω_s a Ω'_s, přičemž Ω_s je menší z obou $\left|\frac{f_{-s}^2 - f_m^2}{\Delta f \cdot f_{-s}}\right|$ a $\frac{f_s^2 - f_m^2}{\Delta f \cdot f_s}$. Výpočet transformace pásmové propusti ukážeme na následujícím příkladu.

Příklad 9.2 *Transformace a návrh pásmové propusti*

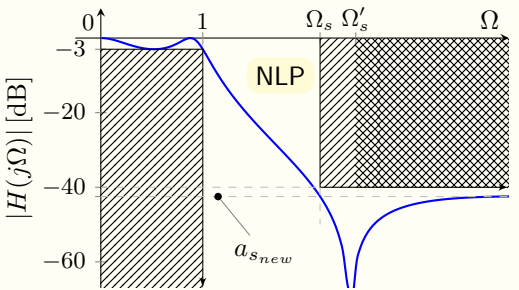
Zadání: Transformujte toleranční schéma BP s parametry $f_{-s} = 1{,}6\,\mathrm{kHz}$, $f_{-p} = 2\,\mathrm{kHz}$, $f_p = 3\,\mathrm{kHz}$, $f_s = 4\,\mathrm{kHz}$, $a_p = 3\,\mathrm{dB}$ a $a_s = 40\,\mathrm{dB}$ na schéma NLP, pro které určete přenosovou funkci Cauerovou aproximací a tu pak transformujte zpět na BP. K výpočtu aproximace využijte aplikaci SYNTFIL.

Řešení: Nejprve určíme následující parametry

$$\Delta f_p = f_p - f_{-p} = 1\,\mathrm{kHz},$$

$$f_m = \sqrt{f_{-p} f_p} \doteq 2{,}45\,\mathrm{kHz},$$

$$\left.\begin{aligned} \left|\frac{f_{-s}^2 - f_m^2}{\Delta f_p \cdot f_{-s}}\right| &= 2{,}15 \\ \frac{f_s^2 - f_m^2}{\Delta f_p \cdot f_s} &= 2{,}5 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \Omega_s &= 2{,}15 \\ \Omega'_s &= 2{,}5. \end{aligned}$$



Výpočet požadované aproximace již určíme pomocí aplikace SYNTFIL pro dané parametry NLP, tj. $\Omega_s = 2{,}15$, $a_p = 3\,\mathrm{dB}$ a $a_s = 40\,\mathrm{dB}$: řád přenosové funkce NLP je zaokrouhlen na nejbližší větší celé číslo $n = 3$, tím dostaneme větší minimální útlum v nepropustném pásmu $a_{s_{new}} \doteq 42{,}5\,\mathrm{dB}$, nakonec dostaneme póly a nuly charakteristické a přenosové funkce, která je pro NLP ve tvaru:

$$H(S) \doteq \frac{S^2 + 5{,}985256655}{21.84342659S^3 + 12.9292638S^2 + 20.67356S + 5.985256655} \tag{9.17}$$

Její modulová charakteristika NLP je vykreslena do tolerančního schématu na předchozím obrázku. Je zřejmé, že přenosová funkce obsahuje 3 póly a 2 nuly, přičemž nula je evidentně komplexně sdružená na imaginární ose, Jeden pól je komplexně sdružený a jeden evidentně na reálné ose viz parametry v následující tabulce níže, $H_2(S)$ je LP prvního řádu.

	Ω_0	Q	Ω_n
$H_1(S)$	0,92702683	3,39492	0,24464784
$H_2(S)$	0,31884338	–	–

Tabulka 9.4: Parametry přenosové funkce $H(S) = H_1(S)H_2(S)$ normované dolní propusti.

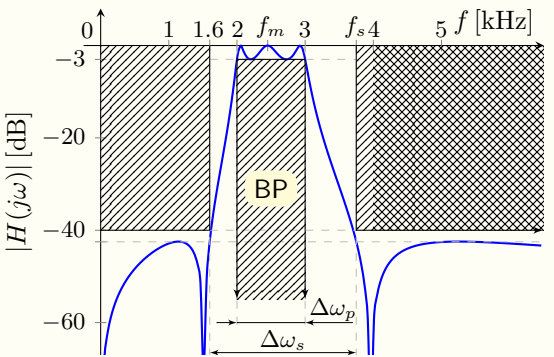
Pokud na vztah (9.17) aplikujeme kmitočtovou transformaci NLP→BP, tj. za normovaný operátor S dosadíme transformační vztah (9.16) a dostaneme přenosovou funkci pro požadovanou BP.

Parametry přenosové funkce BP jsou uvedeny v následující tabulce a její vykreslení do schématu BP vpravo.

	f_0 [Hz]	Q	f_n [Hz]
$H_1(s)$	2033,42493	18,25261	1514,70056
$H_2(s)$	2950,68675	18,25261	3961,17897
$H_3(s)$	2449,48974	7,68242	–

Tabulka 9.5: Parametry přenosové funkce $H(s) = KH_1(s)H_2(s)H_3(s)$ BP, kde $K \doteq 0{,}258764$.

Je zřejmé, že z funkce 2. řádu $H_1(S)$, tj. „eliptické“ typu LP vznikly po odnormování dvě funkce 2. řádu také „eliptické“, $H_1(s)$ typu HP ($f_n < f_0$) a $H_2(s)$ typu LP, viz tabulky 8.12 a 8.11. $H_1(S)$, tj. přenosová funkce 1. řádu typu LP se transformovala na základní funkci 2. řádu $H_3(s)$ typu BP, viz 8.10 (nula v 0 a ∞), tj. $H(0) = H(\infty) = 0 \equiv -\infty\,\mathrm{dB}$.



Obrázek 9.30: Výsledná symetrická BP po odnormování, kde $f_s = f_m^2/f_{-s} = 3{,}75\,\mathrm{kHz}$.

Transformace NDP→BP tedy zvyšuje dvojnásobně řád (řád BP je dvojnásovný oproti NDP). Tento postup vede vždy na sudý řád přenosové funkce BP. Necháme na uživateli, ať si vlastnosti transformací vyzkouší např. v návrhovém systému SYNTFIL.

9.4.4. Transformace pásmové zádrže

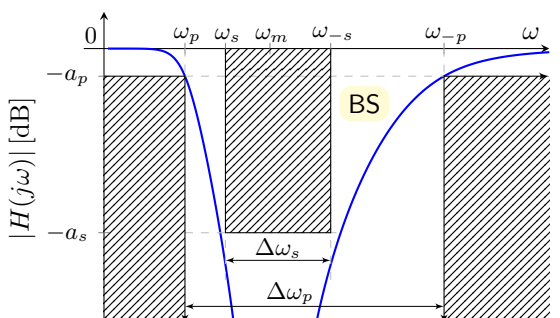
Transformační vztah pro pásmovou zádrž dostaneme ze vztahu (9.16) pro pásmovou propust analogicky jako tomu bylo pro transformaci HP z LP. Dostáváme opět operátor S a úhlový kmitočet Ω pro normovanou pásmovou zádrž, přičemž ω je úhlový kmitočet pásmové zádrže (nenormované).

$$S = \frac{1}{\frac{1}{\Delta\omega_p}\left(s + \frac{\omega_m^2}{s}\right)} \quad \Rightarrow \quad \Omega = \frac{\Delta\omega_p \cdot \omega}{\omega^2 - \omega_m^2} = \frac{\Delta f_p \cdot f}{f^2 - f_m^2} \tag{9.18}$$

Výpočet je zcela analogický výpočtu uvedenému u pásmové propusti. Kmitočtovou transformací se pásmová zádrž opět symetrizuje, což u původně nesymetrické zádrže vede také na posun jednoho z kmitočtů ω_s nebo ω_{-s}.

Výslední struktura vede vždy na přenosové funkce s nulami přenosu na imaginární ose (eliptické) a to i v případě, kdy přenosová funkce NLP má všechny nuly v ∞ (Besselova, Butterwortova i Čebyševova aproximace). Přenosová funkce 1. řádu pak vede na přenos dle tabulky 8.13.

Realizacemi navržené přenosové funkce pomocí elektronických obvodů se věnuje kapitola 17.



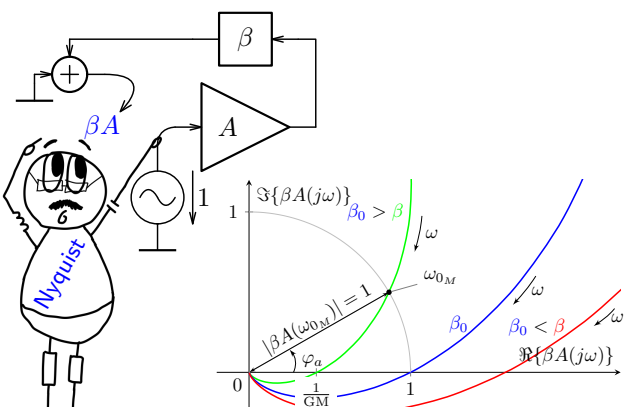
Obrázek 9.31: Toleranční schéma pásmové zádrže.

Poznámky IX

Kapitola 10

Zpětnovazební soustavy

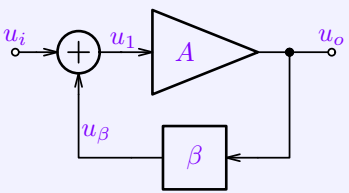
Tato kapitola popisuje princip zpětnovazebních (ZV) obvodů a vliv záporné zpětné vazby (ZZV) na vlastnosti a parametry těchto obvodů. Uživatel se seznámí s různými topologiemi ZV obvodů, jejich popisem a analýzou vlivu ZZV na různé parametry jako je zesílení, vstupní a výstupní odpor zesilovače, jeho šumové vlastnosti, linearita i kmitočtové vlastnosti včetně stability. Uvedené skutečnosti jsou demonstrovány na příkladech a podložené analýzou.Tyto znalosti pak využijeme v nejen v další kapitole, věnované operačním zesilovačům, ale i v dalším textu.



10.1. Princip zpětné vazby

Principiální signálové schéma zpětnovazebního (ZV) systému je na obrázku 10.1. Výsledný vztah pro signálový zisk je pak dán vztahem 10.1, kde u_i je vstupní a u_o výstupní signál, A je zisk zesilovače, β je zpětnovazební přenos a A' je zisk ZV soustavy. Činitel βA je *přenosem rozpojené ZV smyčky* a F je tzv. *vratným rozdílem*.

Vliv zpětné vazby na zesílení signálu



Obrázek 10.1: Princip ZV systému

$$u_1 = u_i + u_\beta \quad , u_\beta = u_o\beta,$$

$$u_o = u_1 A = (u_i + \beta u_o)A = \frac{u_i A}{1 - \beta A},$$

$$\Rightarrow \boxed{A' = \frac{u_o}{u_i} = \frac{A}{1 - \beta A} = \frac{A}{F}} \qquad (10.1)$$

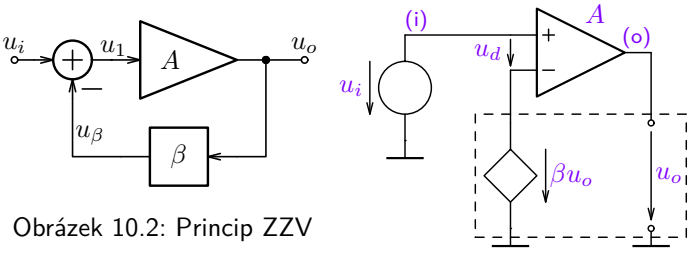
Zpětnovazební princip je velmi důležitý a používaný jak v přírodě tak v mnoha oborech lidské činnosti. Základem je snímání výstupní veličiny, její porovnání s veličinou vstupní/referenční a zesílení/úprava výstupní veličiny. ZV systémy jsou základem pro realizaci mnohých elektronických soustav, z obvodových soustav jsou to např. operační sítě (zesilovače, převodníky $u \to i$, $i \to u$, sumátory, ...), regulátory proudu a napětí a mnoho dalších, viz také motivační videoukázku. Tento kurz se věnuje zejména obvodovým ZV systémům.

10.2. Klasifikace ZV podle velikosti vratného rozdílu

Za předpokladu reálného součinu βA (odporové sítě[1]), rozdělujeme ZV podle velikosti vratného rozdílu F takto:

1. $\beta A < 0$ $(F > 1)$ $\Rightarrow$ $|A'| < |A|$ ... záporná zpětná vazba (ZZV)
2. $\beta A = 0$ $(F = 1)$ $\Rightarrow$ $|A'| = |A|$ ... obvod bez vazby,
3. $0 < \beta A < 1$ $(1 > F > 0)$ $\Rightarrow$ $|A'| > |A|$ ... stabilní kladná ZV,
4. $\beta A = 1$ $(F = 0)$ $\Rightarrow$ $|A'| \to \infty$ ... KZV, obvod je nestabilní/kmitá (využití v oscilátorech),
5. $\beta A > 1$ $(F < 0)$ $\Rightarrow$ A' obrátilo fázi, výstupní veličina narůstá tak, že se obvod bude chovat nelineárně.

Záporná zpětná vazba (ZZV) je nejrozšířenější. Lze použít invertující zesilovač ($A < 0$) nebo lze ZV signál u_β odečítat od vstupního signálu u_i (tj. $\beta < 0$) např. v rozdílovém zesilovači zesilující rozdíl u_d, viz následující obrázky.



Obrázek 10.2: Princip ZZV

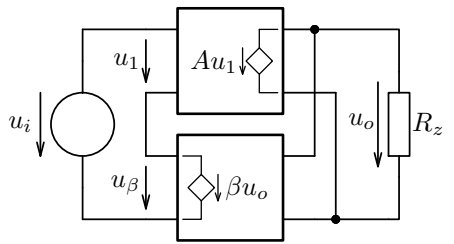
Blackův vztah pro ZZV

$$u_o = u_d A = (u_i - \beta u_o) A$$

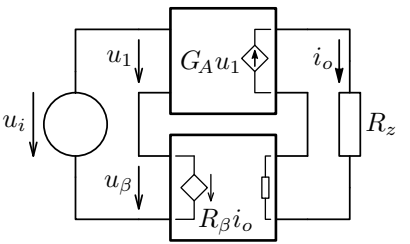
$$A' = \frac{u_o}{u_i} = \frac{A}{1 + \beta A} \qquad (10.2)$$

[1] V případě kmitočtově závislé soustavy je nutné vyhodnotit fázi a modul součinu βA pro každý kmitočet.

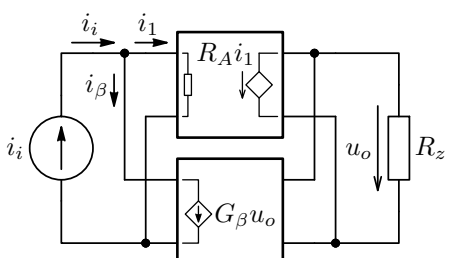
10.3. Klasifikace ZV podle obvodového uspořádání



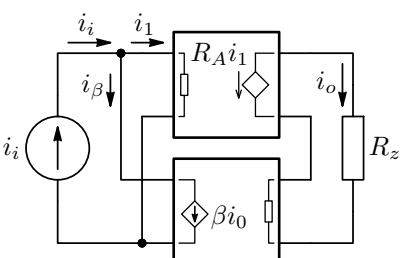
(a) sériová napěťová ZV



(b) sériová proudová ZV



(c) paralelní napěťová ZV

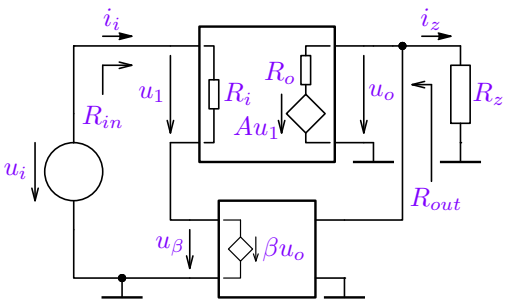


(d) paralelní proudová ZV

Obrázek 10.3: Dělení ZV dle spojení signálů na vstupu a dle typu snímaného signálu na výstupu.

10.3.1. Vliv obvodového uspořádání ZV na vstupní a výstupní odpor

Výše uvedená obvodová uspořádání mají zásadní vliv na některé parametry celkového zapojení. Je zřejmé, že princip zůstává shodný, ale liší se zesilované obvodové veličiny i typ převodní konstanty (zesílení a přenos ZV členu). Uspořádání ZV má pak zásadní vliv např. na vstupní a výstupní odpor zapojení.



Jedná se o zápornou ZV ($u_1 = u_i - u_\beta$) a pro $R_o = 0$ platí:

$$i_i = \frac{u_1}{R_i}, \quad u_i = u_1 + u_\beta, \quad u_\beta = \beta u_o = \beta u_1 A$$

$$\boxed{R_{in} = \frac{u_i}{i_i}} = \frac{(u_1 + u_\beta)R_i}{u_1} = \frac{u_1(1+\beta A)R_i}{u_1} = \boxed{R_i F}, \quad (10.3)$$

Výstupní odpor určíme např. z definice jako $R_{out} = \frac{u_o|_{R_z \to \infty}}{i_z|_{R_z = 0}}$

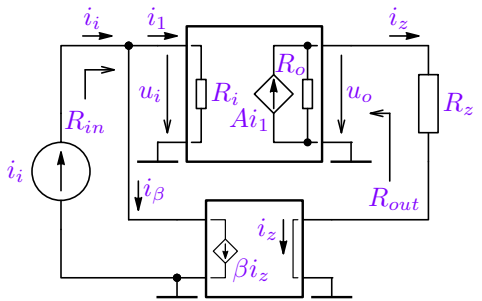
$$u_o = \frac{u_i A}{1+\beta A} \text{ pro } R_z \to \infty, \quad i_z = \frac{Au_1}{R_o} = \frac{Au_i}{R_o} \text{ pro } R_z = 0$$

$$\boxed{R_{out} = \frac{u_o|_{R_z \to \infty}}{i_z|_{R_z = 0}}} = \frac{R_o u_i A}{u_i A(1+\beta A)} = \frac{R_o}{1+\beta A} = \boxed{\frac{R_o}{F}}, \quad (10.4)$$

kde u_o je dáno (10.2) a $F = 1 + \beta A$ je vratný rozdíl pro ZZV.

Obrázek 10.4: Vliv sériové ZV na vstupní odpor a napěťové ZV na výstupní odpor ZV soustavy.

Obdobně určíme vliv zbývajících uspořádání ZZV na vstupní, resp. výstupní odpor. Jedná se opět o zápornou ZV ($i_1 = i_i - i_\beta$) v tomto případě paralelní proudovou ZV.



Pro ideální proudový výstup ($R_o \to \infty$) platí:

$$u_i = i_1 R_i, \quad i_i = i_1 + i_\beta, \quad i_\beta = \beta i_z = \beta i_1 A$$

$$\boxed{R_{in} = \frac{u_i}{i_i}} = \frac{i_1 R_i}{i_1 + i_\beta} = \frac{i_1 R_i}{i_1(1+\beta A)} = \boxed{\frac{R_i}{F}}, \tag{10.5}$$

Výstupní odpor určíme opět z definice jako $R_{out} = \frac{u_o|_{R_z \to \infty}}{i_z|_{R_z = 0}}$

$$i_z = \frac{i_i A}{1+\beta A} \text{ pro } R_z = 0, \quad u_o = A i_1 R_o = A i_i R_o \text{ pro } R_z \to \infty$$

$$\boxed{R_{out} = \frac{u_o|_{R_z \to \infty}}{i_z|_{R_z = 0}}} = \frac{A i_i R_o (1+\beta A)}{i_i A} = R_o(1+\beta A) = \boxed{R_o F}, \tag{10.6}$$

kde u_o je dáno (10.2) a $F = 1 + \beta A$ je vratný rozdíl pro ZZV.

Obrázek 10.5: Vliv paralelní ZV na vstupní odpor a proudové ZV na výstupní odpor ZV soustavy.

Viz i analýzu zde.

Vliv obvodového uspořádání ZV systému na jeho vstupní, resp. výstupní impedanci

Obecně, pro kmitočtově závislé lineární obvody je nutné místo odporů uvažovat impedance. Pak pro vliv topologie ZV platí, že vstupní impedanci/admitanci ovlivňuje uspořádání vstupní části soustavy, naopak výstupní impedanci/admitanci ovlivňuje uspořádání výstupní části soustavy následujícím způsobem:

sériová vazba:	$Z_{in} = Z_i F$	paralelní vazba:	$Y_{in} = Y_i F$
napěťová vazba:	$Y_{out} = Y_o F$	proudová vazba:	$Z_{out} = Z_o F$

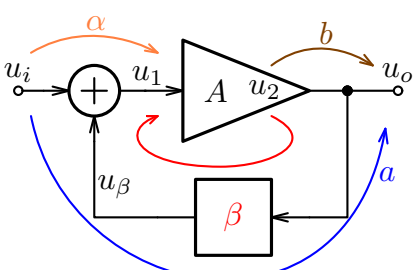
kde $F = 1 - \beta A$ je vratný rozdíl (pro ZZV $F = 1 + \beta A$)
$Z_i = \frac{1}{Y_i}$, resp. $Z_o = \frac{1}{Y_o}$ je vstupní, resp. výstupní impedance ZV systému pro $A = 0$.

Tabulka 10.1: Vliv obvodového uspořádání ZV systému na jeho vstupní, resp. výstupní impedanci.

Tohoto „fenoménu“ se hojně využívá jak v případě ZZV např. pro regulátory napětí, resp. proudu, kdy $R_{out} \to 0$, resp. $R_{out} \to \infty$ pro $A \to \infty$ nebo pro zesilovače napětí, resp. proudu, kdy $R_{in} \to \infty$, resp. $R_{in} \to 0$ pro $A \to \infty$, tak i v případě kladné ZV, kdy např. pro vstupní odpor $R_{in} \to \infty$ lze dosáhnout jednoduše pro $\beta A \to 1$ (viz např. tzv. bootstrap princip, případně zde.

10.4. Obecné blokové uspořádání obvodové ZV soustavy

Dosud uvedená obvodová zapojení byla principiální a navíc využívala unilaterální ZV člen, což nemusí být v mnoha reálných zapojeních splněno. Případný zpětný přenos může být vyloučen vlivem ideálních (nekonečných/nulových) vstupních nebo výstupních odporů zesilovače a ZV členu. To však představuje také zjednodušení, které není v obecném případě splněno. Obecný pohled na blokové uspořádání obvodové ZV soustavy s uvedeným popisem je na následujícím obrázku.



$$A' = \frac{u_o}{u_i} = a + \frac{\alpha b A}{1 - \beta A} = a + \frac{\alpha b A}{F} \tag{10.7}$$

kde $\alpha = \left.\frac{u_1}{u_i}\right|_{A=0}$ je přenos ze vstupu ZV soustavy na vlastní vstup zesilovače (přímého členu),
$a = \left.\frac{u_o}{u_i}\right|_{A=0}$ je „nepřímý“ přenos ze vstupu ZV soustavy na její výstup ($a = 0$, pokud je ZV člen unilaterální nebo pro $R_o = 0$),
$\beta = \frac{u_1}{u_2}$ je částečný přenos otevřené ZV smyčky z výstupu zesilovače na jeho vstup,
$b = \frac{u_o}{u_2}$ je částečný přenos otevřené ZV smyčky z výstupu zesilovače na výstup ZV soustavy,
$\beta A = \frac{u_1 A}{u_2}$ je pak evidentně celkový přenos otevřené ZV smyčky.

Obrázek 10.6: Obecné blokové uspořádání obvodové ZV soustavy

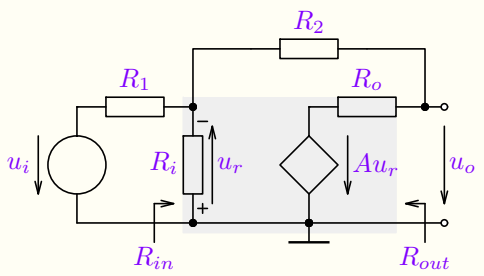
Signály jsou ve výše uvedeném blokovém zapojení značeny jako napětí (u), nicméně mohou odpovídat i proudům. Z toho je zřejmé, že zesilovač lze konstruovat jak s proudovým, tak napěťovým výstupem a jak s proudovým, tak napěťovým řízením a jeho převodní konstanta (zisk) nemusí být bezrozměrná, což platí samozřejmě i pro ZV člen. A vzhledem ke konečným/nenulovým vnitřním odporům (R_i, R_o) nemusí být výstup signál ZV soustavy napěťový, i když je zesilovač napěťový.[2]

Použití obecného popisu ukážeme na příkladech reálných ZV systémů.

Příklad 10.1

Zadání: Určete napěťový přenos, vstupní i výstupní odpor ZV soustavy dle níže uvedeného obrázku pomocí dílčích přenosů ZV smyčky.

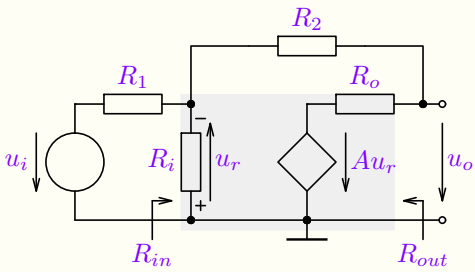
Jedná se o zapojení klasického invertujícího zesilovače s vlastním zesilovačem se zesílením A, vstupním odporem R_i a výstupním odporem R_o.



[2] Jaký by byl výstupní signál a výstupní odpor R_{out} obvodového systému z obrázku 10.3 (b), pokud by zesilovač byl tvořen napětím řízeným zdrojem napětí se zesílením A a vstupní odpor ZV členu je $R_{i\beta}$?

Řešení: Vzhledem k tomu, že ZV člen vykazuje zpětný přenos (není unilaterární) a $R_o \neq 0$, bude i přenos $a \neq 0$. Nejprve definujme pomocné odpory:

$$R_{1i} = R1||R_i, \quad R_{i2o} = R_i||(R_2 + R_o)$$



Pak pro jednotlivé dílčí přenosy ZV smyčky platí:

$$a = \left.\frac{u_o}{u_i}\right|_{A=0} = \frac{R_{i2o}}{R_1 + R_{i2o}} \frac{R_o}{R_2 + R_o}$$

$$\alpha = \left.\frac{u_r}{u_i}\right|_{A=0} = -\frac{R_{i2o}}{R_1 + R_{i2o}}, \quad \beta = \frac{u_r}{u_2} = -\frac{R_{i1}}{R_o + R_2 + R_{i1}}, \quad b = \frac{u_o}{u_2} = \frac{R_2 + R_{i1}}{R_o + R_2 + R_{i1}}$$

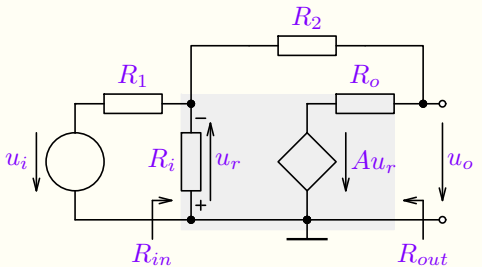
kde u_2 je budicí napětí na místě řízeného zdroje rozpojené ZV smyčky. Přenos ZV systému je pak dán (10.7) a výstupní odpor dle (10.4), resp. tabulky 10.1, přičemž orientace obvodových veličin (ZZV) je zahrnuta v dílčích přenosech, proto je použit člen pro obezný systém $1 - \beta A$:

$$A' = \frac{u_o}{u_i} = a + \frac{\alpha b A}{1 - \beta A} = -\frac{R_i(AR_2 - R_o)}{\big((A+1)R_1 + R_2 + R_o\big)R_i + R_1(R_2 + R_o)} = -\frac{R_2}{R_1} \quad \text{pro} \quad A \to \infty$$

$$R_{out} = \frac{R_{oc}}{1 - \beta A} = \frac{(R_1R_i + R_iR_2 + R_1R_2)R_o}{\big((A+1)R_1 + R_2 + R_o\big)R_i + R_1(R_2 + R_o)}, \quad \text{kde} \quad R_{oc} = R_o||(R_2 + R_{1i})$$

Vstupní odpor v tomto případě nezahrnuje R_1, který je chápán jako vnitřní odpor budicího zdroje u_i. Je nutné si uvědomit, že se jedná o paralelní ZV. Pokud bychom chtěli vstupní odpor z hlediska zdroje u_i přičteme k výsledku hodnotu R_1. Dle (10.5), resp. tabulky 10.1 pro $R_{in} = \frac{-u_r}{i_{R_1}}$ platí:

$$R_{in} = \frac{R_{i2o}}{1 - \beta_p A}, \quad \text{kde} \quad \beta_p = \left.\frac{u_r}{u_2}\right|_{R_1 \to \infty} = -\frac{R_i}{R_o + R_2 + R_i}.$$



Je zřejmé, že vstupní odpor bez vlivu ZV (pro $A = 0$) není pouze R_i, ale $R_{i2o} = Ri||(R_2 + R_o)$. Dále je nutné pro výpočet R_{in} změnit ZV přenos na β_p, který v případě paralelní ZV neovlivňuje vstupní zdroj (buzení je proudové, tj. $R_1 \to \infty$). I v případě výše uvedeného výstupního odporu byl výpočet založen na R_{oc}, tedy výstupním odporu bez vlivu ZV (pro $A = 0$) dle tabulky 10.1.

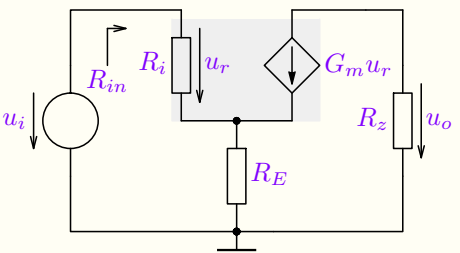
Výsledné vztahy i jejich ověření je uvedeno v symbolické analýze uvedeného obvodu. Viz také komentář.

V příkladu byla použita paralelní napěťová ZV. Následují dva jednoduché příklady, kde je použita sériová proudová a opět paralelní napěťová ZV, ale na rozdíl od výše uvedeného jsou použity řízené zdroje („zesilovače“), jejichž převodní konstanta („zesílení“) není bezrozměrná. Jak se ukáže, nebude pak bezrozměrný ani ZV přenos β.

Příklad 10.2

Zadání: Určete napěťový přenos, vstupní i výstupní odpor ZV soustavy dle níže uvedeného obrázku pomocí dílčích přenosů ZV smyčky.

Jedná se o linearizované zapojení klasického jednostupňového zesilovače SE s neblokovaným odporem R_E. Tranzistor (vlastní zesilovač) je reprezentován vstupním odporem R_i a převodní vodivostí G_m s ideálním proudovým výstupem ($R_o \to \infty$).



Řešení: Vzhledem k tomu, že $R_o \to \infty$ je evidentně i výstupní odpor soustavy $R_{out} \to \infty$ a přenos $a = \frac{u_o}{u_i}\Big|_{G_m=0} = 0$. Zesílení A zde odpovídá převodní vodivosti $A = G_m$ [S] a pro ostatní dílčí přenosy ZV smyčky platí:

$$\alpha = \frac{u_r}{u_i}\bigg|_{G_m=0} = \frac{R_i}{R_E + R_i}, \quad \beta = \frac{u_r}{i_2} = -R_i||R_E = -\frac{R_i R_E}{R_i + R_E}, \quad b = \frac{u_o}{i_2} = -R_z \text{ pro napěťový výstup.}$$

kde i_2 je budicí veličina, v tomto případě proud na místě řízeného zdroje rozpojené ZV smyčky.

Přenos ZV systému je pak dán (10.7) a vstupní odpor dle (10.3), resp. tabulky 10.1:

$$A' = \frac{u_o}{u_i} = a + \frac{\alpha b A}{1 - \beta A} = -\frac{G_m R_i R_z}{G_m R_i R_E + R_i + R_E}$$
$$R_{in} = (R_i + R_E)(1 - \beta A) = G_m R_i R_E + R_i + R_E,$$

kde $R_i + R_E$ je opět vstupní odpor bez vlivu ZV ($G_m = 0$).

Diskuse: Po absolvování základního kurzu jednostupňových tranzistorových zesilovačů bude zřejmé, že $G_m R_i = \beta_F$, což je proudový zesilovací činitel tranzistoru a vztah pro zesílení pak lze upravit na: $A' = -\frac{R_z}{R_E}$ pro $\beta_F \gg 1$ a $R_i \approx R_E$. Viz také komentář.

Pokud bychom vzali v úvahu výstupní odpor R_o zesilovače (zdroje proudu), jsou výsledné vztahy poměrně složité, ale lze ukázat výrazný vliv ZV na zvýšení R_{out} jako v případě kaskódového zapojení či Wilsonova proudového zrcadla (viz. podkapitoly 16.1.2, 16.1.3, 16.1.6, 16.4).

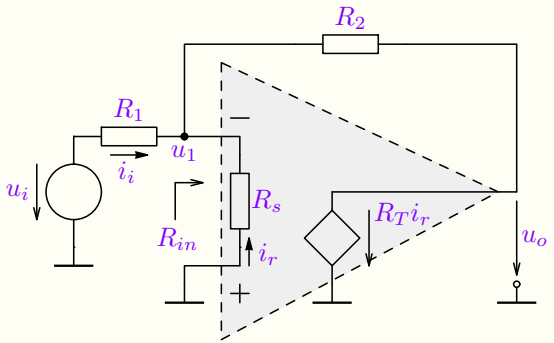
Výsledné vztahy i jejich ověření je uvedeno opět v symbolické analýze uvedeného obvodu.

Následující příklad ukazuje základní zapojení s transimpedančním zesilovačem, tj. proudem řízeným zdrojem napětí.

Příklad 10.3

Zadání: Určete napěťový přenos, vstupní odpor ZV soustavy dle níže uvedeného obrázku pomocí dílčích přenosů ZV smyčky.

Vlastní zesilovač je reprezentován vstupním odporem R_s a převodním odporem R_T (tzv. transimpedanční zesilovač) s ideálním napěťovým výstupem ($R_o = 0$).



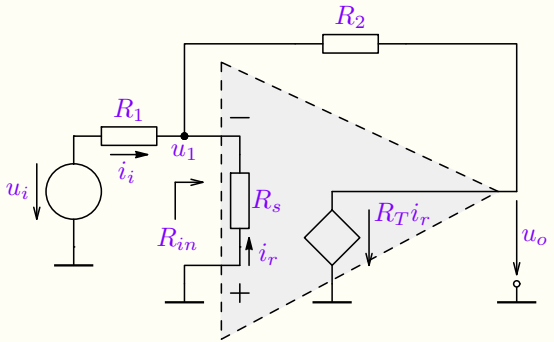
Řešení: Vzhledem k tomu, že $R_o = 0$ je evidentně i výstupní odpor soustavy $R_{out} = 0$ a přenos $a = \frac{u_o}{u_i}\big|_{R_T=0} = 0$. Zesílení A zde odpovídá převodní vodivosti $A = R_T$ [S] a pro výpočet ostatních přenosů ZV smyčky definujme opět pomocné odpory:

$$R_{1s} = R1||R_s, \quad R_{s2} = R_s||R_2$$

Pak pro ostatní dílčí přenosy ZV smyčky platí:

$$\beta = \frac{i_r}{u_2} = -\frac{R_{1s}}{(R_2 + R_{1s})R_s}, \quad b = \frac{u_o}{u_2} = 1$$

kde u_2 je budicí napětí na místě řízeného zdroje rozpojené ZV smyčky. Přenos ZV systému je pak dán (10.7) a vstupní odpor dle (10.5), resp. tabulky 10.1, pro který je nutné určit modifikovaný přenos β_p jako v případě příkladu 10.1. Výsledky je možné opět ověřit symbolickou analýzou daného obvodu. Viz také komentář.



$$A' = \frac{u_o}{u_i} = a + \frac{\alpha b A}{1 - \beta A} = -\frac{R_T R_2}{(R_s + R_2 + R_T)R_1 + R_s R_2} \doteq \left.\frac{-\frac{R_2}{R_1}}{\frac{R_2}{R_T} + 1}\right|_{R_s \ll R_1, R_2} \doteq \left. -\frac{R_2}{R_1}\right|_{R_T \gg R_2} \tag{10.8}$$

$$R_{in} = \frac{R_{s2}}{1 - \beta_p A} = \frac{R_s R_2}{R_s + R_2 + R_T}, \quad \text{kde} \quad \beta_p = -\frac{R_s}{(R_2 + R_s)R_s} \tag{10.9}$$

I v případě symbolických simulátorů, kdy není nutný ruční výpočet, umožňuje tento přístup snadno určit jaké prvky obvodu mají dominantní vliv na daný parametr obvodu. Např. u invertujícího zesilovače (příklad 10.1) by v případě ideálního OZ byl $R_i = \infty$. Pokud bychom aplikovali přímo vztah 10.5, vyšel by i $R_{in} \to \infty$, což je evidentně nesmysl (viruální zkrat). Proud samozřejmě neteče do R_i, ale do R_2, proto se ve vztahu pro R_{in} musí vyskytovat!

Další výklad je zaměřen na vliv záporné ZV na vlastnosti obvodových struktur ze signálového hlediska.

10.5. Vliv ZZV na změnu zesílení zesilovače A'

Obecně lze vyšetřovat vliv ZV na změny všech typů parametrů. Zde je ukázán vliv ZZV na změny celkového zesílení A' dle (10.1) pro změny zesílení $S_A = \frac{dA}{A}$ vlastního zesilovače.

$$S_{A'} = \frac{\mathrm{d}A'}{A'} = \frac{\mathrm{d}A'}{\mathrm{d}A}\frac{\mathrm{d}A}{A'} = \left(\frac{1}{1-\beta A} + \frac{\beta A}{(1-\beta A)^2}\right)\frac{\mathrm{d}A}{A'} = \frac{1}{(1-\beta A)^2}\frac{\mathrm{d}A}{A'} = \frac{\mathrm{d}A}{AF} \tag{10.10}$$

Příklad 10.4

Jak velké zesílení A' lze dosáhnout se zesilovačem s $A = 10^5$ a relativní změnou zesílení $S_A = 50\,\%$ po zavedení ZV, když je požadována maximální relativní změna výsledného zapojení $S_{A'} = 0{,}5\,\%$.

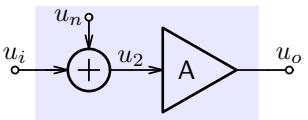
Řešení:

$$F = \frac{\frac{\mathrm{d}A}{A}}{\frac{\mathrm{d}A'}{A'}} = \frac{50}{0.5} = 100 \;\Rightarrow\; A' = \frac{A}{F} = 1000.$$

Diskuse: Je zřejmé, že např. OZ s $A = 10^5$ má pro velké hodnoty F (malá A') malý vliv na celkové zesílení A'. I při odchylkce A až o $50\,\%$ vykazuje výsledné zesílení chybu maximálně $0{,}5\,\%$ až do zesílení $A' = 1000$.

10.6. Vliv ZZV na šumové vlastnosti

Prakticky každý elektronický prvek generuje šum (šumový signál/napětí). Např. u zesilovače lze jeho celkový vlastní šum vyjádřit vstupním zdrojem šumu u_n, který se přičítá k užitečnému vstupnímu signálu u_i, viz obrázek 10.7.



Obrázek 10.7: Zesilovač se zdrojem šumového signálu reprezentujícího vlastní šum zesilovače.

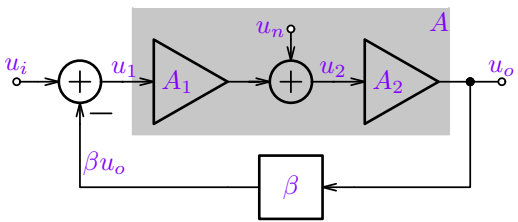
Pro výstupní napětí lze psát

$$u_o = Au_i + Au_r. \tag{10.11}$$

Výstupní napětí zesilovače se skládá jednak ze složky odpovídající budicímu signálu u_i, jednak ze složky odpovídající šumovému (rušivému) napětí zesilovače u_r na jeho vstupu. Odstup signál-šum (Signal-to-Noise Ratio, SNR) je definován jako podíl výkonů užitečného a šumového signálu, tj. podílem kvadrátů výše uvedených napěťových složek (kvadrátů efektivních hodnot napětí):

$$\mathrm{SNR} = \frac{P_{\mathrm{signal}}}{P_{\mathrm{noise}}} = \frac{(Au_i)^2}{(Au_n)^2} = \frac{u_i^2}{u_n^2} \equiv 10\log\left(\frac{u_i}{u_n}\right)^2 = 20\log\frac{u_i}{u_n}\ [\mathrm{dB}]. \tag{10.12}$$

Zesilovač s definovaným odstupem signál-šum SNR zapojíme do obvodu ZZV s bezšumovým předzesilovačem A_1 tak, jak udává obrázek 10.8. Pro určení výstupního napětí u_o lze použít např. metodu superpozice.



Obrázek 10.8: Zesilovač se zdrojem šumového signálu ve ZV struktuře.

Vliv ZZV na šumové vlastnosti ZV systému

$$u_o = u_i \frac{A_1 A_2}{1 + A_1 A_2 \beta} + u_n \frac{A_2}{1 + A_1 A_2 \beta} \qquad (10.13)$$

Pro odstup signál-šum celého ZV systému evidentně platí:

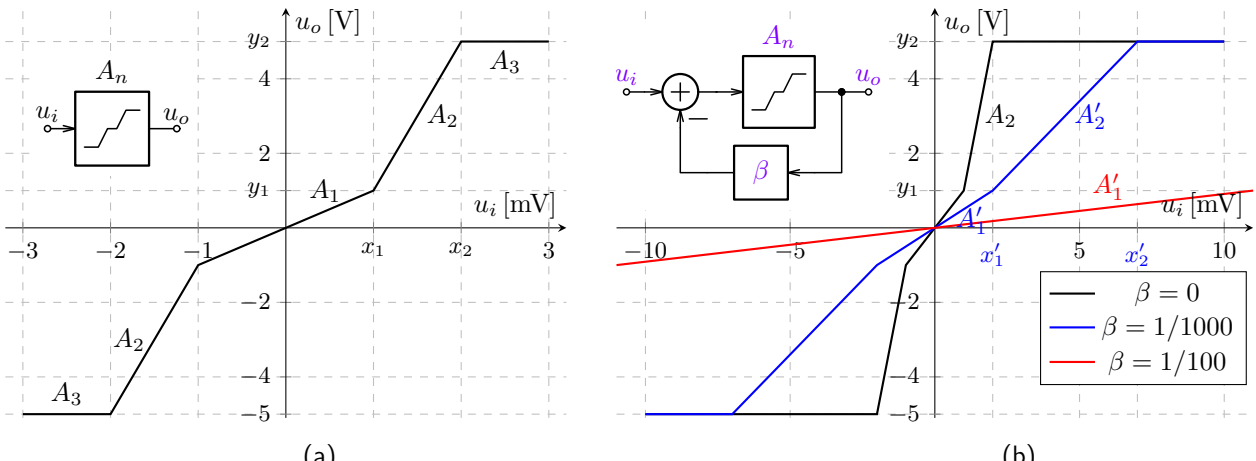
$$\mathrm{SNR}' = \frac{(u_i A_1)^2}{u_n^2} = \mathrm{SNR} \cdot A_1^2, \qquad (10.14)$$

kde SNR je odstup signál-šum zesilovače A_2.

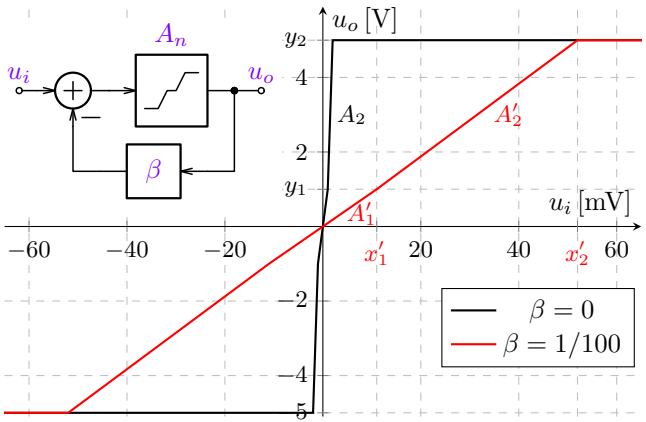
Odstup signál-šum původního zesilovače se zvětšil A_1^2-krát, kde A_1 je zesílení předzesilovače. Z tohoto důvodu se v kaskádní struktuře zesilovače se zavedenou ZV snažíme zesílení soustředit do prvních stupňů. Šum následujících stupňů se pak v celkovém odstupu s/š prakticky neuplatní. Na výsledné rušivé složce výstupního signálu se pak podílí zejména šum prvního (prvních) stupňů zesilovače, které se z tohoto důvodu konstruují jako nízkošumové.

10.7. Vliv ZZV na linearitu obvodu

Pokud zesilovači A_n se symetrickou nelineární převodní charakteristikou (a) zavedeme zápornou ZV ($A' = \frac{A}{1+\beta A}$) s různým činitelem záporné vazby β snížíme zesílení a tím i nelinearitu převodní charakteristiky, viz obrázek (b).



Obrázek 10.9: Převodní charakteristika nelineárního systému bez ZV a ze zavedenou ZZV pro různé činitele β.



Obrázek 10.10: Převodní charakteristika nelineárního systému pro větší rozsah vstupního napětí.

Zlomy nastávají při stejných hodnotách výstupního napětí. To je dáno napěťovou ZZV (výstupní napětí zesilovače je přímo výstupním napětím celé soustavy, což pro vstupní napětí neplatí). Z tohoto důvodu se mění vstupní napětí, při kterém nastává zlom – viz následující tabulka. Změnou sklonů charakteristiky A_1' a A_2' se charakteristika linearizuje.

β	A_1'	A_2'	x_1' [mV]	x_2' [mV]
0	1000	4000	1	2
1/1000	500	800	2	7
1/100	91	98	11	52

Tabulka 10.2: Souřadnice x_i zlomových bodů a jednotlivých zesílení A_i' pro různé hodnoty ZV přenosu β.

Následuje ukázka typického přechodového zkreslení, které se vyskytuje v koncových stupních tranzistorových zesilovačů pracujících ve třídě B. jedná se o neaktivní oblast kolem počátku převodní charakteristiky, kterou lze minimalizovat pomocí ZZV[3].

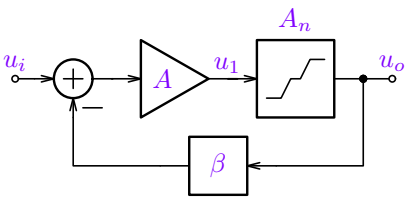
[3] Toto přechodové zkreslení se také minimalizuje DC předpětím – tzv. třída AB, viz kapitolu 16.17.3.

Nechť pro nelineární koncový stupeň A_n se saturačním napětím 5 V platí:

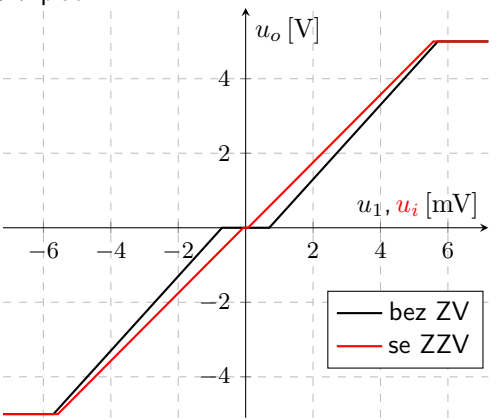
$$u_o = \begin{cases} 0 & u_1 \leq 0{,}7\,\mathrm{V}, \\ u_1 - 0{,}7 & 0{,}7 < u_1 < 5{,}7\,\mathrm{V}, \\ 5 & u_1 \geq 5{,}7\,\mathrm{V}, \end{cases}$$

pak pro ZV systém dle obrázku 10.11 s předzesilovačem A, koncovým stupněm A_n a zavedenou ZZV se ZV přenosem β se převodní charakteristika změní v „aktivní“ oblasti 1. kvadrantu na (10.15). Kompletní charakteristika je na obrázku 10.12.

$$u_o = \frac{A\left(u_i - \frac{0{,}7}{A}\right)}{1 + \beta A} \quad \text{pro} \quad u_i > \frac{0{,}7}{A}\,\mathrm{V} \text{ a } u_o < 5\,\mathrm{V}. \qquad (10.15)$$



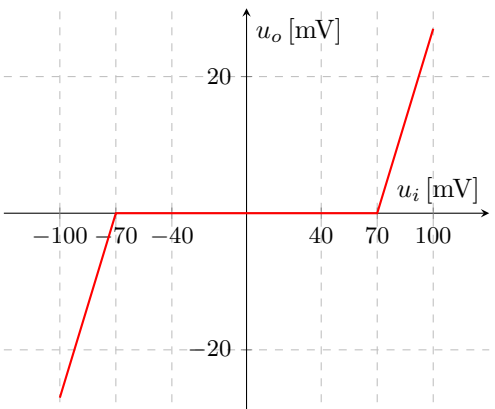
Obrázek 10.11: ZV systém s koncovým stupněm A_n.



Obrázek 10.12: Převodní charakteristika koncového stupně A_n bez ZV a celého systému se ZZV obsahující koncový stupeň A_n, zesilovač $A = 10$ a ZV přenos $\beta = 1$.

Detail přechodové charakteristiky v okolí počátku je pak na obrázku 10.13.

Je zřejmé, že silnější ZZV (vyšší hodnota ZV přenosu β, resp. vratného rozdílu F) vede na spolu se snížením celkového zesílení i ke snížení nelinearity systému. Zvýšením rozdílu F, tj. zesílení které je uzavřeno ve ZV (na úkor „vnějšího“ zesílení ZV soustavy) se zlepšují vlastnosti soustavy. V tomto případě je pouze $F \doteq 10$. Je zřejmé, že v případě velkého zesílení A a stejné hodnoty $\beta \approx 1$, nevzroste celkové zesílení, ale vzroste F a tím klesne přechodové zkreslení. To lze jednoduše ověřit analýzami obvodů, na které vedou odkazy (případ 1 a případ 2).



Obrázek 10.13: Detail přechodové charakteristiky ZV systému s koncovým stupněm A_n.

Vliv ZZV na činitel harmonického zkreslení (THD)

Nelinearitu můžeme charakterizovat činitelem harmonického zkreslení (THD – Total Harmonic Distortion viz (6.17)), pro který pak lze psát:

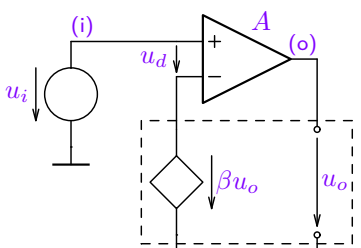
$$\text{THD'} = \frac{\sqrt{\frac{U_{o2}^2}{F^2} + \frac{U_{o3}^2}{F^2} + \frac{U_{o4}^2}{F^2} + \cdots}}{U_o} = \frac{\text{THD}}{F}$$

kde U_o je efektivní hodnota výstupního napětí,
U_{oi} jsou vyšší harmonické U_o,
THD je zkreslení systému bez ZV,
THD' je zkreslení ZV systému a
F je velikost vratného rozdílu.

10.8. Vliv ZZV na dynamické vlastnosti soustavy

10.8.1. Kmitočtové vlastnosti napěťového zesilovače se ZZV

Uvažujme napěťový zesilovač s napěťovou sériovou ZZV dle obrázku 10.14, přičemž předpokládejme, že přenos vlastního zesilovače $A(s)$ obsahuje jeden pól přenosu na kmitočtu ω_0 a zesílení pro stejnosměrný signál A_0. Celkový přenos ZV soustavy $A'(s)$ s kmitočtově nezávislým ZV přenosem $\beta = \text{konst.}$ lze pak vyjádřit následovně:



Obrázek 10.14: Napěťový zesilovač s přenosem $A(s)$ a napěťovou sériovou ZZV (neinvertující zapojení).

$$A(s) = A_0 \frac{\omega_0}{s+\omega_0}, \text{ potom dle 10.2, resp. 10.7 je}$$

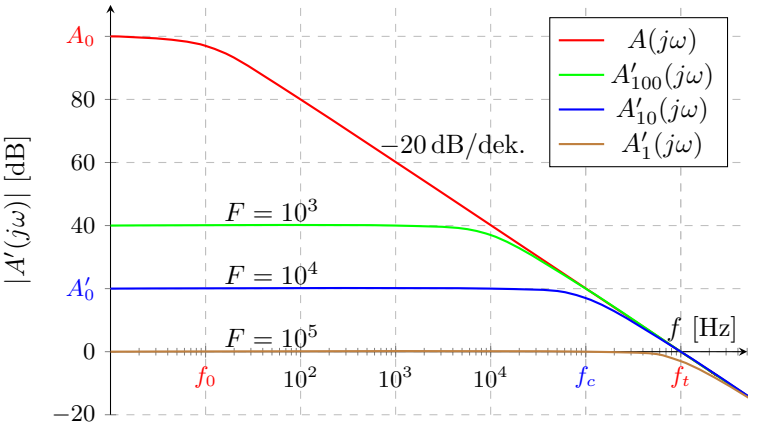
$$A'(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{\alpha b A(s)}{1+\beta A(s)} = \frac{\alpha b A_0 \omega_0}{s+\omega_0-\beta A_0 \omega_0}.$$

Dále uvažujme přenosy $\alpha b = 1$ (neinvertující zapojení dle obrázku), výraz rozšíříme a po úpravě dostaneme:

$$\boxed{A'(s)} = \frac{1+\beta A_0}{1+\beta A_0} \frac{A_0 \omega_0}{s+\omega_0-\beta A_0 \omega_0} = \frac{A_0}{1+\beta A_0} \frac{\omega_0(1+\beta A_0)}{s+\omega_0(1+\beta A_0)} =$$

$$= \boxed{A'_0 \frac{\omega_c}{s+\omega_c}, \quad \text{kde } A'_0 = \frac{A_0}{1+\beta A_0} = \frac{A_0}{F}; \quad \omega_c = \omega_0(1+\beta A_0) = \omega_0 F} \tag{10.16}$$

Typické modulové charakteristiky uvedeného ZV systému se zesilovačem s $A_0 = 10^5$ a $f_0 = 10\,\mathrm{Hz}$ pro různé velikosti vratného rozdílu F (např. pro $A'_{10}(j\omega)$ je $F = 10^4$ a $\beta \doteq 1/10$, atd.) jsou uvedeny na obrázku 10.15.



Obrázek 10.15: Modulové charakteristiky $|A'(j\omega)|$ ZV systému s napěťovým zesilovačem s přenosem $A(s)$, viz analýzu a komentář.

Vliv ZZV na šířku pásma napěťového zesilovače

Zlomový kmitočet ω_c celkového přenosu ZV soustavy $A'(j\omega)$ s napěťovým zesilovačem s přenosem $A(s)$ obsahujícím jeden pól přenosu na kmitočtu ω_0 se násobně zvětší vratným rozdílem F:

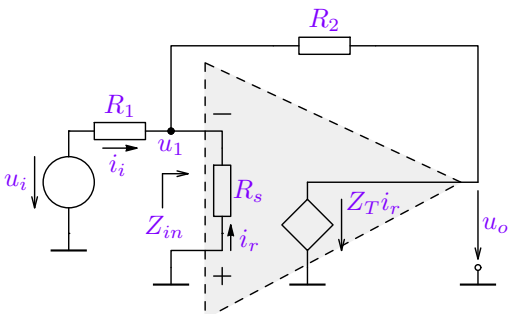
$$\omega_c = \omega_0(1 + \beta A_0) = \omega_0 F\,, \tag{10.17}$$

předpokládáme-li ZZV a kmitočtově nezávislý přenos zpětnovazebního členu β.

Paralelní ZZV (invertující zapojení s napěťovým zesilovačem) má pro $A'_0 = -1$, tj. $\alpha = \beta = 1/2$ poloviční šířku pásma $f_c = f_t/2$ oproti $f_c = f_t$ pro zde uvedenému případu neinvertujícího zesilovače.

10.8.2. Kmitočtové vlastnosti transimpedančního zesilovače se ZZV

Nyní uvažujme transimpedanční zesilovač (výstupní napětí řízený vstupním proudem) s napěťovou paralelní ZZV dle obrázku 10.16. Opět předpokládejme, že přenos (přenosová impedance) vlastního zesilovače $Z_T(s)$ obsahuje jeden pól přenosu na kmitočtu ω_0 a transimpeanci pro stejnosměrný signál R_T. Pro celkový přenos ZV soustavy $A'(s)$ získáme ze vztahu (10.8) odvozeném v příkladu 10.3, kde místo R_T uvedeme $R_T \Rightarrow Z_T(s) = \frac{R_T}{1+s/\omega_0}$. Pak



Obrázek 10.16: Transipedanční zesilovač s transimpedancí $Z_T(s)$ a napěťovou paralelní ZZV. Pro kmitočtové charakteristiky viz analýzu, komentář a také kapitolu 17.3.4.

$$A'(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \left.\frac{-\frac{R_2}{R_1}}{\frac{R_2}{R_T} + s\frac{R_2}{\omega_0 R_T} + 1}\right|_{R_s \ll R_1, R_2} \doteq \left.\frac{-\frac{R_2}{R_1}}{1 + s\frac{R_2}{\omega_0 R_T}}\right|_{R_T \gg R_2} \tag{10.18}$$

Šířka pásma transimpedančního zesilovače

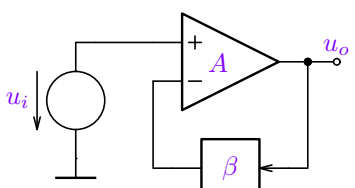
Zlomový kmitočet celkového ZV přenosu s transimpedančním zesilovačem obsahujícím jeden pól přenosu na kmitočtu ω_0 je v ideálním případě ($R_s \ll R_1, R_2$) nezávislý na zesílení R_2/R_1 a šířka pásma je úměrná hodnotě R_2:

$$\omega_c \doteq \frac{\omega_0 R_T}{R_2}, \tag{10.19}$$

10.8.3. Dynamické vlastnosti zpětnovazebních struktur vyšších řádů

Pro kmitočtové závislosti vyšších řádů ($n \geq 2$) mohou být póly přenosu ZV systému jak reálné, tak komplexní a pro $n > 2$ je vždy nutno provést kontrolu stability soustavy.

Vlastnosti takových systémů budeme demonstrovat na jednoduchém příkladu zesilovače se dvěma, resp. třemi póly a se zavedenou sériovou napěťovou ZZV. Ukážeme jejich kmitočtové charakteristiky v závislosti na velikosti zpětnovazebního přenosu β, resp. vratného rozdílu F a jejich souvislost s polohou pólů, tj. i stabilitou systému.



$$H(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{A(s)}{1 + \beta A(s)}$$

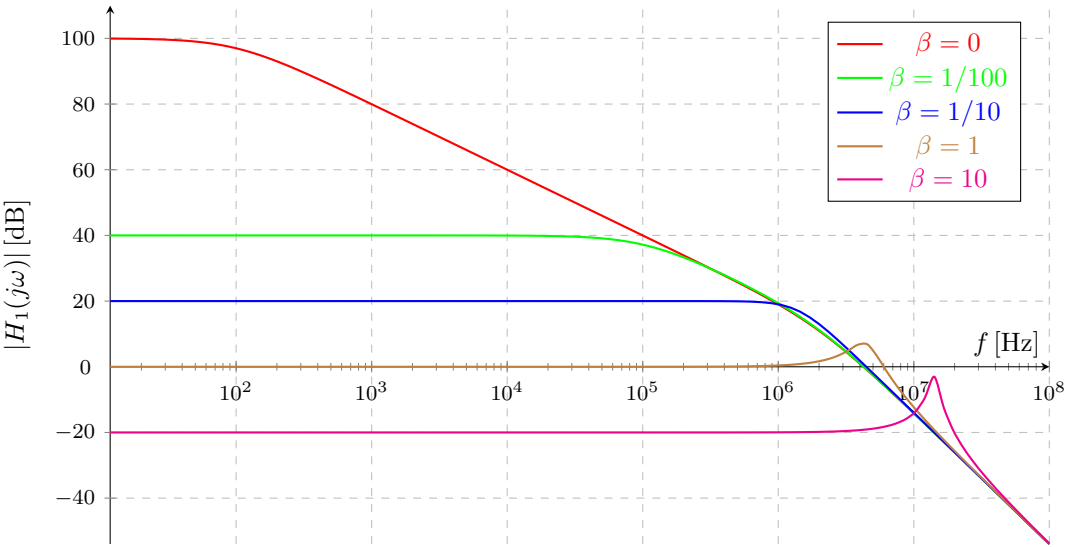
$$H(0) \doteq \frac{1}{\beta} \quad \forall \quad A(0)\beta = A_0\beta \gg 1$$

Obrázek 10.17: ZV systém se sériovou ZZV.

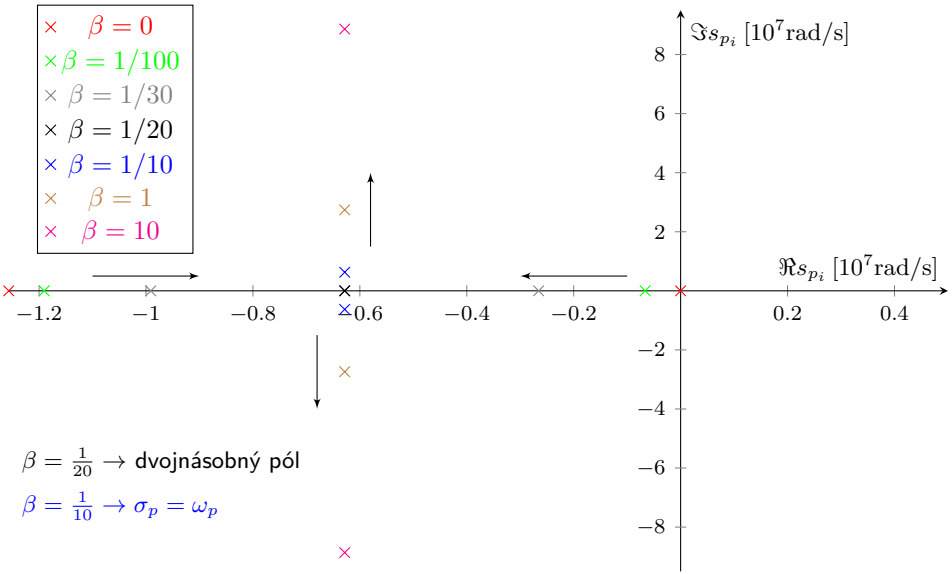
Uvažujme následující případy:

1. $A_1(s) = \dfrac{A_0}{(1 + s/\omega_1)(1 + s/\omega_2)}$, kde $A_0 = 10^5$, $\omega_1 = 2\pi 100$, $\omega_2 = 2\pi 2 \cdot 10^6$ [rad/s]
2. $A_2(s) = \dfrac{A_0}{(1 + s/\omega_1)(1 + s/\omega_2)(1 + s/\omega_3)}$, kde $A_0 = 10^5$, $\omega_1 = 2\pi 100$, $\omega_2 = 2\pi 2 \cdot 10^6$, $\omega_2 = 2\pi 4 \cdot 10^6$ [rad/s]

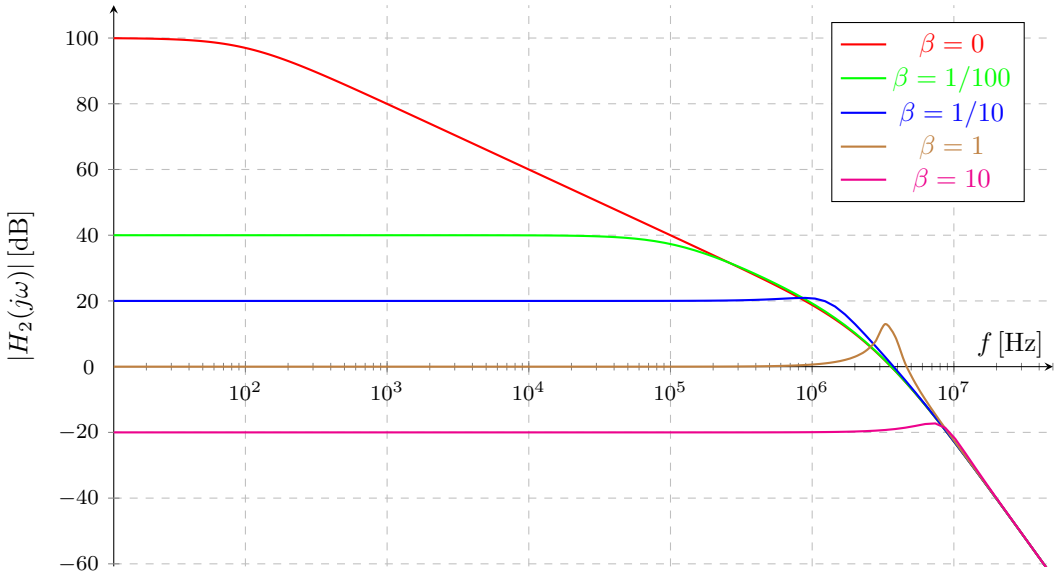
Následují ukázky modulových charakteristik a jim odpovídají rozložení pólů přenosů $H_1(j\omega)$ a $H_2(j\omega)$ a pro různé velikosti zpětnovazebního přenosu β. Ověření všech charakteristik, včetně časových odezev lze pomocí analýzy.



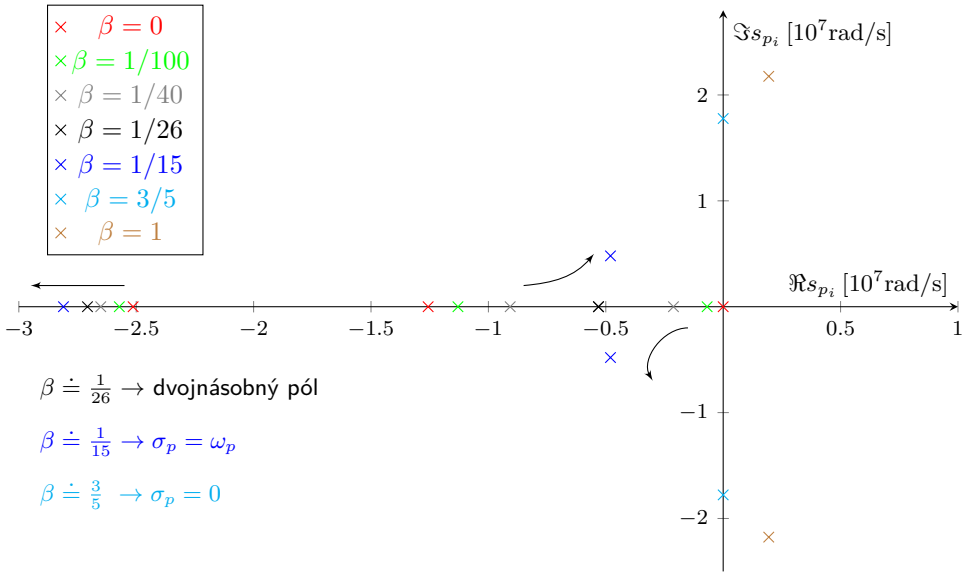
Obrázek 10.18: Modulové charakteristiky ZV systému $H_1(j\omega) = \frac{A_1(j\omega)}{1+\beta A_1(j\omega)}$ pro $\beta = 0$, $1/100$, $1/10$, 1, 10.



Obrázek 10.19: Póly ZV systému $H_1(s) = \frac{A_1(s)}{1+\beta A_1(s)}$ pro $\beta = 0$, $1/100$, $1/30$, $1/20$, $1/10$, 1, 10.



Obrázek 10.20: Modulové charakteristiky ZV systému $H_2(j\omega) = \frac{A_2(j\omega)}{1+\beta A_2(j\omega)}$ pro $\beta = 0$, $1/100$, $1/10$, 1, 10.

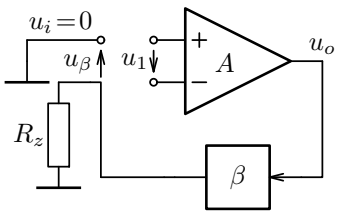


Obrázek 10.21: Póly ZV systému $H_2(s) = \frac{A_2(s)}{1+\beta A_2(s)}$ pro $\beta = 0$, $1/100$, $1/40$, $1/26$, $1/15$, $3/5$, 1.

Je samozřejmé, že převýšení na modulové charakteristice vzniká v důsledku komplexně sdružených pólů (dokonce při $\sigma_p < \omega_p$). Z rozložení pólů je zřejmá i nestabilita ZV soustavy pro $n = 3$, tj. $H_2(s)$ a $\beta \geq 3/5$, s čímž souvisí i pokles převýšení na modulové charakteristice pro $\beta = 10$. Chování v časové oblasti je demonstrováno analýzou přechodové charakteristiky, viz také komentář. Stabilitou ZV soustav se zabývá poslední podkapitola.

10.8.4. Stabilita zpětnovazebních soustav

Nejčastěji se nestabilita ZV soustav vyšetřuje na základě přenosu otevřené ZV smyčky (10.20) pomocí Nyquistova kritéria. Zásadní výhodou tohoto kritéria např. pro praxi (měření) je, že tato metoda vychází z charakteristik rozpojené ZV, tj. stabilního systému. Dále tato metoda nabízí i klasifikaci „kvality“ stability v podobě parametrů.

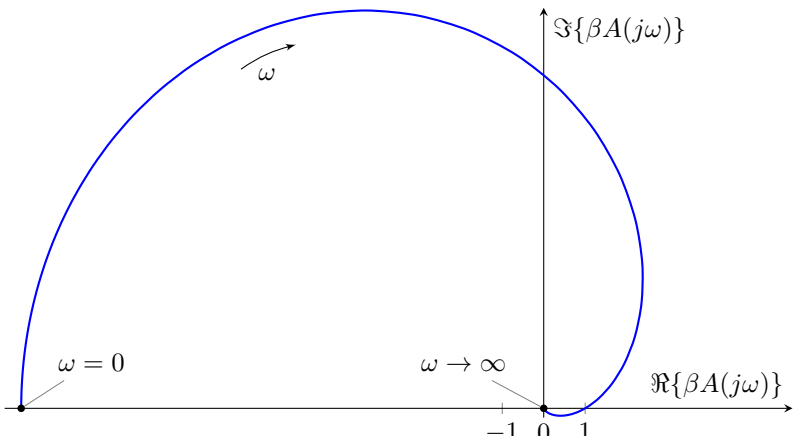


Obrázek 10.22: Určení přenosu rozpojené ZV smyčky βA.

$$\beta A = \frac{U_o(s)}{U_1(s)} \cdot \frac{U_\beta(s)}{U_o(s)} = \frac{U_\beta(s)}{U_1(s)} \tag{10.20}$$

Vyjdeme z konfigurace 10.1. Rozpojenou ZV smyčku je nutné správně zakončit, aby její přenos (10.20) odpovídal realitě (při zavedení ZV). Smyčku rozpojujeme obvykle na vstupu zesilovače (v jeho řízení) – viz obrázek 10.22, kvůli snadnému zakončení. Zatěžovací odpor R_z je určen podle zapojení ZV (sériová/paralelní) vstupním odporem/impedancí zesilovače a vnitřním odporem budicího zdroje tak, aby zatížení zpětnovazebního členu bylo stejné jako před rozpojením ZV smyčky.

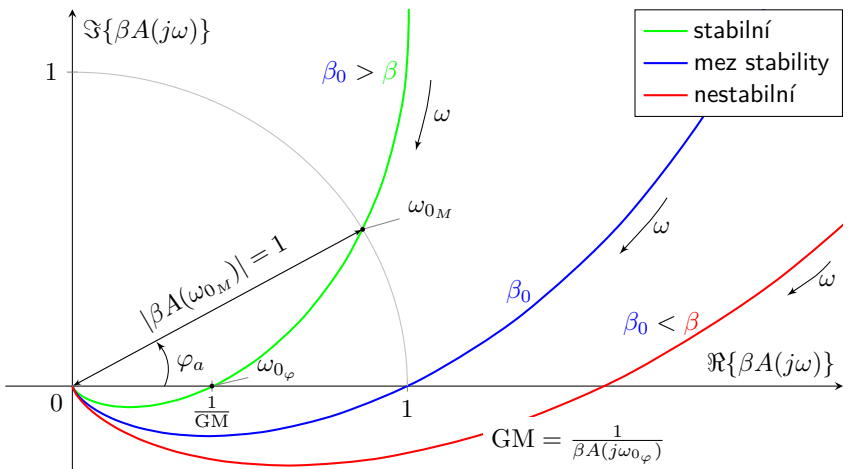
Kmitočtová charakteristika přenosu rozpojené ZV smyčky βA v komplexní rovině nesmí pro stabilní ZV systém obepínat bod 1 na reálné ose. V tomto případě obrázku 10.23 se jedná o systém na mezi stability.



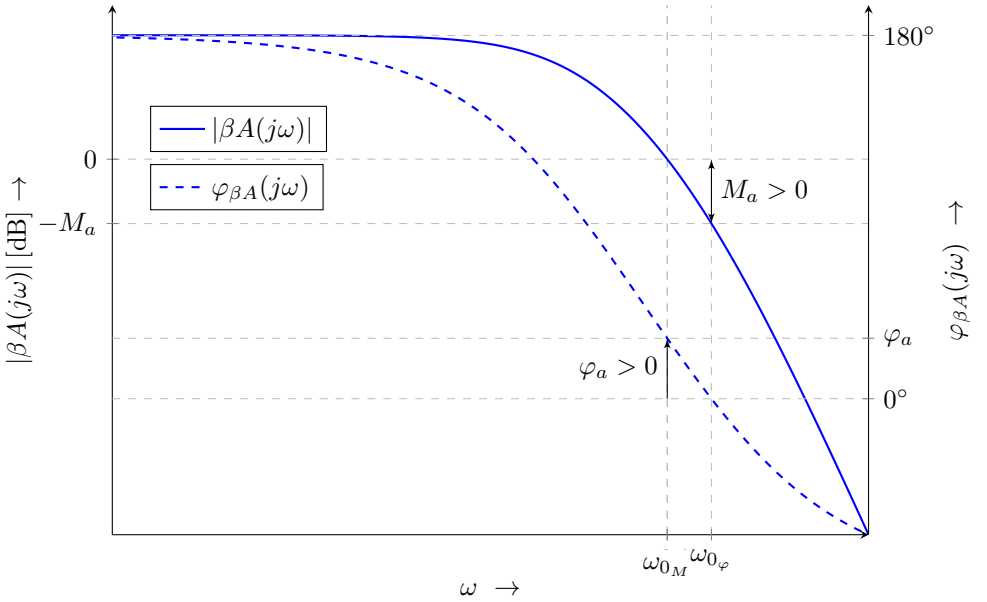
Obrázek 10.23: Příklad kmitočtové charakteristiky přenosu rozpojené ZV smyčky v komplexní rovině.

Protne-li modulová charakteristika tohoto přenosu kmitočtovou osu při úhlovém kmitočtu ω_{0_M}, tj. $|\beta A(\omega_{0_M})| = 1$, pak jeho fázová charakteristika nesmí dosáhnout pro tento kmitočet a stabilní ZV systém bodu $\varphi_{\beta A}(\omega_{0_M}) \leq 0°$.

Doporučení: U stabilního systému by fáze otevřené ZV smyčky pro $\omega = \omega_{0_M}$ měla být tzv. fázová jistota $\varphi_a = \varphi_{\beta A}(\omega_{0_M}) > 30\,°$, přičemž úhlový kmitočet ω_{0_M} je definován relací $|\beta A(j\omega_{0_M})| = 1$, nebo by pro tzv. doplňkový zisk M_a mělo platit $M_a = 20\log(\mathrm{GM}) = -20\log\big(\beta A(j\omega_{0_\varphi})\big) > 10\,\mathrm{dB}$, přičemž $\varphi_{\beta A}(j\omega_{0_\varphi}) = 0$, viz. obrázek 10.24 a 10.25.



Obrázek 10.24: Detail charakteristik z obrázku 10.23 pro při různé ZV přenosy β.



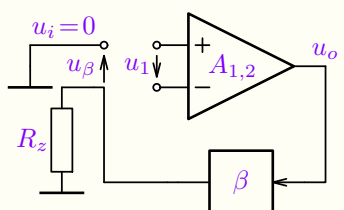
Obrázek 10.25: Modulová a fázová charakteristika otevřené ZV smyčky stabilního systému ($\varphi_a > 0°$, $M_a > 0\,\mathrm{dB}$).

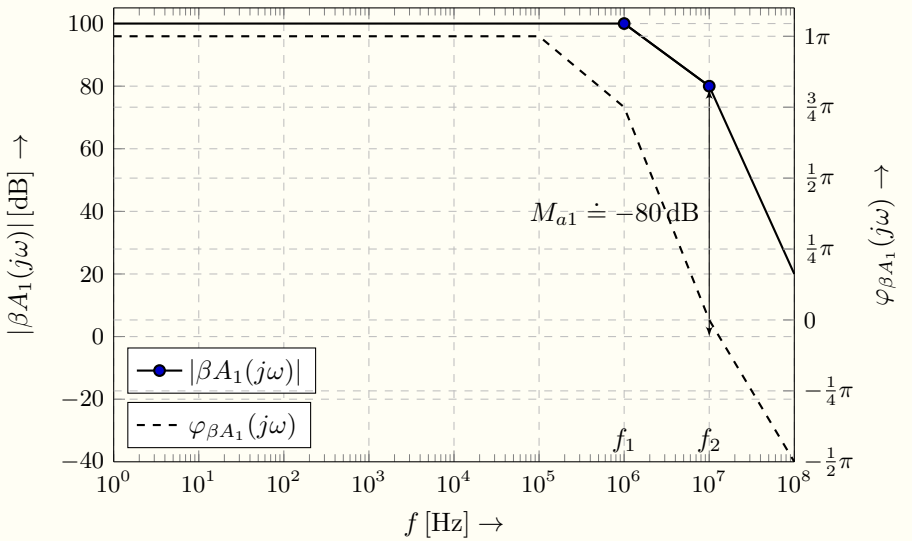
Příklad 10.5 *Stabilita ZZV soustavy*

Zadání:. Zesilovač s kmitočtově závislým zesílením $A_1(j\omega) = \frac{-A_0}{(1+j\omega/\omega_1)(1+j\omega/\omega_2)^2}$, kde $A_0 = 100\,\mathrm{dB}$, $\omega_1 = 2\pi 10^6$ a $\omega_2 = 2\pi 10^7\,[\mathrm{rad/s}]$, má zavedenou ZZV dle obrázku 10.17 s přenosem ZV členu $\beta = 1$.

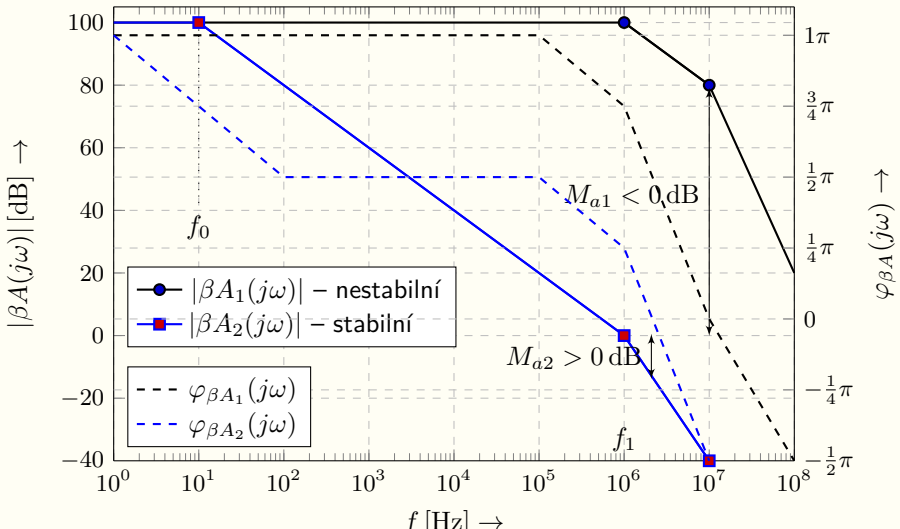
1. Zjistěte zda je soustava stabilní.
2. Zjistěte zda je soustava stabilní, pokud přenos zesilovače (A_2) bude vykazovat další pól na kmitočtu $\omega_0 = 2\pi 10\,[\mathrm{rad/s}]$.
3. Ověřte stabilitu/nestabilitu ZV systémů $H_1(s)$ a $H_2(s)$ uvedených v sekci 10.8.3 pomocí analýzy rozpojené ZV smyčky.

Řešení: Ve všech případech budeme stabilit zjišťovat podle kmitočtové charakteristiky rozpojené ZV smyčky $\beta A(j\omega)$, kterou určíme jako v předešlých případech z následujícího zapojení. Vzhledem k tomu, že pro první dva případy je $\beta = 1$ je $\beta A(j\omega) = A(j\omega)$ a stačí vyšetřovat pouze A_1, resp. A_2, jejichž kmitočtové charakteristiky jsou na obrázcích 10.26 a 10.27. Komentář řešení je uveden zde a experimentální ověření motivační ukázky zde.





Obrázek 10.26: Bodeho aproximace modulové a fázové charakteristiky otevřené ZV smyčky systému se zesilovačem A_1.



Obrázek 10.27: Aproximace kmitočtových charakteristik otevřené ZV smyčky jak ZV systému se zesilovačem A_1, tak systému s **kmitočtově kompenzovaným** zesilovačem A_2 pomocí **dominantního pólu** f_0.

Diskuse: Z obrázku 10.26 je zřejmé, že ZV systém se zesilovačem A_1 bude po zapojení zpětné vazby nestabilní, tj. kmitat na $f_{0_\varphi} \approx 10\,\mathrm{MHz}$, kdy $\varphi_{\beta A_1}(j f_{0_\varphi}) = 0$, tj. kdy se ZZV změní na kladnou ZV. Právě to, že fáze rozpojené ZV smyčky vychází (pro malé kmitočty) z $\varphi_{\beta A} = 180°$ je důkaz ZZV[a]. Pro stabilní soustavu se zesilovačem A_1 by bylo nutné aby $\beta < 1/10^4$, aby $|\beta A_1(j f_{0_\varphi})| < 0\,\mathrm{dB}$, což by vedlo na celkové zesílení ZV soustavy $A' > 10^5/11 \approx 10^4$. Pokud však přidáme zesilovači další pól (A_2), bude soustava stabilní i pro $\beta = 1$, tj. i pro celkové zesílení ZV soustavy $A' \doteq 1$, jak je zřejmé z obrázku 10.27. Takto jsou „kmitočtově kompenzovány" operační zesilovače, aby při zavedení ZZV byly stabilní i pro $\beta = 1$.

[a] Pozor některé publikace, zejména publikace zbývající se řízením, uvažují rozpojenou smyčku ZZV bez znaménka – neberou v úvahu např. odečítání na vstupu, i když je míněna **záporná** ZV. Pak fáze rozpojené ZV smyčky vychází z $0°$ a kritický bod je naopak $180°$, tj. -1 v komplexní rovině místo bodu 1, jak je uvedeno na obrázku 10.23, resp. 10.24.

Pomocí této metody lze stanovit stabilitu ZV systému z kmitočtové charakteristiky jeho otevřené ZV smyčky, tedy stabilního systému před jejím spojením. A to např. i měřením bez toho, aby bylo nutné ZV zapojovat a v případě nestability podstupovat riziko případné poruchy systému vlivem nekontrolovatelného nárůstu amplitudy výstupní veličiny (např. mechanické výchylky). To jiná kritéria neumožňují. Viz také analýzu zde, dodatek B a příklad 19.4.

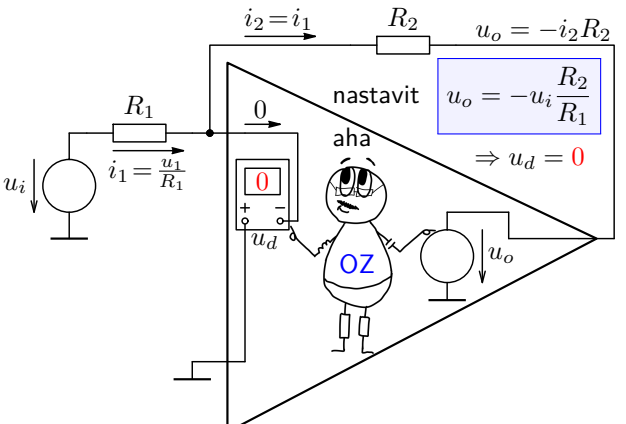
Závěr: Zpětná vazba umožňuje realizaci přesných regulátorů a dalších nejenom elektronických systémů. ZV zlepšuje mnohé vlastnosti zesilovačů, pokud je značná část jejich zesílení uzavřena ve ZV – je velký vratný rozdíl. Toho se hojně využívá u operačních zesilovačů se ZZV, kde je $A \to \infty$ a pak $A' \doteq 1/\beta$. Pokud je však soustava dynamická (téměř vždy je), musíme dávat pozor na stabilitu!

Poznámky X

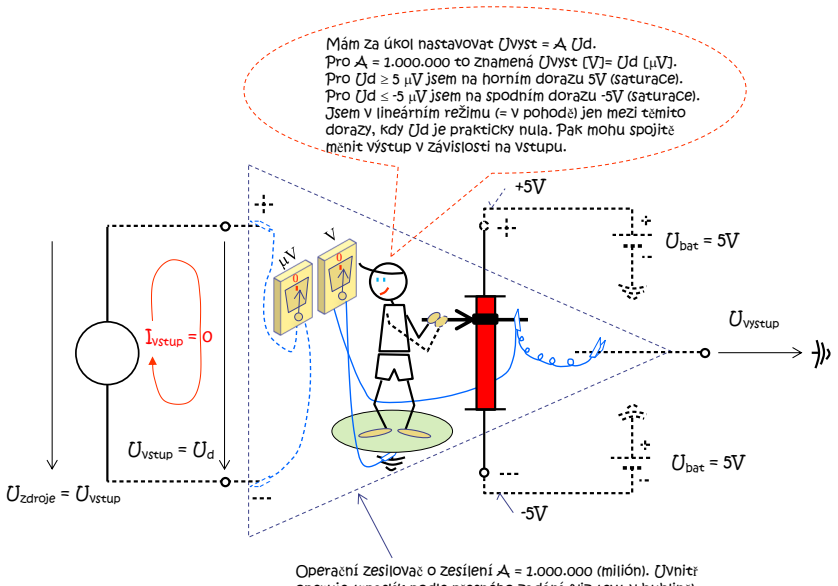
Kapitola 11

Ideální operační zesilovač a operační sítě

Tato kapitola představuje operační zesilovač (OZ) prvek analogových elektronických obvodů. Definuje chování ideálního operačního zesilovače a uvádí jeho základní aplikace. Uživatel se seznámí s různými typy zapojení od elementárních zesilovačů (invertující/neinvertující) přes sumátor, převodníky proud/napětí a napětí proud, rozdílový zesilovač až po operační usměrňovač a ideální komparátory. Bude také ukázán postup analýzy takových zapojení, který vychází z pochopení základního principu OZ pracujícího se zápornou zpětnou vazbou.

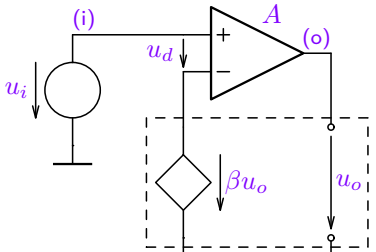


11.1. Operační zesilovač – motivace



Obrázek převzat z https://user.unob.cz/biolek/vyukaVUT/skripta/Sbirka_OZ3.pdf. Viz také komentář.

Použití struktury se zápornou zpětnou vazbou (viz sekci 10.2) a zesilovače s vysokým zesílením je základní principem stabilizátorů (regulátorů), zesilovačů, apod. a vede na realizaci struktur s operačními zesilovači.



$$u_o = u_d A = (u_i - \beta u_o)A \;\Rightarrow\; u_o = \frac{u_i A}{1+\beta A}$$

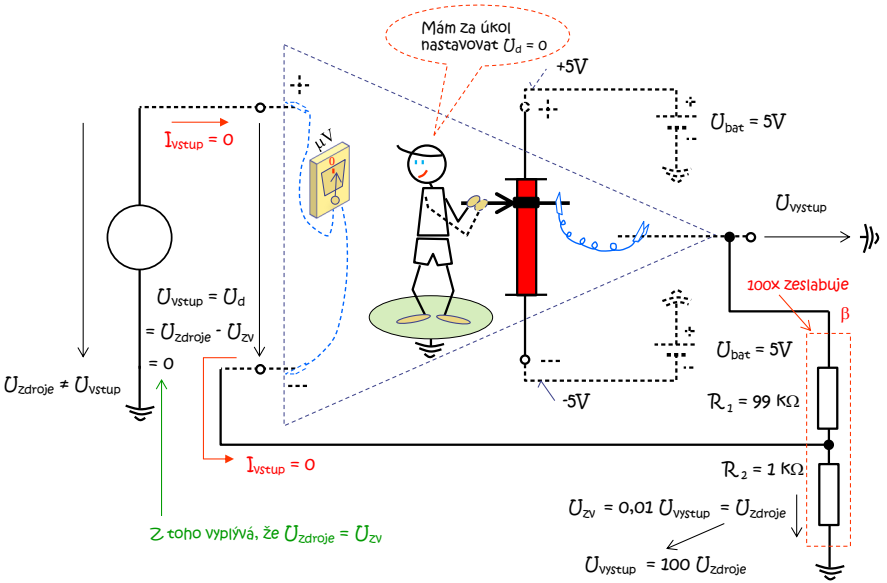
$$A' = \frac{u_o}{u_i} = \frac{A}{1+\beta A} \qquad \textbf{Blackův vztah}$$

$$\lim_{A\to\infty} A' = \frac{1}{\beta}$$

Pro extrémně vysoké hodnoty zesílení vlastního zesilovače $A \to \infty$ je zesílení ZV soustavy A' nezávislé na velikosti A a je dáno pouze ZV přenosem $A' = 1/\beta$. Vstupní napětí vlastního zesilovače je pak $u_d = 0$.

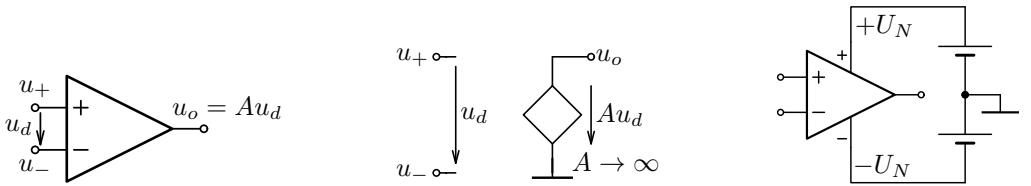
Pro konečné zesílení vlastního zesilovače A je závislost zesílení ZV soustavy A' na A velmi malá, pokud A dosahuje velkých hodnot. Např. pro $A = 100\,000$ a $\beta = 1/10$ je zesílení ZV soustavy $A' \doteq 9{,}999 \doteq 1/\beta$. Pro vstupní napětí $u_i = 1\,\mathrm{V}$ a vstupní napětí zesilovače vlastního zesilovače $u_d \doteq 0{,}1\,\mathrm{mV}$.

Použití ZV struktury s ideálním zesilovačem a napěťovou ZV

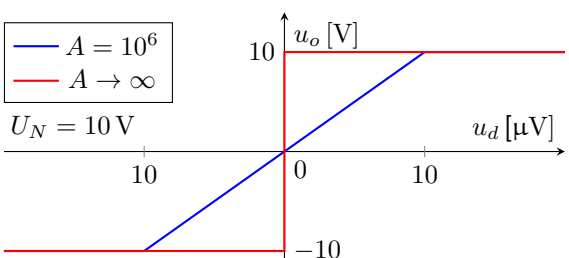


Obrázek převzat z https://user.unob.cz/biolek/vyukaVUT/skripta/Sbirka_OZ3.pdf

11.2. Ideální operační zesilovač (OZ)

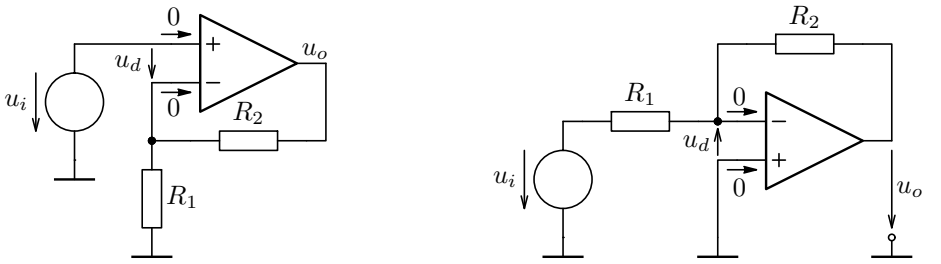


Obrázek 11.1: Schématická značka OZ (a), model ideálního OZ (b) a připojení napájecího zdroje (c).



Obrázek 11.2: Převodní charakteristika OZ s konečným a nekonečným zesílením (ideální OZ) a s omezením výstupního napětí díky konečnému napájecímu napětí.
Pro konečné napájecí napětí (reálný případ) je nutné, aby napětí na vstupních svorkách bylo maximálně v rozsahu u_+ i $u_- \in (-U_N, +U_N)$.

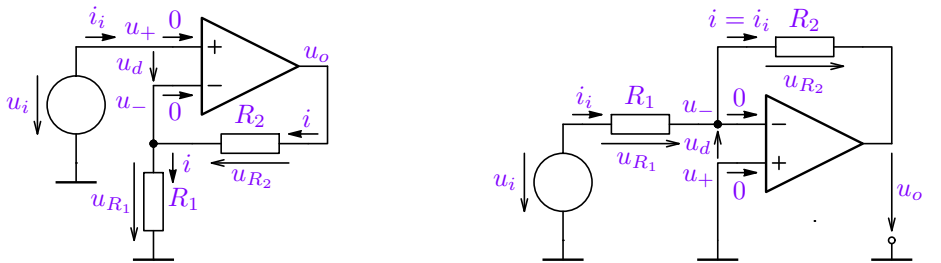
11.3. Neinvertující a invertující zesilovač s ideálním OZ



Obrázek 11.3: Zapojení neinvertujícího (a) a invertujícího (b) zesilovače.

Pro analýzu zapojení v případě ideálního OZ vyjdeme ze dvou předpokladů: 1. vstupní proudy OZ jsou nulové a 2. jeho zesílení $A \to \infty \Rightarrow u_d \to 0$. První podmínka musí být zajištěna implementací OZ na čipu (např. MOSFET), druhá podmínka $A \to \infty$ je jednak závislá na vlastnostech OZ, jednak musí být reálný zesilovač provozován v lineárním režimu, tj. výstupní napětí musí být menší než napájecí napětí. V opačném případě mluvíme o tzv. saturaci a zesílení $A \to 0$, viz převodní charakteristiku 11.2). Aby toto platilo je nutné, aby byla zavedena stabilní záporná zpětná vazba (ZZV), tj. vazba (vodivé spojení, v našem případě R_2) z výstupu na invertující vstup „−“. Pokud by existovala zároveň i kladná ZV (z výstupu na neinvertující vstup „+“) je nutné aby přenos ZZV byl větší, viz 10.8.4.

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL



(a) (b)

Obrázek 11.4: Zapojení neinvertujícího (a) a invertujícího (b) zesilovače s označením obvodových veličin.

S využitím výše uvedeného pak lze pro obě jednotlivá zapojení odvodit:

$$u_{R_1} = u_i - u_d = u_i \;\Rightarrow\; i = \frac{u_{R_1}}{R_1} = \frac{u_i}{R_1}$$

$$u_o = u_{R_1} + u_{R_2} = iR_1 + iR_2 = u_i\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{A_u = \frac{u_o}{u_i} = 1 + \frac{R_2}{R_1}} \qquad (11.1)$$

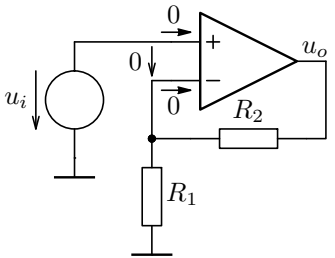
$$i_i \to 0 \;\Rightarrow R_{in} = \frac{u_i}{i_i} \to \infty$$

$$u_- = -u_d = 0,\; u_{R_1} = u_i - u_- = u_i \;\Rightarrow i_i = \frac{u_i}{R_1}$$

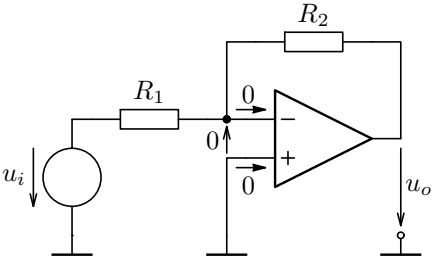
$$u_{R_2} = i_i R_2 = -u_o$$

$$\Rightarrow \boxed{A_u = \frac{u_o}{u_i} = -\frac{R_2}{R_1}} \qquad (11.2)$$

$$R_{in} = \frac{u_i}{i_i} = R_1$$



$$A_u = 1 + \frac{R_2}{R_1}, \quad R_{in} = \to \infty$$



$$A_u = -\frac{R_2}{R_1}, \quad R_{in} = R_1$$

Ověření výsledných vztahů lze ověřit symbolickou i semisymbolickou analýzou s ideálním operačním zesilovačem v simulátoru GEEC jak pro neinvertující zapojení, tak pro zapojení invertující. Viz také dodatek C, videoukázku analýzy a ověření experimentem.

Použití zesilovačů: Hlavní výhoda neinvertujícího zapojení je jeho velký vstupní odpor, který je v ideálním případě nekonečný. Velikost vstupního odporu invertujícího zapojení je omezena hodnotou rezistoru R_1, která nemůže být pro velké A_u vysoká (více viz. přednáška). Zapojení obrací směr/znaménko vstupního napětí, což je v řadě aplikací výhodné a dále je velmi dobře použitelné pro mnoho aplikací, které jsou uvedeny níže (sumátor apod.).[1]

[1] Další vlastnosti pak budou uvedeny v přednášce o reálných vlastnostech OZ.

11.4. Analýza obvodů s ideálním OZ

Pro analýzu obvodových struktur s ideálními OZ lze využít následujících pravidel. Nejprve je třeba se přesvědčit, zda je v obvodu zavedena záporná zpětná vazba (ZZV), tj. existuje signálová cesta z výstupu na invertující (–) vstup s nenulovým přenosem[a]. Pokud je tato podmínka splněna lze postupovat podle níže uvedených kroků:

Analýza obvodů s ideálním OZ

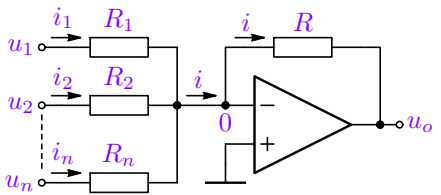
1. Označíme nulový rozdíl napětí na vstupech OZ (oba vstupy mají stejné napětí – tzv. virtuální zkrat).
2. Proudy do vstupů zesilovače označme jako nulové.
3. Obvod lze řešit známými metodami analýzy obvodů: postupným zjednodušením, přímou aplikací Kirchhoffových zákonů, metodou superpozice, apod., přičemž předpokládáme, že výstupní proud OZ pochází z napájecího zdroje, případně řízeného zdroje modelu OZ dle obr. 11.1 (platí 1. Kirchhoffův zákon).

Pozor: Počítačová analýza obvodů **s ideálním OZ** ($A \to \infty$, např. symbolická a semisymbolická analýza v GEEC) nerozlišuje invertující a neninvertující vstup – vždy počítá s tím, že je v obvodu zavedena ZZV.

[a] V případě složitějších a kmitočtově závislých obvodů je nutno stabilitu ověřit např. pomocí Nyquistova kritéria stability, viz 10.8.4. V obvodech s reálnými parametry OZ je nutné navíc zahrnout do výpočtu i kmitočtové vlastnosti vlastního OZ. Při uvažování konečného napájecího napětí je nutné, aby všechna napětí (jak na vstupech, tak na výstupu OZ) byla menší než napájecí napětí.

11.5. Sumátor signálů s ideálním OZ

Pro součet analogových signálů se používá následující zapojení. Opět předpokládejme, že vstupní proudy OZ jsou nulové a zesílení vlastního OZ $A \to \infty \;\Rightarrow\; u_d \to 0$ (ZZV). Mluvíme o tzv. virtuálním zkratu mezi invertujícím a neinvertujícím vstupem OZ. Pak je napětí invertujícího vstupu také nulové, jak je naznačeno v obrázku. Pokud jsou velikosti vstupních napětí vůči zemnímu potenciálu $u_1,\ u_2,\ \cdots\ u_n$, pak napětí na jednotlivých rezistorech je také $u_1,\ u_2,\ \cdots\ u_n$) a jejich proudy se dají snadno vyjádřit. Velikost výstupního napětí je pak dáno součtem těchto proudů a velikostí ZV rezistoru R:



Obrázek 11.5: Zapojení invertujícího sumátoru.

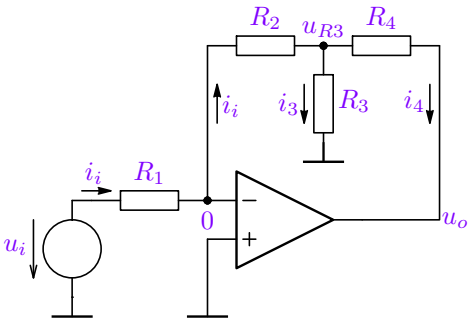
$$i = i_1 + i_2 + \cdots + i_n = \frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2} + \cdots + \frac{u_n}{R_n}$$

$$\boxed{u_o} = -u_R = -iR = \boxed{-R\sum_{i=1}^{n}\frac{u_i}{R_i}} \qquad (11.3)$$

Komentář: Jedná se o jednoduché zapojení pro váhovaný součet analogových napětíJednoduchost vychází ze skutečnosti, že jednotlivé vstupní proudy se neovlivňují – jsou závislé pouze na velikosti příslušného vstupního napětí a rezistoru. Je to dáno nulovým napětím na invertujícím vstupu, kam jsou druhé strany rezistorů zapojeny. Zapojení opět obrací směr/znaménko vstupních napětí.

11.6. Invertující zesilovač s vyšším vstupním odporem

Jak je uvedeno výše, je u invertujícího zapojení 11.3 nevýhodou jeho malý vstupní odpor, zejména pro vysoké hodnoty zesílení (ZV odpor je obvykle nutné volit $R_2 \leq 1\,\mathrm{M\Omega}$). Jednou z možností jeho zvýšení, pokud např. nepředřadíme neinvertující zapojení je níže uvedené zapojení. Pro velikost zesílení lze pak odvodit vztah 11.4.



$$A_u = \frac{u_o}{u_i} = -\frac{R_2}{R_1}\left(1 + \frac{R_4}{R_2} + \frac{R_4}{R_3}\right) \qquad (11.4)$$

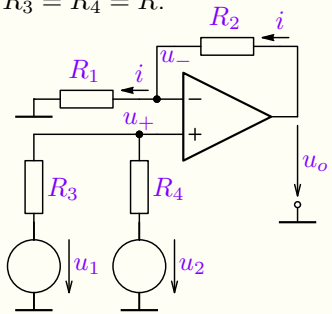
$$R_{in} = \frac{u_i}{i_i} = R_1$$

Obrázek 11.6: Alternativní zapojení invertujícího zesilovače pro zvýšení vstupního odporu při vyšších zesílení.

Postup odvození nechám na čtenáři – je obdobný jako v předchozích případech a lze ho ověřit v simulátoru po kliknutí na obrázek (symbolické výsledky jsou uspořádány ve shodě s postupem odvození).

Příklad 11.1 *Neinvertující sumátor*

Zadání: Určete výstupní napětí u_o zapojení s ideální OZ dle obrázku, pokud jsou hodnoty rezistorů zadány jednak obecně, jednak při $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$.

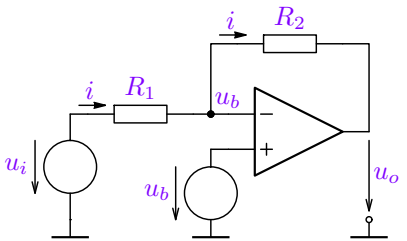


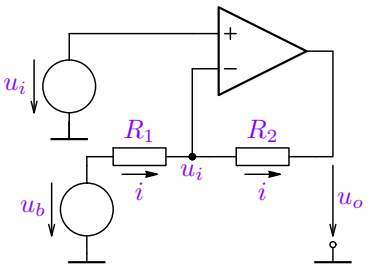
Řešení: Nejprve vyřešíme napětí u^+ např. pomocí metody superpozice a dále lze použít vztah (11.1):

$$u^+ = u_1 \frac{R_4}{R_3 + R_4} + u_2 \frac{R_3}{R_3 + R_4}, \quad u_o = u^+ \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right),$$

$$u_o = \left(\frac{u_1}{2} + \frac{u_2}{2}\right) 2 = u_1 + u_2 \quad \text{pro} \quad R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R.$$

11.7. Superpozice dvou signálů pomocí ideálního OZ





Obrázek 11.7: Zapojení superponující 2 signály. Obvykle se používá pro DC posuv výstupního napětí, resp. pro odstranění DC složky vstupního napětí u_i, kds u_b je stejnosměrné napětí. Pak lze rozlišit neinvertující a invertující zapojení.

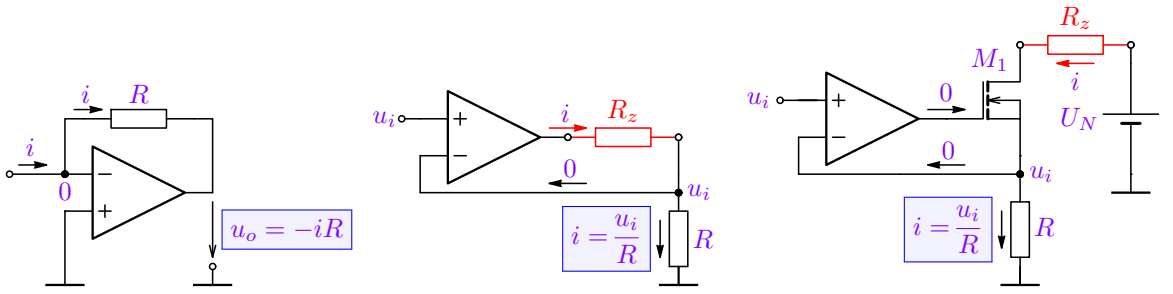
$$u_o = -iR_2 + u_b = -\frac{u_i - u_b}{R_1}R_2 + u_b$$

$$\boxed{u_o = -u_i\frac{R_2}{R_1} + u_b\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)}$$

$$u_o = -iR_2 + u_i = -\frac{u_b - u_i}{R_1}R_2 + u_i$$

$$\boxed{u_o = u_i\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) - u_b\frac{R_2}{R_1}}$$

11.8. Převodníky proud-napětí a napětí-proud



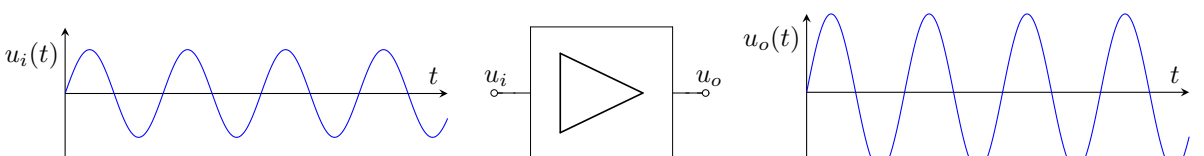
Obrázek 11.8: Zapojení převodníků proud-napětí (a), napětí-proud v základním variantě (b) a variantě pro větší rozsah napětí a proudů (c).

Zapojení (a) je invertujícím zapojením zesilovače, kde místo vstupního napětí a rezistoru, který převádí vstupní napětí na proud, je vstupem snímán proud „virtuálním zkratem“ do společného uzlu (vstup má potenciál $0\,\mathrm{V}$). Zapojení (b) zajišťuje proud „plovoucí“ zátěží R_z, který je dán velikostí vstupního napětí a odporem rezistoru R, nikoli odporem zátěže R_z. Pro zvýšení limitu proudu a napětí na zátěži je možné použít zapojení (c), kde však proud i musí mít daný směr. Diskuse (velikost limitů, možnost uzemnění zátěže, ...), viz přednáška.

11.9. Rozdílový (diferenční) zesilovač

- Proč se používá k přenosu rozdíl signálů a pro zpracování rozdílový zesilovač?
- Jaké má nevýhody „klasické“ uspořádání?
- A jak je řeší rozdílový zesilovač?

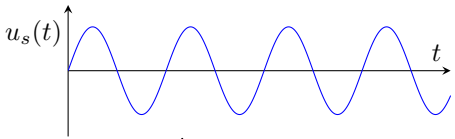
11.9.1. Vlastnosti klasického zesilovače



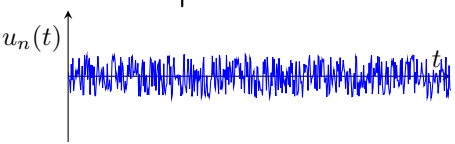
Klasický (nesymetrický) zesilovač zpracovává signál jako napětí u_i vůči společné svorce[2]. V reálných podmínkách však může být užitečný vstupní signál u_s rušen (např. indukcí do kabelu) a vůči potenciálu společné svorky se v signálové cestě objeví také rušivé napětí u_n. Pak se signál bude zesilovat spolu s tímto rušením $u_o = A_u u_i = A_u(u_s + u_n)$.

[2] V uvedeném schématu není znázorněna.

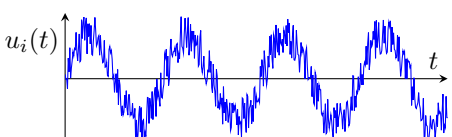
Nevýhody klasického uspořádání (zesilování signálu vztaženého k referenčnímu potenciálu)

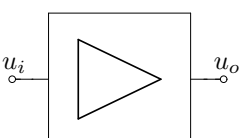


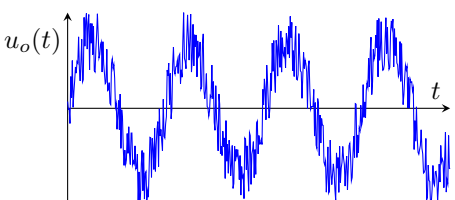
užitečný signál na vstupním přívodu



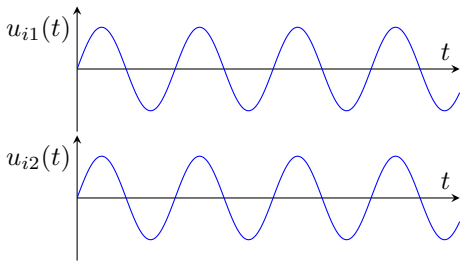
rušení indukované na vstupním přívodu vůči „zemi“

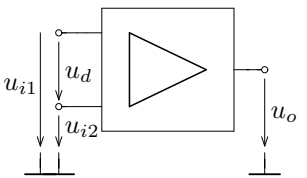


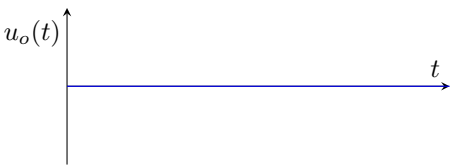




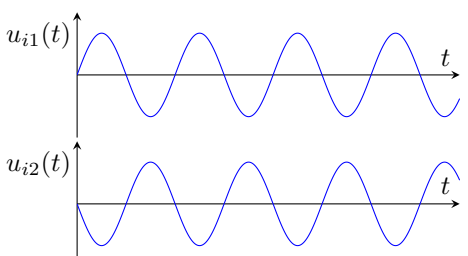
11.9.2. Ideální rozdílový zesilovač

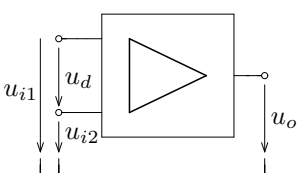


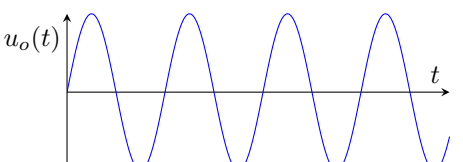




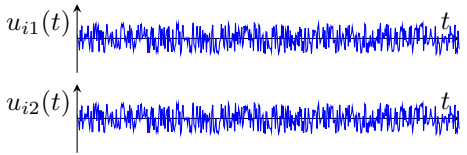
$$u_o = A_d(u_{i1} - u_{i2}) = A_d u_d$$

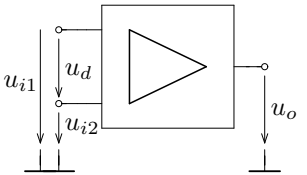


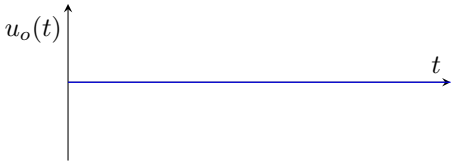




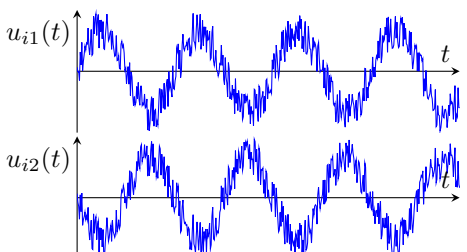
Ideální rozdílový zesilovač zesiluje pouze rozdíl vstupních signálů, tj. $u_{i1} - u_{i2}$. Pokud jsou vstupní signály stejné, výstupní signál je nulový, pokud jsou vzájemně inverzní, výstup je úměrný dvojnásobku vstupního signálu.

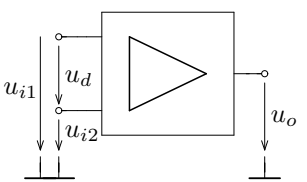


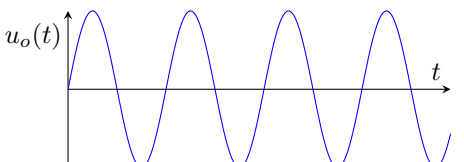




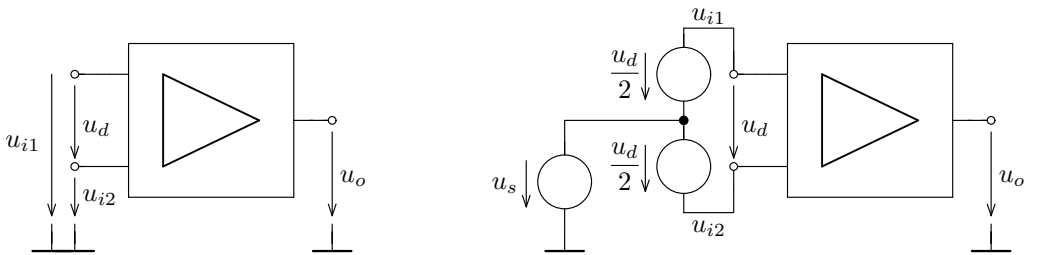
Pokud budou oba vstupní signály obsahovat identickou část (rušení), nebude tato složka obsažena ve výstupním signálu. Aby se rušení indukovalo na oba vstupy shodně (jako tzv. souhlasné buzení $u_{i1} = u_{i2} = u_s$), je v praxi nutné symetrizovat vstupní vedení včetně vstupních impedancí. Užitečný signál se pak přivádí na vstupy symetrizovaný, tj. $u_{i2} = -u_{i1} = u_d/2$.







11.9.3. Reálný rozdílový zesilovač

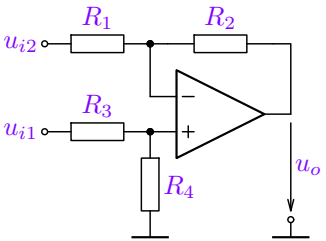


Obrázek 11.9: Označení vstupních a výstupního napětí rozdílového zesilovače (a) a schéma pro určení jednotlivých zesílení (b).

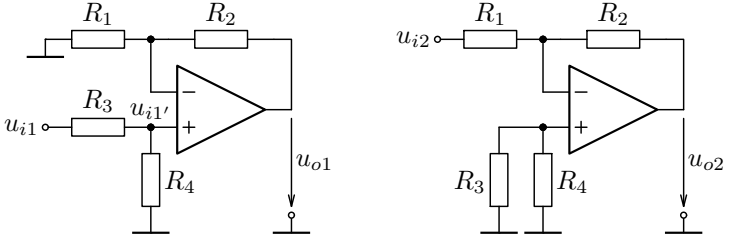
$$u_o = A_d u_d + A_s u_s, \qquad \text{kde} \quad u_d = u_{i1} - u_{i2}, \quad u_s = \frac{u_{i1} + u_{i2}}{2}, \quad \text{CMRR} = \left|\frac{A_d}{A_s}\right| \tag{11.5}$$

Přičemž $A_d = \frac{u_o}{u_d}|_{u_s=0}$ je rozdílové (diferenční) zesílení a $A_s = \frac{u_o}{u_s}|_{u_d=0}$ je zesílení souhlasné. Aby se souhlasná složka vstupního napětí (rušení) neuplatnila, je nutné u zesilovače maximalizovat tzv. činitel potlačení souhlasné složky (Common Mode Rejection Ratio).

11.9.4. Rozdílový zesilovač realizovaný pomocí operačního zesilovače



Obrázek 11.10: Rozdílový zesilovač s OZ.



Obrázek 11.11: Obvody pro výpočet napěťového zisku metodou superpozice.

Výpočet zisku, resp. výstupního napětí zesilovače na obrázku 11.10 lze provést s výhodou pomocí metody superpozice dle obrázku 11.11. Pro příspěvky jednotlivých budicích zdrojů a celkové výstupní napětí pak platí:

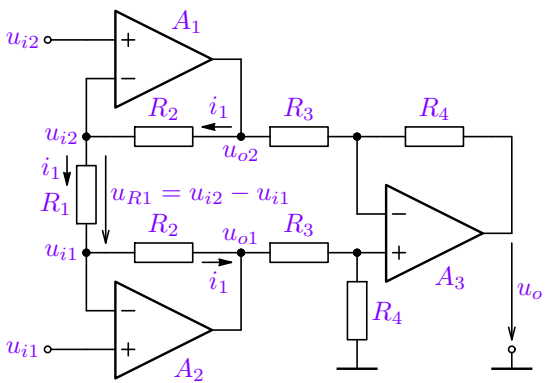
$$u_{o1} = u_{i1'}\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right) = u_{i1}\frac{R_4}{R_3+R_4}\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right), \qquad u_{o2} = -u_{i2}\frac{R_2}{R_1},$$

$$\boxed{u_o} = u_{o1}+u_{o2} = \boxed{\frac{R_2}{R_1}(u_{i1}-u_{i2})} \quad \text{pro } \frac{R_4}{R_3}=\frac{R_2}{R_1}, \text{ kdy se zesiluje pouze požadovaný rozdíl signálů.} \qquad (11.6)$$

$$\boxed{R_{i_d} = R_1+R_3} \quad \text{je pak vstupní odpor pro rozdílový signál.} \qquad (11.7)$$

11.9.5. Přístrojový zesilovač

Nevýhodou předchozího zapojení je zejména malý vstupní odpor a dále skutečnost, že výstupní napětí mohou výrazně ovlivnit vnitřní odpory vstupních zdrojů u_i. Z tohoto důvodu se implementuje na čip níže uvedené zapojení 11.12. Odstraňuje jednak uvedenou nevýhodu a dále zlepšuje CMRR, jelikož první stupeň složený ze zesilovačů A_1 a A_2 přenáší na svůj výstup u_{o2}, u_{o1} souhlasnou složku se zesílením 1, kdežto rozdílovou složku násobí zesílením $1+2R_2/R_1$. Proto se celkové zesílení nastavuje v tomto prvním stupni a zesílení 2. stupně se volí 1, tj. $R_3 = R_4$.



Obrázek 11.12: Zapojení přístrojového zesilovače.

$$i_1 = \frac{u_{i2} - u_{i1}}{R_1},$$

$$u_{o2} = u_{i2} + R_2 i_1 = u_{i2} + R_2 \frac{u_{i2} - u_{i1}}{R_1},$$

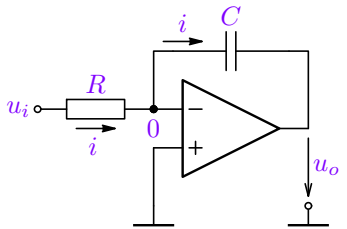
$$u_{o1} = u_{i1} - R_2 i_1 = u_{i1} - R_2 \frac{u_{i2} - u_{i1}}{R_1},$$

$$u_{o1} - u_{o2} = (u_{i1} - u_{i2}) - 2\frac{R_2}{R_1}(u_{i2} - u_{i1}) =$$

$$= (u_{i1} - u_{i2})\left(1 + \frac{2R_2}{R_1}\right),$$

$$\boxed{u_o = \frac{R_4}{R_3}\left(1 + \frac{2R_2}{R_1}\right)(u_{i1} - u_{i2})} \qquad (11.8)$$

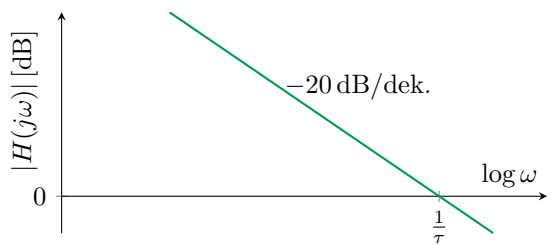
11.10. Integrátor s OZ

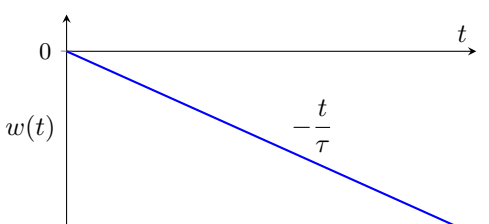


$$i = \frac{u_i}{R}, \quad u_o(t) = -u_c(0) - \frac{1}{RC}\int_0^t u_i(x)\mathrm{d}x, \quad RC = \tau$$

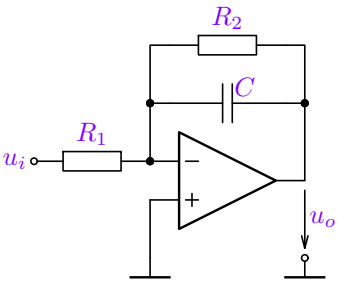
$$H(s) = \left.\frac{U_o(s)}{U_i(s)}\right|_{u_c(0)=0} = -\frac{1}{s\tau} = -\frac{Z_C(s)}{R} \qquad (11.9)$$

Modulová charakteristika $|H(j\omega)| = \left|\frac{j}{\omega\tau}\right|$ je uvedena níže, fázová charakteristika je evidentně konstantní $\angle H(j\omega) = \frac{\pi}{2}$.





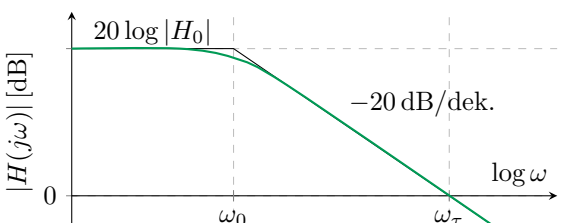
Obrázek 11.13: Zapojení ideálního invertujícího integrátoru, jeho přenos, modulová a přechodová charakteristika.

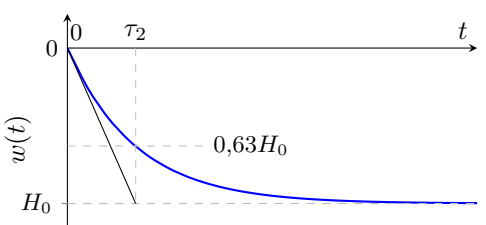


$$\boxed{H(s)} = -\frac{Z_2}{R_1} = -\frac{\frac{R_2}{1+sCR_2}}{R_1} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{1+sCR_2} \boxed{= \frac{H_0}{1+s\tau_2}} \qquad (11.10)$$

$$H_0 = -\frac{R_2}{R_1}, \qquad \tau_2 = R_2C, \qquad \omega_0 = \frac{1}{\tau_2},$$

$$\omega_\tau = \omega_0\frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{R_1C} = \frac{1}{\tau_1}, \quad \text{přičemž} \quad |H(j\omega_\tau)| \doteq 1 \quad \text{pro} \quad \frac{R_2}{R_1} \gg 1.$$

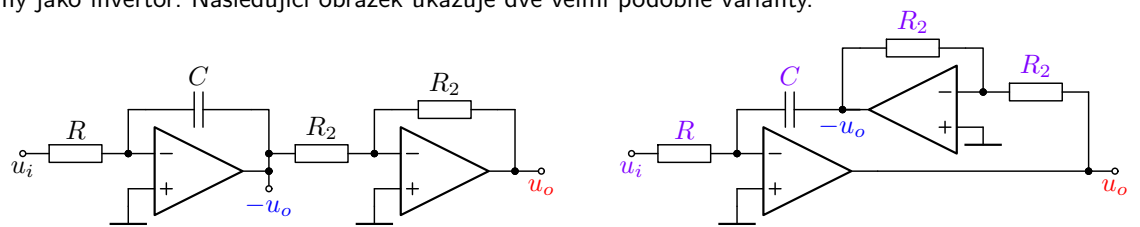




Obrázek 11.14: Zapojení ztrátového invertujícího integrátoru, jeho přenos, modulová a přechodová charakteristika.

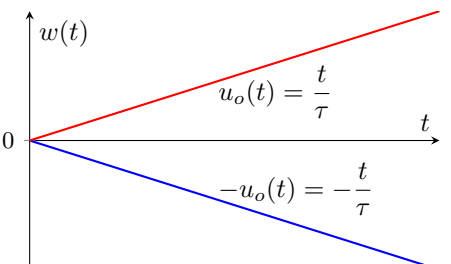
Zapojení AC_OZ7 v tabulce U.5.3 částečně funguje jako **neinvertující integrátor** pro $R_2 = 0$. Výstup však vždy obsahuje složku o velikosti Ku_1, kde $K > 1$, viz analýza. Měření na invertujícím integrátoru viz dodatek C.

Ideální neinvertující integrátor lze implementovat se dvěma OZ, přičemž jeden je zapojen jako invertující integrátor a druhý jako invertor. Následující obrázek ukazuje dvě velmi podobné varianty.



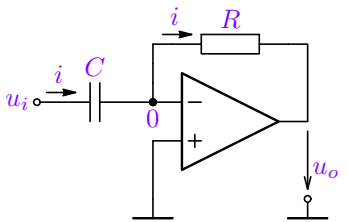
$$H(s) = \left.\frac{U_o(s)}{U_i(s)}\right|_{u_c(0)=0} = \frac{1}{s\tau}, \quad \tau = RC \qquad (11.11)$$

Modulová charakteristika $|H(j\omega)|$ je stejná jako na obrázku 11.13, fázová charakteristika je evidentně konstantní $\angle H(j\omega) = -\frac{\pi}{2}$. Přechodové charakteristiky obou výstupů, tj. neinvertujícího i invertujícího integrátoru jsou na obrázku vpravo.



Obrázek 11.15: Dvě varianty zapojení ideálního neinvertujícího integrátoru, jeho přenos a přechodová charakteristika.

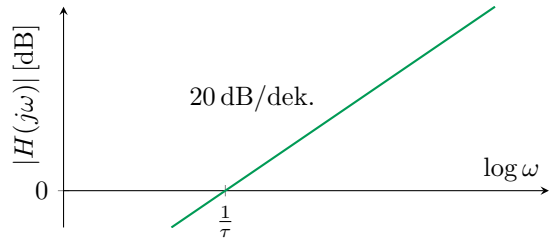
11.11. Derivátor s OZ

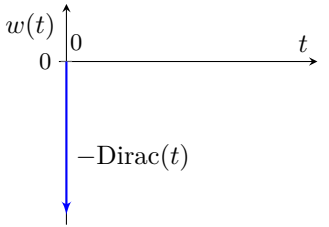


$$i(t) = C\frac{du_i(t)}{dt}$$

$$u_o(t) = -Ri(t) = -RC\frac{du_i(t)}{dt}$$

$$H(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = -sRC = -s\tau$$



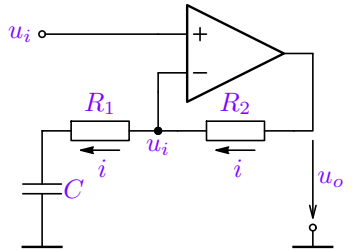


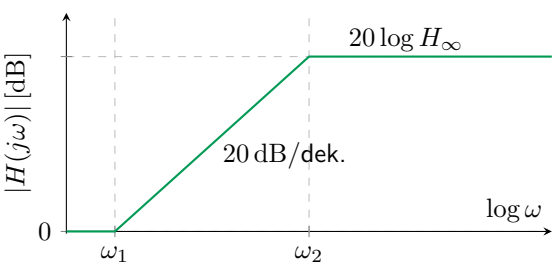
Obrázek 11.16: Zapojení ideálního invertujícího derivátoru, jeho přenos, modulová a přechodová charakteristika.

Integrátor je jedním ze základních stavebních bloků pro realizaci kmitočtově závislých obvodů (např. filtrů). Dále se používá v měřicích aplikacích (integrační A/D převodníky), jeho princip je využíván v regulátorech a mnoha dalších aplikací. Ideální integrátor je astatickým obvodem, jehož výstupní signál absolutně roste pro konstantní nenulový vstupní signál (pro $t \to \infty$ nade všechny meze). Jelikož pól přenosové funkce ideálního integrátoru leží na imaginární ose, neměla by existovat jeho kmitočtová charakteristika. Zde je však vykreslena s tím, že modulová charakteristika jakékoli realizace neroste nade všechny meze (nekonečné zesílení) pro nulový kmitočet, ale je omezena (byť velkou hodnotou zesílení). Pak je zřejmé, že pól leží v levé polorovině, ale ke zlomu modulové charakteristiky dochází při velmi nízkých kmitočtech. U ztrátového integrátoru přidáváme záměrně další pól. Pak je obvod stabilní, nicméně se na nízkých kmitočtech ($\omega < \omega_0$) nechová jako integrátor, ale zesilovač s velmi nízkým zlomovým kmitočtem.

Opakem integrátoru je derivátor, jehož idealizované zapojení je uvedeno i s příslušnými vlastnostmi. Na rozdíl od integrátoru se prakticky nepoužívá (minimálně). Důvodem jsou kmitočtové vlastnosti reálného OZ, které na rozdíl od integrátoru omezují použití na signály poměrně nízkých kmitočtů, kde se zapojení ještě chová jako derivátor. To je také příčinou nestabilit zapojení, kde jsou deriváty použity ve složitějších zpětnovazebních strukturách. Zde je zapojení derivátoru uvedeno pouze pro úplnost. Obdobně jako u ideálního integrátoru neexistuje ani v tomto případě kmitočtová charakteristika. Důvodem je vyšší stupeň čitatele než jmenovatele přenosové funkce. Nicméně opět vlivem zmíněných reálných kmitočtových vlastností OZ (přenosová funkce bude vykazovat i pól(y)), lze charakteristiku nakreslit. Viz také experiment.

11.12. Zesilovač s potlačením nízkých kmitočtů





Obrázek 11.17: Aproximace modulové charakteristiky zesilovače.

$$H(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = 1 + \frac{R_2}{R_1 + \frac{1}{sC}} = 1 + \frac{sCR_2}{1 + sCR_1} =$$

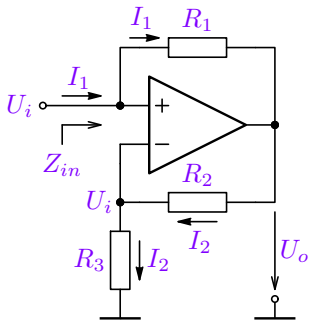
$$= \frac{1 + sC(R_1 + R_2)}{1 + sCR_1} = \frac{1 + s\tau_1}{1 + s\tau_2}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{\tau_1}, \quad \omega_2 = \frac{1}{\tau_2}, \quad H_\infty = \frac{\tau_1}{\tau_2} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

Zesilovač se obvykle používá pro (částečné) potlačení stejnosměrné složky vstupního signálu u_i, kdy je zároveň nutné zajistit velký vstupní odpor, tj. nelze použít oddělovací vstupní kapacitor (derivační RC článek). Z přenosu a modulové charakteristiky je zřejmé, že stejnosměrná složka vstupního signálu se přenáší na výstup s jednotkovým zesílením, kdežto střídavá složka vstupního signálu je od kmitočtu ω_2 přenášena se zesílením $H_\infty = 1 + \frac{R_2}{R_1}$.

11.13. Negativní impedanční konvertor

Jedná se o modifikaci neinvertujícího zapojení, kde impedance Z_1 a poměr impedancí Z_3/Z_2 určuje výstupní napětí v závislosti na U_i a tím vstupní proud, resp. vstupní impedanci. Pokud bude mít vstupní zdroj nenulovou vnitřní impedanci, je rezistorem R_1 zavedena kladná zpětná vazba (KZV) a je nutné dodržet podmínky stability (KZV nesmí převážit ZZV na jakémkoli kmitočtu)!



$$I_2 = \frac{U_i}{Z_3}, \quad U_o = (Z_2 + Z_3)I_2 = U_i\left(1 + \frac{Z_2}{Z_3}\right), \quad I_1 = \frac{U_i - U_o}{Z_1} =$$

$$= \frac{U_i\left(1 - 1 - \frac{Z_2}{Z_3}\right)}{Z_1} = -U_i\frac{Z_2}{Z_3Z_1} \quad \Rightarrow \quad Z_{in} = \frac{U_i}{I_1} = -\frac{Z_3Z_1}{Z_2}$$

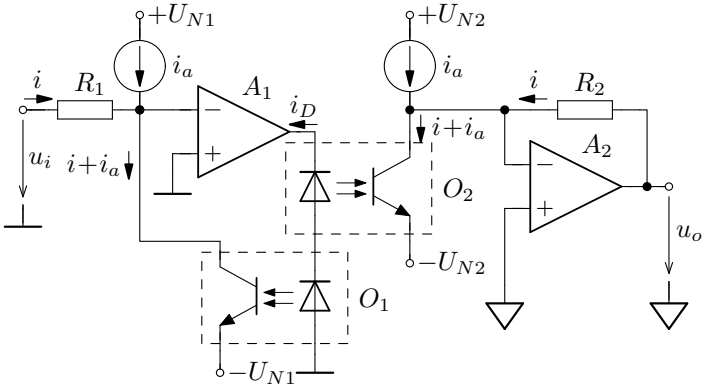
Příklady použití:

1. $Z_1 = R_1,\ Z_2 = R_2,\ Z_3 = R_3 \ \Rightarrow \ R_{in} < 0,$
2. $Z_2 = \frac{R_2}{1+sC_2R_2} \ \Rightarrow Z_{in} = -\frac{R_3R_1}{R_2} - sC_2R_3R_1 = -R_{eq} - sL_{eq}, \ldots$

Obrázek 11.18: Zapojení impedančního konvertoru a odvození jeho vstupní impedance.

Jedná o ukázku realizace základní „uzemněné“ impedance (mezi vstupní a společnou svorkou). Další vylepšená zapojení umožňující realizovat např. „plovoucí“ impedanci přesahují rozsah tohoto materiálu.

11.14. Izolační zesilovač



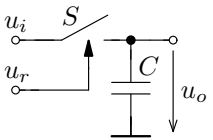
$$i = \frac{u_i}{R_1},$$
$$u_o = iR_2 = u_i \frac{R_2}{R_1}.$$

Poznámka: Funkci optočlenu si lze zjednodušeně představit jako galvanicky (optickou vazbou) oddělený zdroj proudu (fototranzistor) řízený proudem i_D (diody).

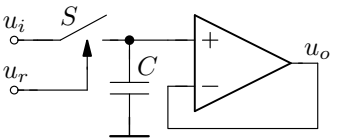
Obrázek 11.19: Základní zapojení izolačního zesilovače s optočleny.

Obvod se používá pro přenos analogového signálu mezi místy s rozdílným referenčním/zemním potenciálem. Princip je patrný ze zapojení. Při identických vlastnostech optočlenů je proud tekoucí tranzistory shodný, a tudíž je výstupní napětí lineární funkcí napětí vstupního. Pro přenos se však dnes stále více používá digitalizovaný signál, viz např. AMC1311, který se na výstupu převede zpět na analogový. Více, viz přednáška.

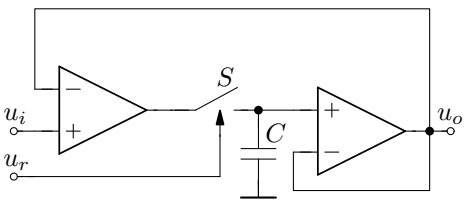
11.15. Vzorkovací (Sample & Hold) obvod



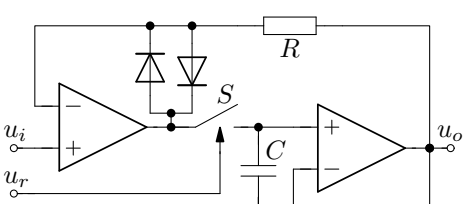
(a)



(b)



(c)



(d)

Vzorkovací obvod se používá před A/D převodníkem při digitalizaci časově proměnných signálů. Základem (a) je spínač S řízený hodinovým signálem u_r pro vzorkování signálu a paměťový kapacitor C pro „držení“ napětí během rozpojení spínače (během převodu). Nevýhodou je možné vybíjení kapacitoru, které řeší varianta (b) a dále pomalé nabíjení kapacitoru přes vnitřní odpor zdroje signálu u_i a odpor spínače. To řeší přidání dalšího OZ a zavedení ZV přes celý obvod (c). V případě rozepnutí spínače je však první OZ bez ZV a aby nepřešel do saturace jsou ve variantě (d) přidány antiparalelně řazené diody. Více viz přednáška.

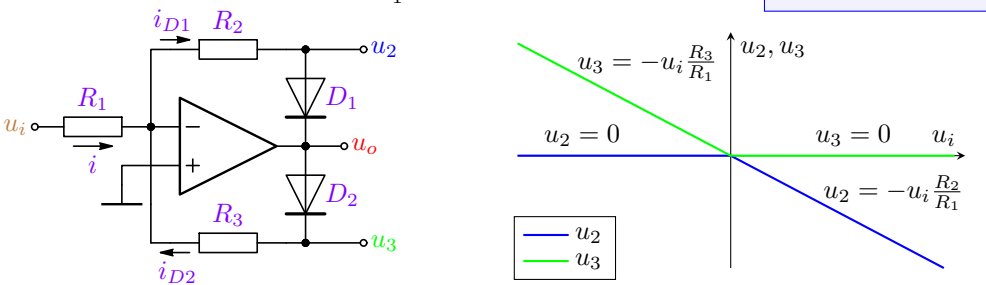
Obrázek 11.20: Principiální schéma S&H obvodu a jeho vylepšené varianty.

11.16. Invertující operační usměrňovač

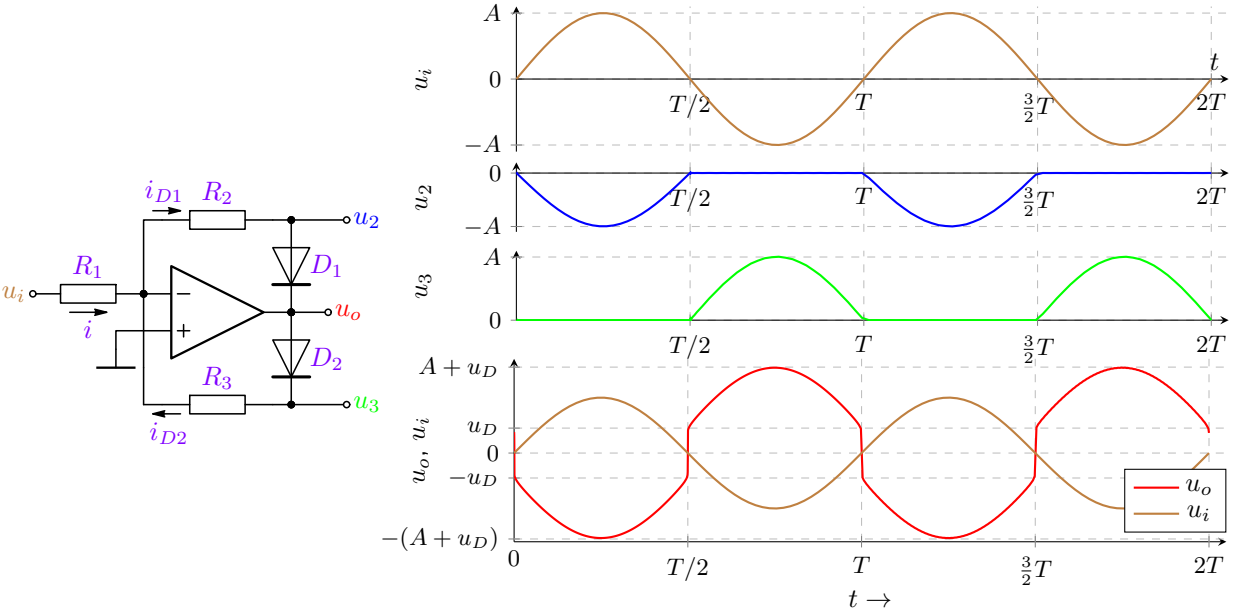
Tak jedná opět o nelineární obvod, nicméně jeho převodní charakteristika je po částech lineární. Diody si lze představit jako řízené spínače (velntily proudu), s téměř konstantním úbytek napětí u_D v propustném stavu. Z tohoto důvodu je jednoduchý usměrňovač založený pouze na diodě zcela nepoužitelný pro malá napětí (menší než zmíněný úbytek). Řešením může být níže uvedené zapojení, které lze popsat následovně:

1. Pro $u_i > 0$ $\Rightarrow$ $i > 0$, $i = i_{D1} = \dfrac{u_i}{R_1}$, $i_{D2} \to 0$ $\Rightarrow$ $u_{R3} \to 0$ platí: $u_2 = -i_{D1} R_2 = -u_i \dfrac{R_2}{R_1}$, $u_3 = 0$

2. Pro $u_i < 0$ $\Rightarrow$ $i < 0$, $i = -i_{D2} = \dfrac{u_i}{R_1}$, $i_{D1} \to 0$ $\Rightarrow$ $u_{R2} \to 0$, pak: $u_2 = 0$, $u_3 = i_{D2} R_3 = -u_i \dfrac{R_3}{R_1}$



Obrázek 11.21: Zapojení jednocestného invertujícího usměrňovače s OZ a jeho převodní charakteristika.

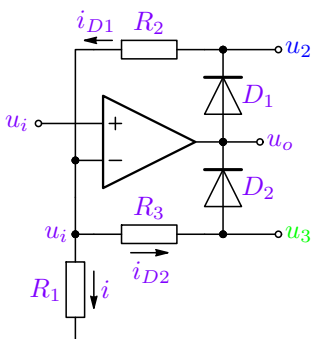


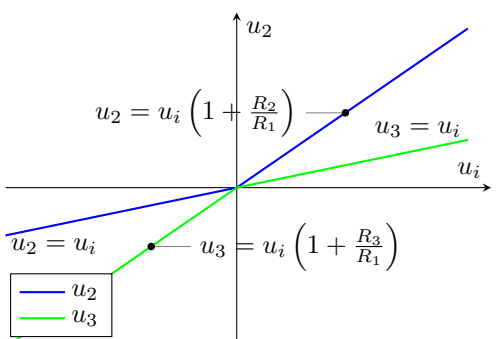
Obrázek 11.22: Časové průběhy jednotlivých napětí invertujícího usměrňovače s OZ pro $R_1 = R_2 = R_3$.

11.17. Neinvertující operační usměrňovač

Jedná se analogický obvod k předchozímu zapojení. Z níže uvedených vlastností je zřejmá nevýhoda zapojení, kdy se výstupní napětí $u_2, u_3 \neq 0$ mimo bod $u_i = 0$. Vzhledem k tomu je využití tohoto zapojení velmi omezené.

1. Pro $u_i > 0 \;\Rightarrow\; i > 0, \quad i = i_{D1} = \dfrac{u_i}{R_1}, \quad i_{D2} \to 0 \;\Rightarrow\; u_{R3} \to 0$ platí: $u_2 = u_i + i_{D1} R_2 = u_i \left(1 + \dfrac{R_2}{R_1}\right), \quad u_3 = u_i.$
2. Pro $u_i < 0 \;\Rightarrow\; i < 0, \quad i = -i_{D2} = \dfrac{u_i}{R_1}, \quad i_{D1} \to 0 \;\Rightarrow\; u_{R2} \to 0$, pak: $u_2 = u_i, \quad u_3 = u_i - i_{D2} R_3 = u_i \left(1 + \dfrac{R_3}{R_1}\right)$

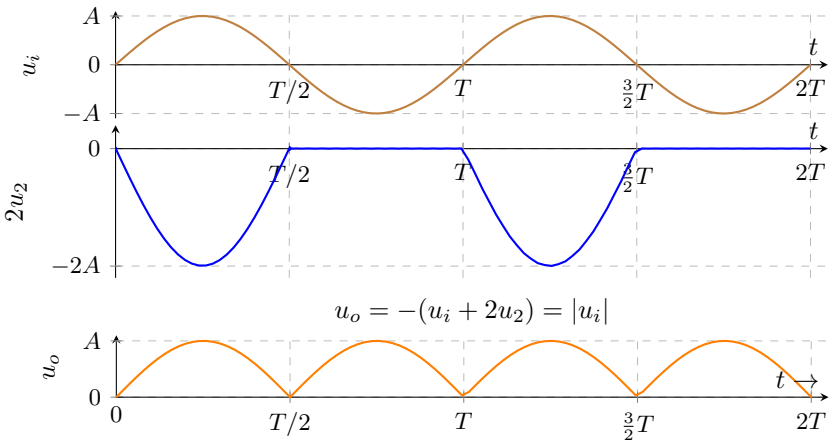




Obrázek 11.23: Zapojení jednocestného neinvertujícího usměrňovače s OZ a jeho převodní charakteristika.

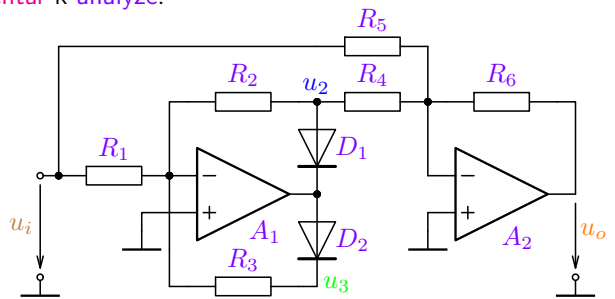
11.18. Zesilovač absolutní hodnoty

Invertující operační usměrňovač lze využít pro realizaci zesilovače absolutní hodnoty – dvoucestného operačního usměrňovače. Pokud přičteme ke vstupnímu signálu jednocestně usměrněný signál s dvojnásobnou amplitudou dostaneme záporně vzatou absolutní hodnotu vstupního signálu ($u_i + 2u_2 = -|u_o|$), viz obrázek 11.24.



Obrázek 11.24: Časové průběhy napětí pro dvoucestný usměrňovač.

Implementace zesilovače absolutní hodnoty vychází z principu výpočtu. Ten lze realizovat invertujícím sumátorem, který bude ve správném poměru sčítat vstupní napětí u_i s jeho jednocestně usměrněným a invertovaným průběhem u_2. Viz také komentář k analýze.



Obrázek 11.25: Realizace dvoucestného usměrňovače s OZ (zesilovače absolutní hodnoty) pomocí invertujícího sumátoru.

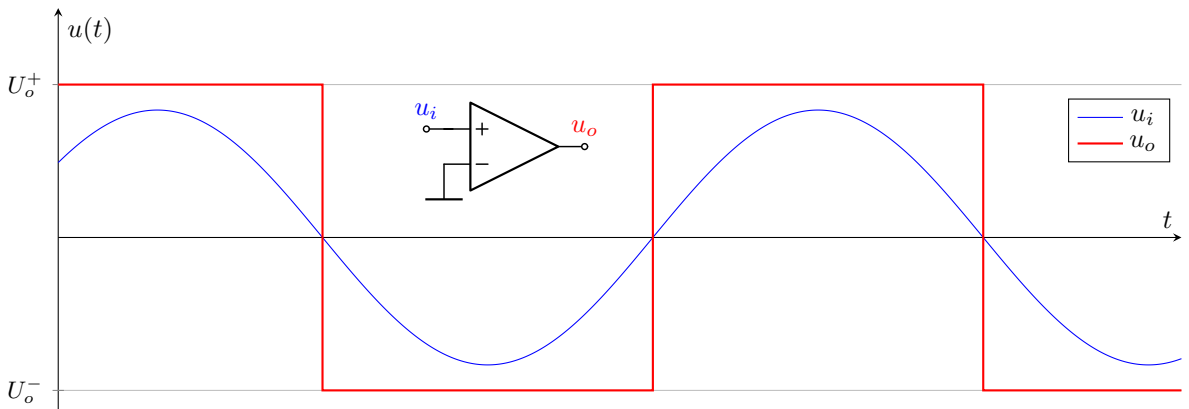
Pro správnou funkci obvodu jako absolutního zesilovače je třeba dodržet poměry rezistorů, např.:

$$R_1 = R_2,\ R_5 = 2R_4\,(= R_6),$$
$$\Rightarrow u_o = -(u_i + 2u_2).$$

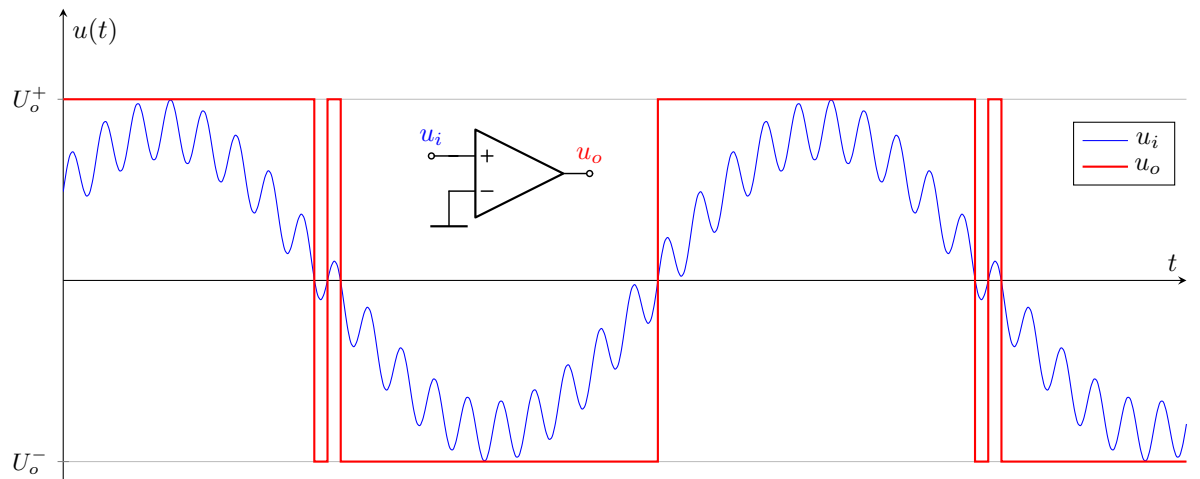
O nevýhodách, resp. vlivu reálných vlastností na uvedená zapojení se student může dozvědět v navazujícím kurzu.

11.19. Porovnávání analogového signálu – komparátory

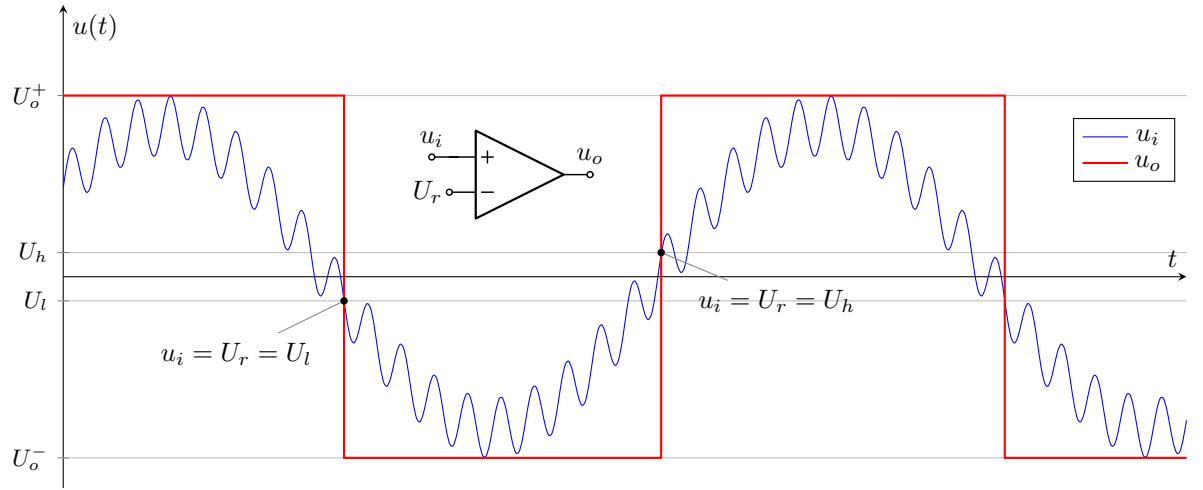
Při porovnávání/komparaci signálu zjišťujeme obvykle, zda je vstupní signál (např. u_i) větší nebo menší než referenční hodnota U_r. V nejjednodušším případě jsou oba signály přivedeny přímo na vstupy komparátoru (OZ) a výstup se pak nachází pouze v krajních hodnotách U_o^+ např. pro $u_i > U_r$ a U_o^- pro $u_i < U_r$ pro neinvertující zapojení. Hodnoty $U_o^\pm$ výstupního napětí jsou dány úrovněmi napájecího napětí $U_o^\pm \doteq \pm U_n$. Při zjišťování polarity u_i je tedy $U_r = 0$ a situace je ilustrována níže:



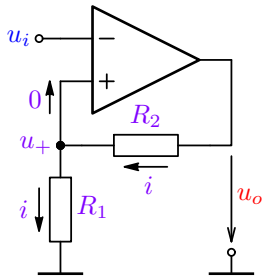
V mnoha případech však komparovaný signál obsahuje šum nebo rušení, které je na níže uvedeném obrázku pro jednoduchost ilustrováno další složkou signálu. V uvedeném případě má pak signál několik průchodů nulou, což může vést na nechtěné „zákmity“ výstupního signálu.



Pro odstranění výše uvedených „zákmitů“ při komparování se často využívá hystereze, tj. změny komparační úrovně v závislosti na úrovni výstupního signálu. Pro $u_o = U_o^+$ je např. nastaveno $U_r = U_l < 0$ a pro překlopení je nutné, aby vstupní napětí kleslo pod tuto hodnotu ($u_i < U_l$). Naopak pro $u_o = U_o^-$ je $U_r = U_h > 0$ a pro překlopení je nutné, aby vstupní napětí stouplo nad tuto hodnotu ($u_i > U_h$). Velikost hystereze (U_h, U_l) se nastavuje dle úrovně rušení. Obvodové řešení je uvedeno níže. Více, např. rozdíl mezi reálným OZ a komparátorem, viz přednáška.



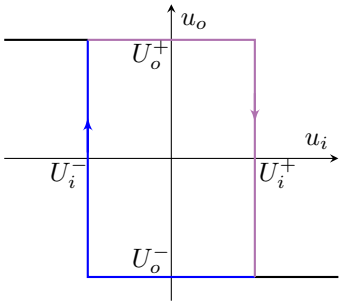
11.19.1. Invertující komparátor s hysterezí

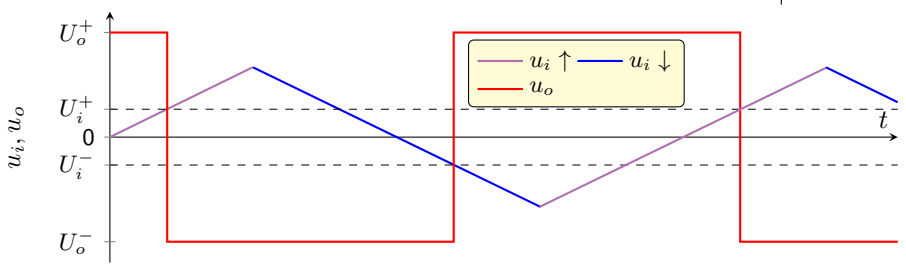


Pouze pro překlápění platí $u_+ = u_i$. Úrovně pro překlápění pak jsou:

$$U_i^+ = U_o^+ \frac{R_1}{R_1 + R_2},$$

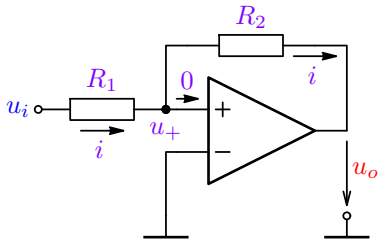
$$U_i^- = U_o^- \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$





Obrázek 11.26: Zapojení OZ jako invertujícího komparátoru s hysterezí, jeho převodní charakteristika a odezva na trojúhelníkový signál.

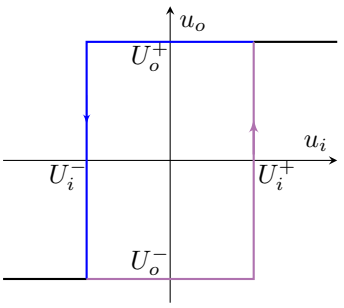
11.19.2. Neinvertující komparátor s hysterezí

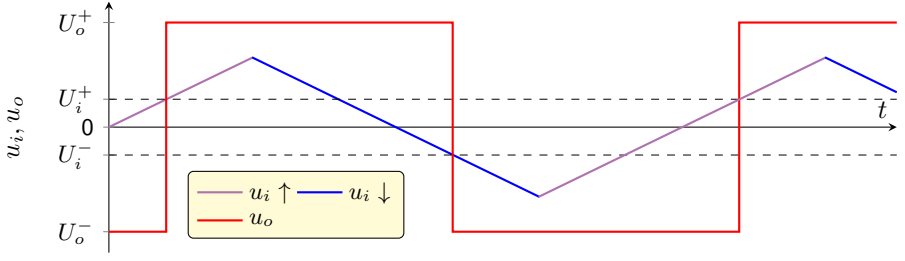


Pouze pro překlápění platí $u_+ = 0$.
Úrovně pro překlápění pak jsou:

$$\frac{U_i^+}{R_1} = \frac{-U_o^-}{R_2} \Rightarrow U_i^+ = -U_o^- \frac{R_1}{R_2}$$

$$\frac{U_i^-}{R_1} = \frac{-U_o^+}{R_2} \Rightarrow U_i^- = -U_o^+ \frac{R_1}{R_2}$$





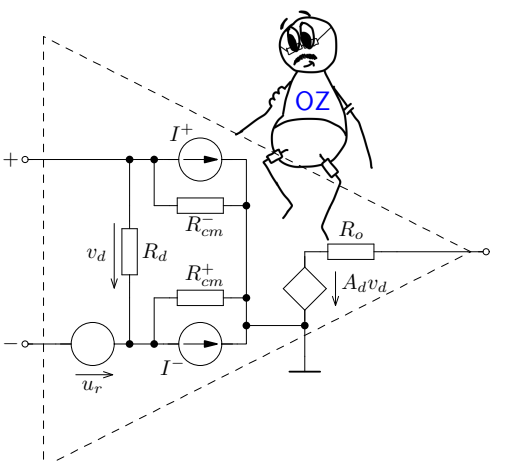
Obrázek 11.27: Zapojení OZ jako neinvertujícího komparátoru s hysterezí, jeho převodní charakteristika a odezva na trojúhelníkový signál.

Poznámky XI

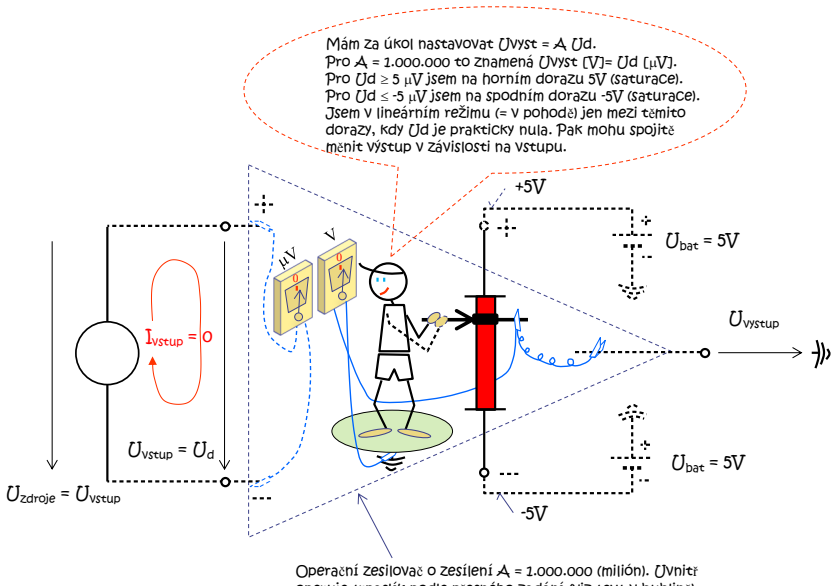
Kapitola 12

Reálné vlastnosti operačního zesilovače

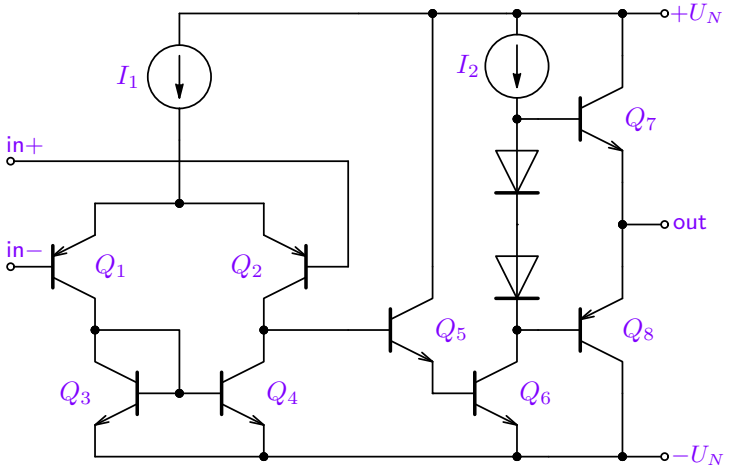
Tato kapitola uvádí základní reálné vlastnosti operačního zesilovače. Uživatel se seznámí jak se statickými chybami jako je vstupní napěťová nesymetrie (ofset), vstupní proudy, . . . , tak s dynamickými vlastnostmi reálného OZ včetně nelineárního chování vlivem rychlosti přeběhu. Bude také ukázána analýza vlivu uvedených parametrů na chování elementárních operačních sítí. V závěru je nastíněna otázka modelování reálného OZ v simulačních programech a jsou ukázány parametry vybraných typů vyráběných OZ.



12.1. Reálný operační zesilovač

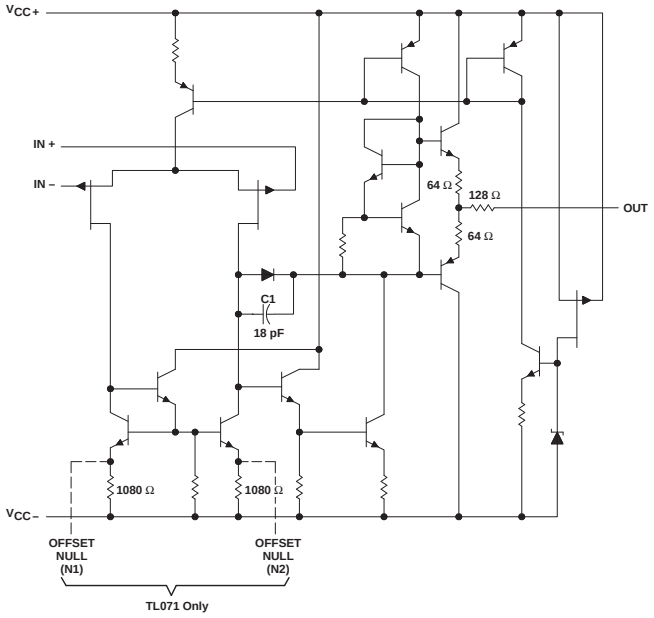


Obrázek převzat z https://user.unob.cz/biolek/vyukaVUT/skripta/Sbirka_ OZ3.pdf

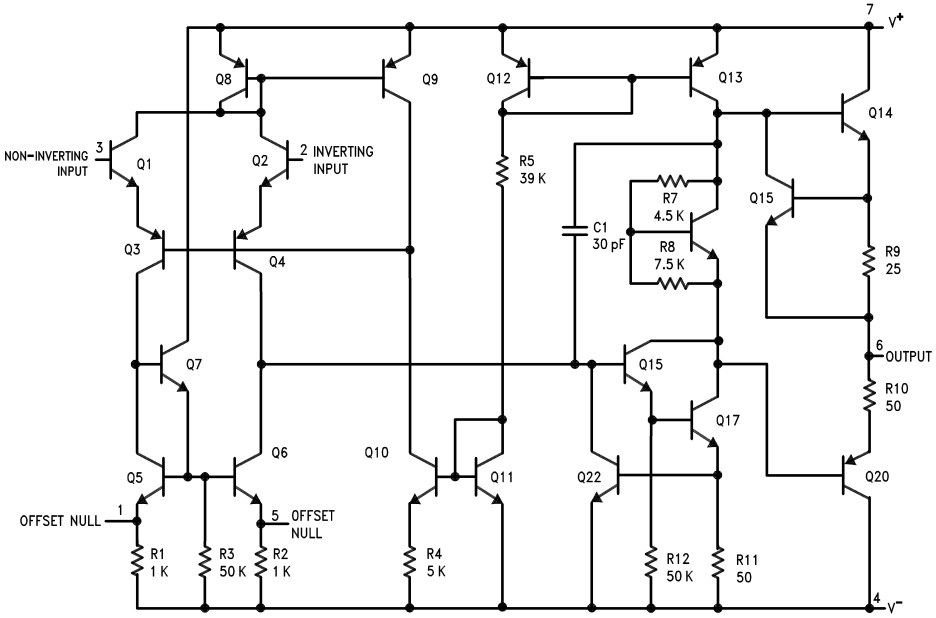


Obrázek 12.1: Ukázka principiálního vnitřního zapojení operačního zesilovače.

Obrázek slouží pouze jako ilustrace, jak lze operační zesilovač realizovat, že se skládá z tranzistorů, má nenulové vstupní proudy, posunutou převodní charakteristiku (tzv. napěťový ofset), ze které je patrné také konečné zesílení, ... Čtenář si může tyto parametry v simulaci ověřit. Podrobný rozbor a analýza struktury je předmětem magisterského studia, viz kapitolu 16.18. Následující struktury konkrétních obvodů z tohoto konceptu vycházejí.



Obrázek 12.2: Vnitřní zapojení konkrétního OZ typu TL071.

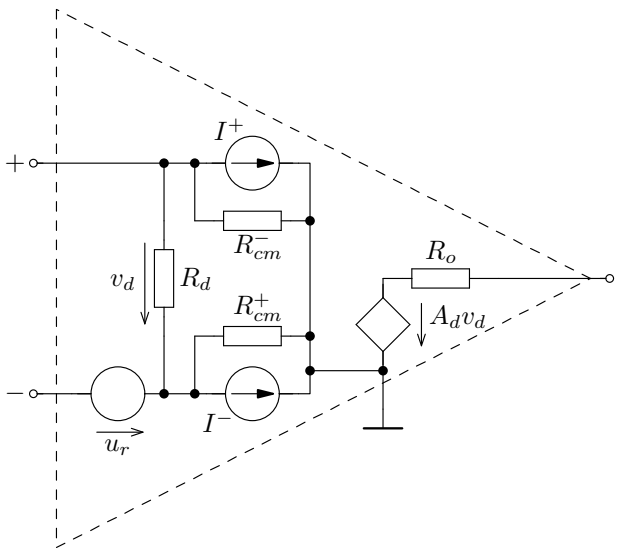


Obrázek 12.3: Vnitřní zapojení konkrétního OZ typu LM741.

Ideální OZ lze modelovat pomocí řízeného zdroje napětí s převodní konstantou $A \to \infty$. Reálné vlastnosti se k tomuto ideálu více či méně blíží. Pro jejich popis a analýzu jejich vlivu se používají tzv. makromodely[a]. Lineární model OZ postihující základní reálné parametry tohoto konceptu je na obrázku 12.4. Výčet parametrů je uveden níže a jejich význam bude dále diskutován.

- konečné zesílení $A_d(j\omega)$ včetně kmitočtové závislosti,
- výstupní odpor R_o,
- vstupní odpory pro rozdílový i souhlasný signál,
- vstupní proudy $I^{\pm}$ (včetně proudového šumu),
- rušivé napětí u_r, které může modelovat jak statické chyby, tak další nedokonalosti včetně vstupního šumu.

[a] místo tranzistorových zapojení, které nejsou většinou k dispozici a jejich analýza je příliš náročná



Obrázek 12.4: Základní lineární model reálného OZ.

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

Electrical Characteristics (Note 5)

Parameter	Conditions	LM741A			LM741			LM741C			Units
		Min	Typ	Max	Min	Typ	Max	Min	Typ	Max	
Input Offset Voltage	$T_A = 25^\circ C$										
	$R_S \le 10\ k\Omega$					1.0	5.0		2.0	6.0	mV
	$R_S \le 50\Omega$		0.8	3.0							mV
	$T_{AMIN} \le T_A \le T_{AMAX}$										
	$R_S \le 50\Omega$			4.0							mV
	$R_S \le 10\ k\Omega$						6.0			7.5	mV
Average Input Offset Voltage Drift				15							$\mu V/^\circ C$
Input Offset Current	$T_A = 25^\circ C$		3.0	30		20	200		20	200	nA
	$T_{AMIN} \le T_A \le T_{AMAX}$			70		85	500			300	nA
Input Bias Current	$T_A = 25^\circ C$		30	80		80	500		80	500	nA
	$T_{AMIN} \le T_A \le T_{AMAX}$			0.210			1.5			0.8	μA
Input Resistance	$T_A = 25^\circ C$, $V_S = \pm 20V$	1.0	6.0		0.3	2.0		0.3	2.0		$M\Omega$
	$T_{AMIN} \le T_A \le T_{AMAX}$, $V_S = \pm 20V$	0.5									$M\Omega$
Input Voltage Range	$T_A = 25^\circ C$							±12	±13		V
	$T_{AMIN} \le T_A \le T_{AMAX}$				±12	±13					V

Obrázek 12.5: Část katalogového listu s výpisem parametrů OZ LM741.

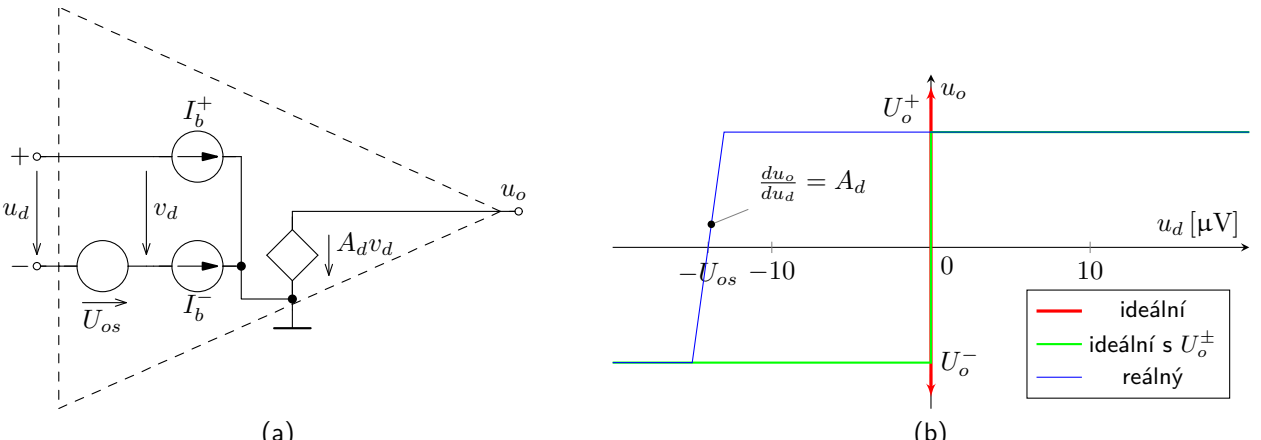
Parameter	Conditions	LM741A			LM741			LM741C			Units
		Min	Typ	Max	Min	Typ	Max	Min	Typ	Max	
Large Signal Voltage Gain	T_A = 25°C, $R_L \geq 2$ kΩ										
	V_S = ±20V, V_O = ±15V	50									V/mV
	V_S = ±15V, V_O = ±10V				50	200		20	200		V/mV
Output Short Circuit	T_A = 25°C	10	25	35		25			25		mA
Current	$T_{AMIN} \leq T_A \leq T_{AMAX}$	10		40							mA
Common-Mode	$T_{AMIN} \leq T_A \leq T_{AMAX}$										
Rejection Ratio	$R_S \leq 10$ kΩ, V_{CM} = ±12V				70	90		70	90		dB
	$R_S \leq 50\Omega$, V_{CM} = ±12V	80	95								dB
Supply Voltage Rejection	$T_{AMIN} \leq T_A \leq T_{AMAX}$,										
Ratio	V_S = ±20V to V_S = ±5V										
	$R_S \leq 50\Omega$	86	96								dB
	$R_S \leq 10$ kΩ				77	96		77	96		dB
Bandwidth (Note 6)	T_A = 25°C	0.437	1.5								MHz
Slew Rate	T_A = 25°C, Unity Gain	0.3	0.7			0.5			0.5		V/µs
Supply Current	T_A = 25°C					1.7	2.8		1.7	2.8	mA

Obrázek 12.6: Část katalogového listu s výpisem parametrů OZ LM741.

Měření parametrů tohoto typu operačního zesilovače je uvedeno v dodatku D, včetně komentářů a ukázek analýz.

12.2. Statické chyby reálného OZ

Pro určení statických chyb OZ budeme z modelu 12.7 uvažovat pouze základní statické parametry: vstupní napěťovou nesymetrii U_{os}, vstupní proudy I_b^+, I_b^-, konečné statické zesílení A_d, případně i nenulové CMRR.

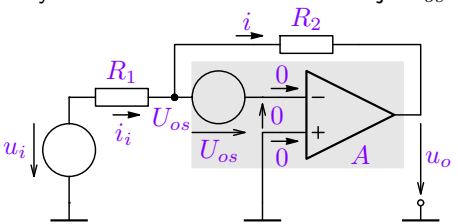


Obrázek 12.7: Statický model reálného OZ a typická převodní charakteristika ideálního OZ s neomezeným a omezeným výstupním napětím (vlivem napájecího napětí $\pm U_N$) a reálného OZ.

12.2.1. Vliv napěťové nesymetrie OZ na invertující zapojení

Vstupní napěťová nesymetrie (offset) vzniká jako nedokonalost vstupního rozdílového zesilovače vnitřní struktury OZ a projevuje se tak, že pro nulové výstupní napětí OZ bez ZV je nutné přivést mezi vstupy OZ malé napětí, jehož velikost je právě U_{os}. Model zesilovače na obrázku 12.7 (a) obsahuje napěťový zdroj U_{os}, jehož vliv se přiložením stejného, opačně orientovaného napětí mezi vstupy OZ kompenzuje.

Výpočet vlivu napěťové nesymetrie OZ na zapojení provedeme tak, že model 12.7 (a) se zdrojem U_{os} aplikujeme namísto OZ. Vzhledem k tomu, že ostatní parametry uvažujeme ideální (ideální OZ až na U_{os}), lze model OZ překreslit s využitím ideálního OZ A a zdroje U_{os} (šedý box), jak je uvedeno na obrázku 12.8. Pak platí:



$$i_i = i \Rightarrow \frac{u_i - U_{os}}{R_1} = \frac{U_{os} - u_o}{R_2}$$

$$u_o = -\frac{R_2}{R_1} u_i + U_{os}\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \qquad (12.1)$$

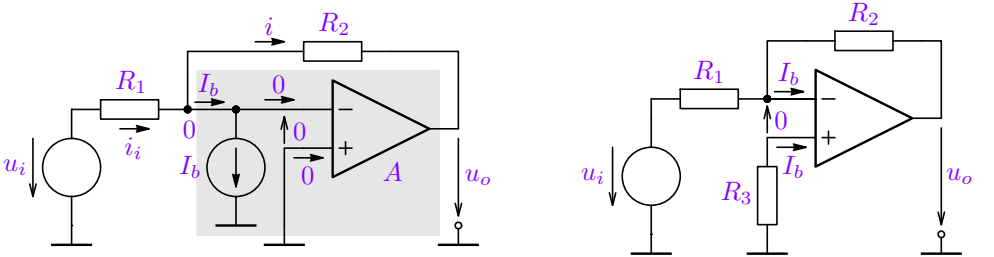
Obrázek 12.8: Vliv vstupní napěťové nesymetrie (offsetu) na invertující zesilovač.

Je zřejmé, že vliv napěťové nesymetrie na neinvertující zapojení bude identický (viz analýzu a komentář), jako v případě zapojení invertujícího – vzhledem k principu superpozice dostáváme pro vliv zdroje U_{os} stejné zapojení jak pro invertující, tak neinvertující zesilovač.

12.2.2. Vliv vstupních proudů OZ na invertující zapojení

Podobně jako v předchozím případě určíme vliv vstupních proudů OZ tak, že v zapojení použijeme ideální OZ a proudové zdroje $I_b^{\pm}$ na místě vstupů OZ. Pro invertující zapojení tedy dostáváme obrázek 12.9 (a). Pro výstupní napětí vlivem I_b platí $u_o = R_2 I_b$ (pro $u_i = 0$ je $i_i = 0 \Rightarrow i = -I_b$), což evidentně platí i pro invertující zapojení.

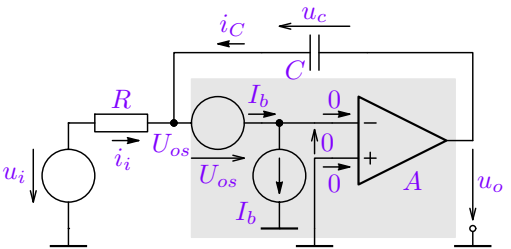
Pro zesilovače realizované CMOS technologií je tento vliv téměř vždy zanedbatelný ($I_b \approx 10^{-11}$), pro OZ implementovaný v bipolární technologii lze využít jednoduché kompenzace dle obrázku 12.9 (b), kde na rezistoru R_3 vzniká průchodem vstupních proudů stejný úbytek jako na paralelní kombinaci $R_1||R_2$ (uvažujeme $u_o = 0$ a $I_b^+ = I_b^-$, tj. nulovou vstupní proudovou nesymetrii) a tím je vliv vstupních proudů na výstupní napětí kompenzován. Viz také komentář k analýze.



Obrázek 12.9: Vliv vstupních proudů OZ na invertující zesilovač a jejich kompenzace.

12.2.3. Vliv napěťové nesymetrie a vstupních proudů OZ na integrátor

Vliv uvedených parametrů se sčítá (resp. odčítá v závislosti na polaritě) a lze ho jednoduše určit i v dalších zapojeních[1]. Následuje ukázka vlivu napěťové nesymetrie a vstupních proudů OZ na integrátor. Z výsledku je zřejmé chování: vzhledem k astatickému obvodu je výstupní napětí lineární funkcí času i pro $u_i = 0$. Bez dalších podpůrných obvodů (např. zavedení další ZZV dle 11.14) je takový obvod nepoužitelný. Bez nich bude výstupní napětí postupně růst až do napájecího napětí, kde se projeví nelinearita (omezení výstupního napětí) a obvod přestane plnit požadovanou funkci. Pro vliv uvažovaných parametrů na $u_o(t)$ při nulovém buzení platí:



Obrázek 12.10: Vliv vstupních proudů a offsetu OZ na invertující integrátor.

$$u_i = 0 \;\Rightarrow\; i_i = -\frac{U_{os}}{R}, \quad i_C = -i_i + I_b$$

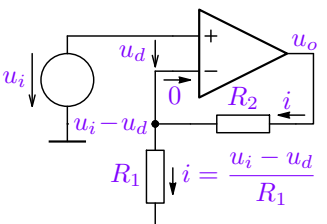
$$\boxed{u_o(t)} = U_{os} + u_c(0) + \frac{1}{C}\int_0^t \left(\frac{U_{os}}{R} + I_b\right) d\tau =$$

$$= U_{os} + u_c(0) + \left(\frac{U_{os}}{CR} + \frac{I_b}{C}\right) t \qquad (12.2)$$

[1] Vzhledem k linearitě platí princip superpozice a vliv jednotlivých parametrů lze tedy určit odděleně.

12.2.4. Vliv konečného zesílení OZ na základní operační sítě

Vzhledem k tomu, že zesílení A_d reálných OZ je vždy konečné, způsobí tato skutečnost jistou statickou chybu v celkovém zesílení soustavy A_u. Tu určíme jednoduše tak, že nebudeme uvažovat napětí u_d mezi vstupy OZ nulové a výstupní napětí jako $u_o = A_d u_d$ a aplikujeme základní metody analýzy. Pro výstupní napětí u_o a celkové zesílení A_u pak platí:



$$u_o = A_d u_d = \frac{R_2}{R_1}(u_i - u_d) + u_i - u_d = u_i\left(\frac{R_2}{R_1} + 1\right) - \frac{u_o}{A_d}\left(\frac{R_2}{R_1} + 1\right),$$

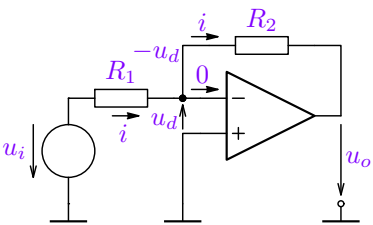
$$\Rightarrow \boxed{A_u} = \frac{u_o}{u_i} = \frac{\frac{R_2}{R_1} + 1}{1 + \frac{1}{A_d}\left(\frac{R_2}{R_1} + 1\right)} \boxed{= \frac{A_{uid}}{1 + \frac{A_{uid}}{A_d}}} = \frac{A_d(R_2 + R_1)}{A_d R_1 + R_2 + R_1}. \quad (12.3)$$

Obrázek 12.11: Vliv konečného zesílení OZ na neinvertující zesilovač.

Relativní chyba zesílení A_u daná konečným zesílením OZ A_d pak je:

$$\boxed{\epsilon = \frac{A_u - A_{uid}}{A_{uid}} = -\frac{A_{uid}}{A_{uid} + A_d}} \quad \text{kde} \quad A_{uid} = \frac{R_2}{R_1} + 1 \text{ (napěťový zisk s ideálním OA).} \quad (12.4)$$

Podobně jako v předchozím případě určíme vliv konečného zesílení A_d reálného OZ v případě invertujícího zesilovače. Pro proud i a pak pro celkové zesílení A_u platí:



$$i = \frac{u_i + u_d}{R_1} = \frac{-u_d - u_o}{R_2} \;\Rightarrow\; -\frac{R_2}{R_1}u_i = u_d\left(\frac{R_2}{R_1}+1\right) + u_o \quad \text{kde} \quad u_d = \frac{u_o}{A_d}$$

$$\Rightarrow -\frac{R_2}{R_1}u_i = u_o\frac{A_dR_1 + R_2 + R_1}{A_dR_1},$$

$$\Rightarrow \boxed{A_u} = \frac{u_o}{u_i} = -\frac{A_dR_2}{A_dR_1 + R_2 + R_1} \boxed{= \frac{A_{uid}}{1 + \frac{1-A_{uid}}{A_d}}} \quad \text{kde } A_{uid} = -\frac{R_2}{R_1} \qquad (12.5)$$

Obrázek 12.12: Vliv konečného zesílení OZ na invertující zesilovač.

Relativní chyba zesílení A_u daná konečným zesílením OZ A_d pak je:

$$\boxed{\epsilon} = \frac{A_u - A_{uid}}{A_{uid}} = -\frac{1 - A_{uid}}{A_d + 1 - A_{uid}} \boxed{= -\frac{1 + |A_{uid}|}{A_d + (1 + |A_{uid}|)}} \qquad (12.6)$$

Příklad 12.1 Zesilovač před A/D převodník

Zadání: Určete minimální zesílení A_d a maximální napěťový offset U_{os} operačního zesilovače v neinvertujícím zapojení se ziskem $A_{uid} = 10$ pro zpracování stejnosměrného signálu, pokud je předřazen 12-bitovému A/D převodníku schopnému zpracovat napětí 0 až $3\,\mathrm{V}$.

Řešení: Požadované parametry je třeba určit tak, aby chyba výstupního napětí byla menší nebo rovna napěťové úrovni LSB, která je $U_{LSB} = 3/(2^{12}) \doteq 0{,}73\,\mathrm{mV}$.

Pro neinvertující zesilovač lze jednoduše ukázat, že pro složku výstupního napětí vyvolanou napěťovou nesymetrií platí také vztah (12.1), tj. $u_o = U_{os}\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)\Big|_{u_i=0} = U_{os}A_{uid}|_{u_i=0}$, pak

$$U_{os}A_{uid} \leq U_{LSB} \;\Rightarrow\; \boxed{U_{os} \leq \frac{U_{LSB}}{A_{uid}} \doteq 73\,\mu\mathrm{V}}$$

Největší absolutní chyba (odchylka) výstupního napětí je U_{LSB} při maximálním výstupním napětí $3\,\mathrm{V}$. Tuto chybu lze vyjádřit relativně jako :

$$\epsilon = \frac{(3 - U_{LSB}) - 3}{3} = -\frac{U_{LSB}}{3} \doteq -0{,}24 \cdot 10^{-3} = -0{,}24\,‰ \tag{12.7}$$

Tato chyba je pak chybou zesílení neinvertujícího zesilovač vlivem konečného zesílení A operačního zesilovače dle (12.4), tj.:

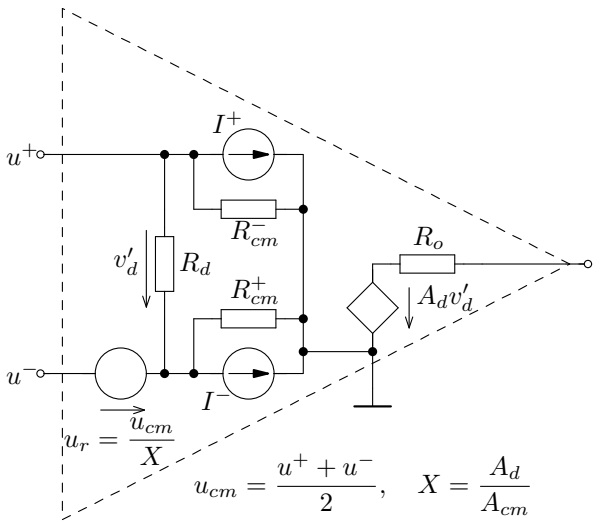
$$\epsilon = -\frac{A_{uid}}{A_{uid} + A_d} \Rightarrow A_d = -\frac{A_{uid}(\epsilon + 1)}{\epsilon} \;\Rightarrow\; \boxed{A_d \geq 41 \cdot 10^3}$$

Požadavek na zesílení OZ není kritický, ale $U_{os} \leq 73\,\mu\mathrm{V}$ je již poměrně zásadní pro výběr typu OZ, nicméně lze ho bez problému splnit.

12.2.5. Potlačení souhlasné složky signálu (CMRR)

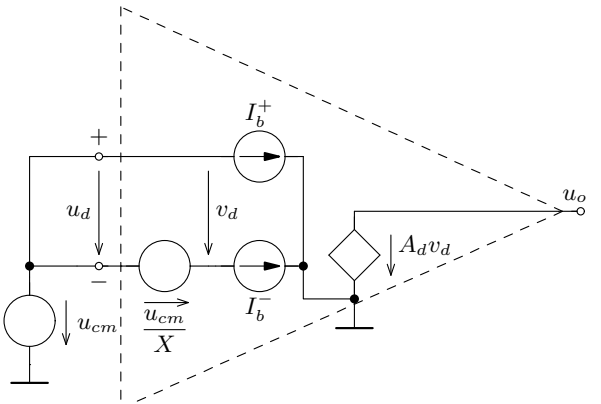
OZ je v podstatě rozdílovým (diferenčním) zesilovačem s vysokým rozdílovým zesílením A_d. Vzhledem k tomu bude v reálném případě vykazovat i souhlasné zesílení A_s. Jak víme z předchozího výkladu kvalita rozdílového zesilovače se určuje parametrem – potlačením souhlasné složky signálu, který vyjadřuje poměr rozdílového a souhlasného zesílení CMRR $= X = A_d/A_{cm}$.

Modelovat tento parametr lze podobně jako jako vstupní ofset, tj. zdrojem napětím, jehož hodnota je ale v tomto případě závislá na souhlasném napětí – je řízen napětím $u_s = \frac{u^+ + u^-}{2}$ a jeho převodní konstanta je A_{cm}/A_d, tj. hodnota zdoje pak je u_{cm}/X. Tím je pak zajištěno chování modelu jak pro rozdílový vstupní signál (pokud bude $u_{cm} = 0$ model se chová stejně jako v předchocím případě – zesiluje pouze rozdíl vstupních signálů), tak pro souhlasný signál, jak je uvedeno dále.



Obrázek 12.13: Model reálného OZ včetně vlivu souhlasného zesílení.

Chování modelu OZ s vlivem CMRR na souhlasné buzení



$$X = \frac{A_d}{A_{cm}}, \quad u_{cm} = \frac{u^+ + u^-}{2},$$

pro $u_d = u^+ - u^- = u_{cm} - u_{cm} = 0$ je

$$v_d = \frac{u_{cm}}{X} = \frac{u_{cm} A_{cm}}{A_d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_o = A_d v_d = A_{cm} u_{cm}$$

Vliv CMRR se uplatní u neinvertujícího zesilovače ($u_{cm} \doteq u_i$), ale nikoli u invertujícího zesilovače, kde $u_{cm} \doteq 0$. Pro neinvertující zesilovač s OZ konečným $X = \frac{A_d}{A_{cm}}$ lze ukázat, že se vztah pro zesílení (12.3) se změní na

$$A_u = \frac{A_{uid}\left(1 + \frac{A_{cm}}{2A_d}\right)}{1 - \frac{A_{cm}}{2A_d} + \frac{A_{uid}}{A_d}}. \tag{12.8}$$

12.3. Základní dynamické parametry OZ

12.3.1. Kmitočtová závislost zesílení OZ

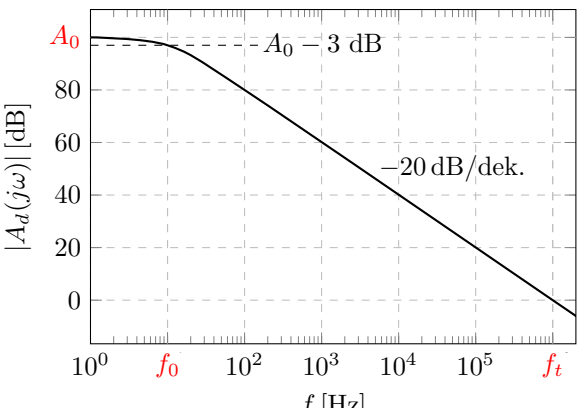
Jedna ze základních vlastností OZ v kmitočtové oblasti je závislost rozdílového zesílení na kmitočtu. V nejjednodušším případě jí lze vyjádřit následujícím vztahem:

$$A_d(j\omega) = \frac{A_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{A_0\omega_0}{j\omega + \omega_0}, \qquad (12.9)$$

který obsahuje zesílení pro stejnosměrný signál A_0 a vykazuje jeden (dominantní) pól ω_0, jak ukazuje i obrázek 12.14. U OZ se však nejčastěji udává tzv. tranzitní kmitočet ω_t, kdy zesílení $|A_d(j\omega_t)| = 1$. Vztah pro zesílení lze pro $\omega \gg \omega_0$ jednoduše vyjádřit jako:

$$A_d(j\omega) \doteq \frac{A_0\omega_0}{j\omega} = \frac{\omega_t}{j\omega} \quad \text{pro } \omega \gg \omega_0, \qquad (12.10)$$

ze kterého je evidentní, že $\omega_t = A_0\omega_0$, aby platilo $|A_d(j\omega_t)| = 1$.



Obrázek 12.14: Typická kmitočtová závislost zesílení OZ.

12.3.2. Vliv kmitočtové závislosti zesílení OZ na základní zapojení

Vyjdeme-li ze vztahu (12.3) pro zesílení neinvertující zesilovače, resp. ze vztahu (12.5) pro zesílení invertujícího zesilovače a za zesílení A_d vlastního OZ dosadíme vztah (12.10) dostaneme:

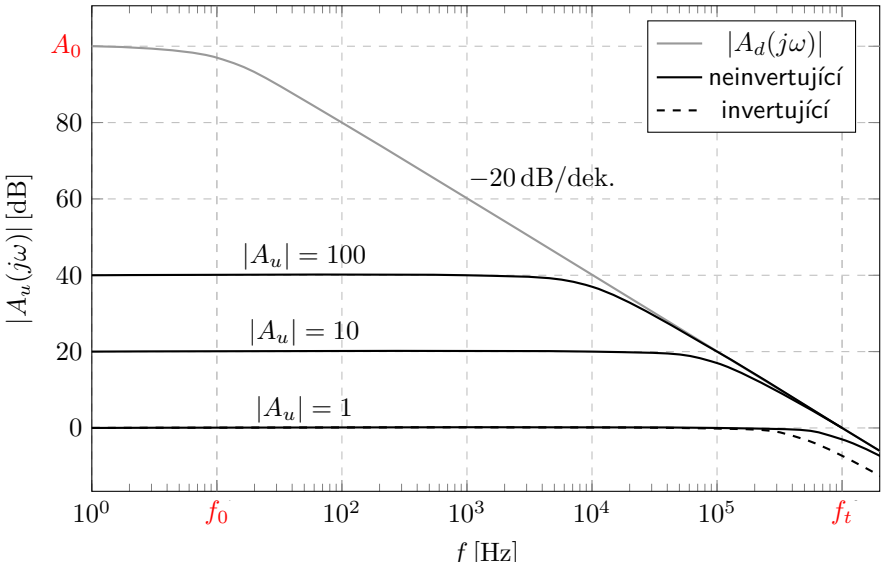
Přenos neinvertujícího zesilovače

$$\boxed{A_u(s)} = \frac{1+\dfrac{R_2}{R_1}}{1+\dfrac{s}{A_0\omega_0}\dfrac{R_1+R_2}{R_1}} \boxed{= \frac{A_{uid}}{1+\dfrac{s}{\omega_c}}}, \quad \text{kde} \quad \boxed{\omega_c} = A_0\omega_0\frac{R_1}{R_1+R_2} = \omega_t\frac{R_1}{R_1+R_2} \boxed{= \frac{\omega_t}{A_{uid}}}. \tag{12.11}$$

Přenos invertujícího zesilovače

$$\boxed{A_u(s)} = \frac{-\dfrac{R_2}{R_1}}{1+\dfrac{s}{A_0\omega_0}\dfrac{R_1+R_2}{R_1}} \boxed{= \frac{A_{uid}}{1+\dfrac{s}{\omega_c}}}, \quad \text{kde} \quad \boxed{\omega_c} = A_0\omega_0\frac{R_1}{R_1+R_2} = \omega_t\frac{R_1}{R_1+R_2} \boxed{= \frac{\omega_t}{|A_{uid}|+1}}. \tag{12.12}$$

Je zřejmé, že s velikostí zesílení A_{uid} se nepřímo úměrně mění šířka pásma ω_c zesilovače prakticky nezávisle na zapojení. Rozdíl je zřejmý až pro jednotkové zesílení, kdy invertující zapojení vykazuje zlom modulové charakteristiky na $\omega_t/2$, na rozdíl od zesilovače neinvertujícího, jehož šířka pásma je ω_t. Vykreslení amplitudových kmitočtových charakteristik $A_u(j\omega)$ pro jednotlivá zesílení ukazuje následující obrázek 12.15, ověření analýzou a experimentem.



Obrázek 12.15: Typická kmitočtová závislost zesílení invertujícího a neinvertujícího zesilovače.

12.3.3. Časové odezvy dané dominantním pólem přenosu

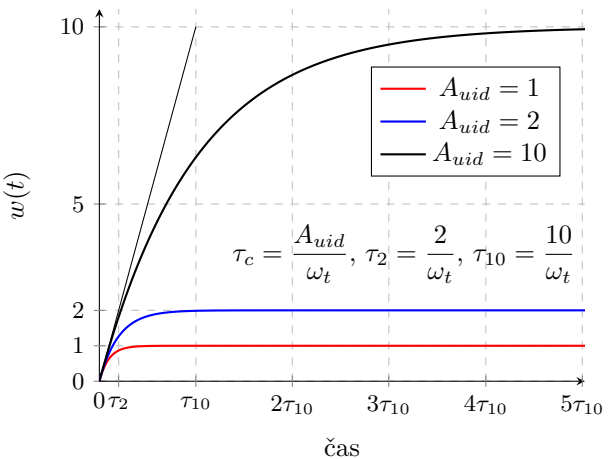
Z přenosů (12.11) a (12.12) je zřejmé, že dominantní pól na ω_0 bude mimo kmitočtových vlastností ovlivňovat i chování zapojení v časové oblasti. Vypovídající charakteristikou je v tomto směru odezva na jednotkový skok.

Přechodovou charakteristiku např. neinvertujícího zesilovače lze vyjádřit následovně:

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\underbrace{A_u(s)\cdot\frac{1}{s}}_{W(s)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A_{uid}}{s\left(1+\frac{s}{\omega_c}\right)}\right\} =$$

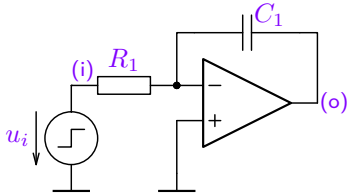
$$= A_{uid}(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_c}}), \quad \text{pro} \quad t>0 \qquad (12.13)$$

Vzhledem k tomu, že je časová konstanta exponenciály závislá na zesílení $\tau_c = 1/\omega_c = A_{uid}/\omega_t$, je pro větší zesílení soustavy časová odezva delší, jak ukazuje obrázek 12.16 a potvrzuje analýza. To je nutné si při návrhu uvědomit zejména v případech, kdy je rychlost ustálení důležitým parametrem (k ustálení s chybou pod 1 % dojde pro $t > 5\tau_c$, jelikož $w(5\tau_c) \doteq 0{,}99A_{uid}$, pokud je statická chyba zesílení A_0 vlastního OZ výrazně menší).



Obrázek 12.16: Odezva $w(t)$ neinvertujícího zapojení.

Podobně lze určit časovou odezvu pro klasický invertující integrátor dle obrázku níže s OZ s dominantním pólem na ω_0. Dosaďme do (12.5) ideální přenos ve tvaru $A_{uid} = -\frac{1}{s\tau}$, kde $\tau = R_1 C_1$ a dále uplatněme vztah (12.10).[2] Pak přenos integrátoru a jeho přechodovou charakteristiku lze vyjádřit v níže uvedeném tvaru:



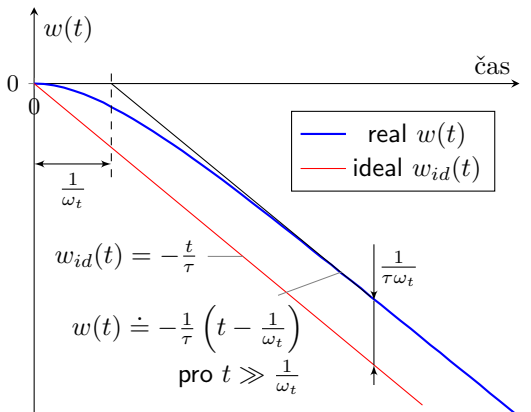
$$H(s) = -\frac{\omega_t}{s(s\tau + \tau\omega_t + 1)}$$

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{H(s)}{s}\right\} = -\frac{1}{\tau + \frac{1}{\omega_t}}\left(t + \frac{\mathrm{e}^{-t(\omega_t + \frac{1}{\tau})} - 1}{\omega_t + \frac{1}{\tau}}\right) \doteq$$

$$\doteq -\frac{1}{\tau}\left(t + \frac{\mathrm{e}^{-t\omega_t} - 1}{\omega_t}\right) \quad \text{pro} \quad \tau \gg \frac{1}{\omega_t}, \quad \text{a dále}$$

$$w(t) \doteq t\left(-\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau\omega_t}\right) \quad \text{pro} \quad t \gg \frac{1}{\omega_t}, \quad (12.14)$$

kde člen $\frac{1}{\tau\omega_t}$ představuje „statickou“ chybu integrátoru po odeznění přechodného děje (exponenciály).

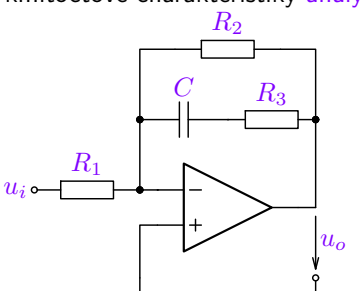


Obrázek 12.17: Přechodová charakteristika reálného a ideálního integrátoru.

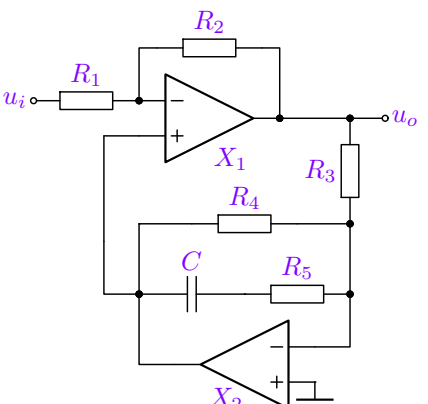
[2] Integrátor je použitelný cca pro $\tau > 10/\omega_t$ a pro $10\omega_0 < \omega < \omega_t/10$ (neuplatní se ω_0, resp. konečné A_0 ani zanedbání v (12.10)).

Pro některé typy OZ je v případě integrátoru doporučeno zapojení s přidáním nuly přenosu dle 12.18 (a). Důvodem je udržení stability zapojení, kterou mohou porušit další póly zesílení OZ (mimo pólu dominantního), viz. analýzu a rozbor v kapitolách 10.8.3 a 10.8.4, včetně příkladu 10.5. V případě integrátoru je pro vysoké kmitočty zesílení ($|H(j\omega)|$) menší než jedna, což se blíží případu $\beta = 1$ neinvertujícího zapojení diskutovaného v kapitole 10.8.3.

Tato technika se používá i v dalších případech, např. v integrátoru (X_2) pro nulování stejnosměrné složky výkonových zesilovačů (X_1), jak ukazuje obrázek (b). Zde lze přidáním R_5 naopak částečně kompenzovat šířku pásma zesilovače (má vliv i na snížení zesílení), viz časovou odezvu a kmitočtové charakteristiky analýzy a její popis.



(a)

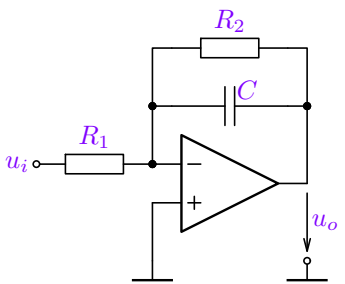


(b)

Obrázek 12.18: Integrátor s nulou přenosu (a) a jeho použití pro minimalizaci DC složky v zapojení zesilovače (b).

12.3.4. Vliv kmitočtové závislosti zesílení OZ na ztrátový integrátor

Pro odvození vlivu kmitočtové závislosti OZ na ztrátový integrátor dle 11.14 vyjdeme ze vztahu (12.5) pro zesílení invertujícího zesilovače, kde $A_d = A_d(j\omega)$ dle (12.9), resp. (12.10) a pro $A_0 \gg R_2/R_1$ dostaneme:



$\tau_2 = R_2C = \frac{1}{\omega_2}$, $\tau_i = R_1C = \frac{1}{\omega_i}$.

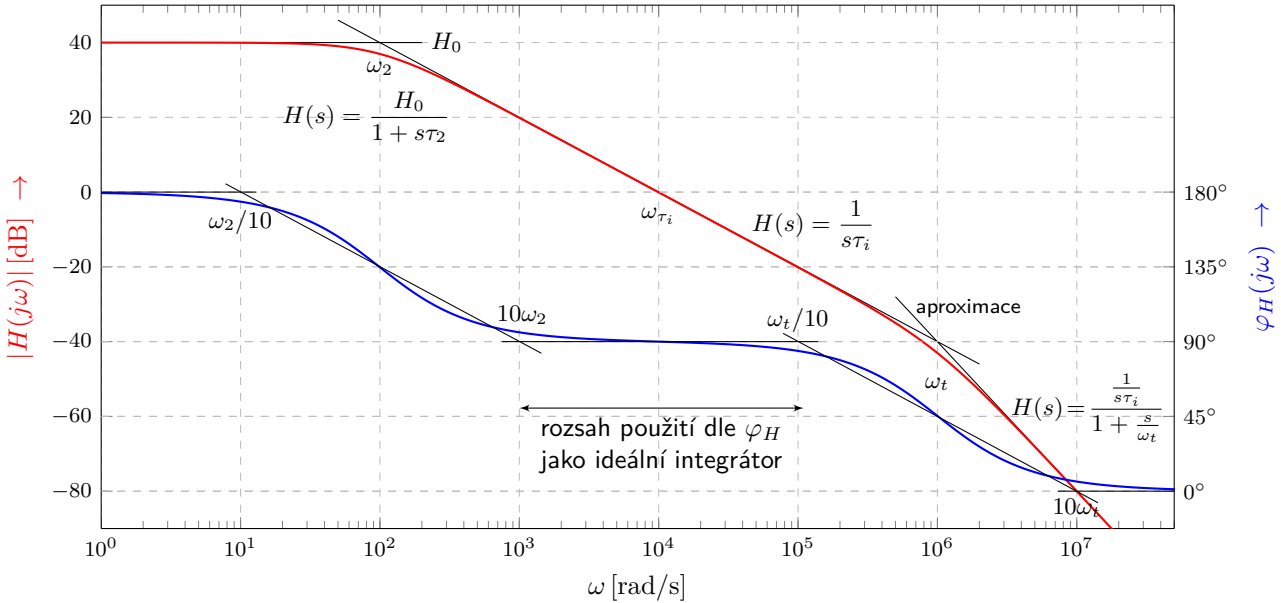
$$\text{pro } \omega \to 0: \quad H(s) \doteq \frac{R_2}{R_1} = H_0, \tag{12.15}$$

$$\text{pro } \omega \ll \omega_t: \quad Z_2(s) = \frac{R_2}{1+sCR_2}, \quad H(s) \doteq \frac{A_0 Z_2(s)}{A_0 R_1} = \frac{H_0}{1+s\tau_2}, \tag{12.16}$$

$$\text{pro } 10\omega_2 < \omega < 10\omega_t: \quad H(s) \doteq \frac{R_2}{R_1 s\tau_2} = \frac{1}{sR_1C} = \frac{1}{s\tau_i}, \tag{12.17}$$

$$\text{pro } \omega \approx \omega_t: \quad Z_2(s) \doteq \frac{1}{sC},\ A_d(s) \doteq \frac{\omega_t}{s}, \quad H(s) = \frac{A_d(s)Z_2(s)}{A_d(s)R_1 + R_1 + Z_2(s)} \doteq$$
$$\doteq \frac{\omega_t}{sCR_1}\frac{1}{\omega_t + \omega_i + s} = \Big|_{\omega_t \gg \omega_i} \doteq \frac{1}{s\tau_i} \cdot \frac{1}{1+\frac{s}{\omega_t}} \tag{12.18}$$

Kmitočtové charakteristiky jsou určeny podle hodnot prvků z analýzy a vykresleny na následujícím obrázku 12.19. Vzhledem k tomu, že pro ideální invertující integrátor je $\varphi_H = 90°$, je ztrátový integrátor použitelný jako ideální pouze v omezeném kmitočtovém rozsahu. Pokud by se jednalo o zapojení ideálního integrátoru ($R_2 \to \infty$), tak je pak ω_2 dáno dominantním pólem ω_0 OZ, což je třeba vzít v úvahu zejména u kmitočtových filtrů, kde se tyto struktury využívají s další ZV, která umožňuje i přímé použití právě ideálního integrátoru.



Obrázek 12.19: Kmitočtové charakteristiky $H(j\omega)$ ztrátového integrátoru.

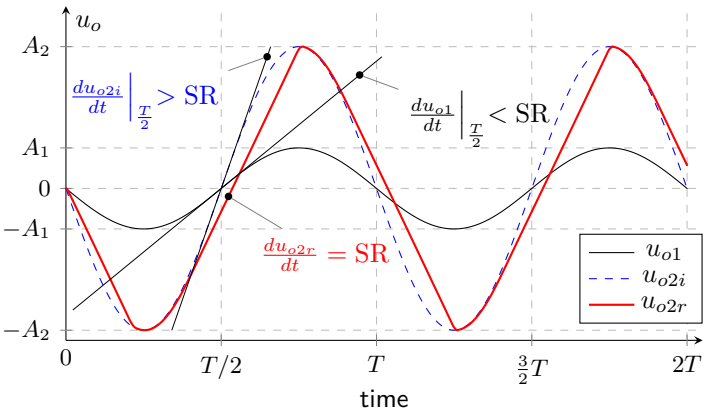
12.3.5. Rychlost přeběhu

Rychlost přeběhu SR je základním dynamickým parametrem OZ, udávající **nelineární** chování v časové oblasti. Je to maximální změna výstupního signálu (napětí) za čas, která se u OZ udává v $\mathrm{V}\ [\mathrm{V/\mu s}]$.

Harmonický signál $u_o = A_m \sin(\omega t)$ vykazuje nejvyšší rychlost pro $t = 0, T/2, T, \ldots$ Tu lze vyjádřit jako $\max \left|\frac{du_o}{dt}\right| = \left.\frac{du_o}{dt}\right|_{t=0} = A_m\omega$. Vliv SR na výstupní signál OZ je ukázán na obrázku 12.20. Pokud je $\mathrm{SR} \geq \left|\frac{du_o}{dt}\right|$, tak se její vliv neuplatní ($A_m = A_1$). Pokud je však $\mathrm{SR} < A_m\omega$, rychlost změny výstupního signálu je omezena na SR a tudíž dochází k nelineárnímu zkreslení ($A_m = A_2$).

Udává se tzv. **výkonový kmitočet** ω_p, což je maximální kmitočet signálu pro danou (maximální) amplitudu A_m, kdy se ještě neuplatní SR, tj. $\mathrm{SR} = A_m\omega_p$. Pak je tento kmitočet:

$$f_p = \frac{\mathrm{SR}}{2\pi A_m} \quad [\mathrm{MHz}] \equiv \frac{[\mathrm{V/\mu s}]}{[\mathrm{V}]}. \quad (12.19)$$



Obrázek 12.20: Vliv rychlosti přeběhu na výstupní napětí OZ buzeného harmonickým signálem, viz. analýzu a komentář.

Časová odezva neinvertujícího zesilovače s uvažováním rychlosti přeběhu

Je zřejmé, že časová odezva $w(t)$, která byla řešena v sekci 12.3.3 nemusí být dána pouze dominantním pólem. Nyní do úvahy zahrneme i vliv konečné rychlosti přeběhu SR, která je menší než strmost odezvy v počátku.

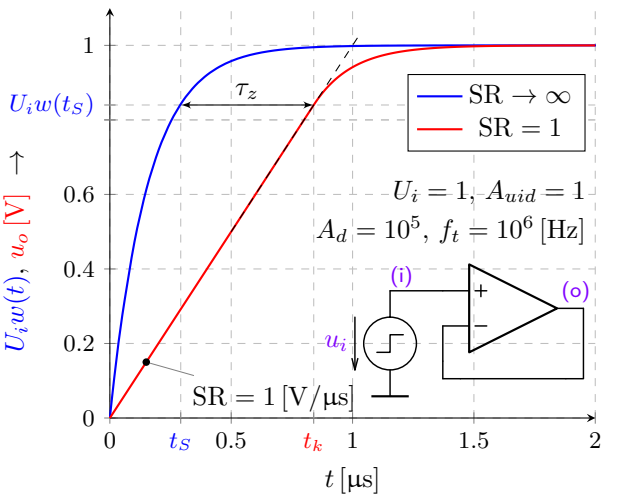
Vyjdeme ze vztahu (12.13) pro přechodovou charakteristiku $w(t)$ OZ s dominantním pólem ω_0 a vezmeme v úvahu i velikost vstupního pulzu U_i. Pak rychlost náběhu výstupního signálu $U_i w(t)$ je $v(t) = \frac{\mathrm{d}U_i w(t)}{\mathrm{d}t} = U_i \omega_t \mathrm{e}^{\omega_c t}$, která (pouze) v počátku samozřejmě není funkcí zesílení. Pokud dále vezmeme v úvahu rychlost přeběhu OZ $\mathrm{SR} < v(0)$, bude náběh výstupního napětí $u_o(t)$ dán pouze rychlostí přeběhu až do úrovně $U_i w(t_S)$, kde $\mathrm{SR} = v(t_S)$. Řešením pak dostaneme:

$$t_S = \frac{1}{\omega_c} \ln\left(\frac{U_i \omega_t}{\mathrm{SR}}\right),$$

$$u_o(t_S) = U_i w(t_S) = U_i A_{uid} - \frac{A_{uid}\mathrm{SR}}{\omega_t},$$

$$t_k = \frac{u_o(t_S)}{\mathrm{SR}} = \frac{U_i A_{uid}}{\mathrm{SR}} - \frac{A_{uid}}{\omega_t},$$

kde $\tau_z = t_k - t_S$ je zpoždění signálu $u_o(t)$ oproti $U_i w(t)$, u kterého není uvažována rychlost přeběhu.



Obrázek 12.21: Vliv SR i ω_t OZ na přechodovou charakteristiku napěťového sledovače. Viz také videoukázku.

Příklad 12.2

Zadání: Určete parametry OZ z příkladu 12.1, pokud je však zpracováván časově proměnný signál, který je před ADC vzorkován kmitočtem $f_c = 20\,\mathrm{MHz}$.

Řešení: Zadání vede jednak na požadavek na rychlost přeběhu, jednak na zesílení. Rychlost přeběhu musí být dostatečná pro změnu výstupního napětí z 0 na 3 V (nejhorší případ) za $T_{clk} = 1/f_{clk} = 50\,\mathrm{ns}$, tj.

$$\boxed{\mathrm{SR} \geq \frac{3}{T_{cclk}} = 60\,\mathrm{V/\mu s}.}$$

Vzhledem k vzorkovacímu kmitočtu $f_{clk} = 20\,\mathrm{MHz}$ lze zpracovávat signál až o kmitočtu až $f_{max} = 10\,\mathrm{MHz}$. Pro tento kmitočet (a maximální amplitudu výstupního signálu $A_m = 1{,}5\,\mathrm{V}$) lze rychlost přeběhu určit dle vztahu (12.19):

$$\mathrm{SR} = 2\pi f_{max} A_m \doteq 94\,\mathrm{V/\mu s}.$$

To je však zbytečně vysoká hodnota. Vzhledem k tomu, že vzorkujeme pouze jednou za $T_{clk} = 50\,\mathrm{ns}$ není třeba dodržet sinusový tvar signálu (je třeba správně určit vzorky signálu, nicméně z nich už nelze stanovit, zda snímaný signál je harmonický či trojúhelníkový ...).

Nakonec určíme tranzitní kmitočet OZ pro dodržení chyby zesílení zesilovače (ZV soustavy). Jak bylo uvedeno výše, je maximální kmitočet zpracovávaného signálu $f_{max} = 10\,\mathrm{MHz}$. Pokud by i pro tento kmitočet měla být dodržena chyba zesílení dle (12.7), tj. zesílení by pro $f = f_{max}$ mělo dle (12.4) být $|A_u(jf_{max})| = A'(1+\epsilon)$, kde $A_u(j\omega)$ je dáno vztahem (12.11), pak

$$A_{uid}(1+\epsilon) = \left|\frac{A_{uid}}{1+\frac{jf_{max}}{f_c}}\right| = \frac{A_{uid}}{\sqrt{1+\frac{f_{max}^2}{f_c^2}}} \Rightarrow \boxed{f_c = \frac{f_{max}}{\sqrt{\frac{1}{(1+\epsilon)^2}-1}}} \tag{12.20}$$

V uvedeném případě vychází $f_t = f_c A_{uid} > 4{,}5\,\mathrm{GHz}$, což je naprosto nesplnitelná hodnota. V praxi se však vyhýbáme extrémní případu $f_{max} = f_{clk}/2$. Např. při minimálním počtu 20 vzorků na periodu vychází $f_{max} = f_{clk}/20 = 1\,\mathrm{MHz}$. Dále většinou postačuje, aby absolutní chyba modulu přenosu pro maximální kmitočet byla $-3\,\mathrm{dB}$. Pak je $f_c = f_{max} = 1\,\mathrm{MHz}$ a $f_t = f_c A_{uid} = 10\,\mathrm{MHz}$, což už je současnou součástkovou základnou snadno splnitelné.

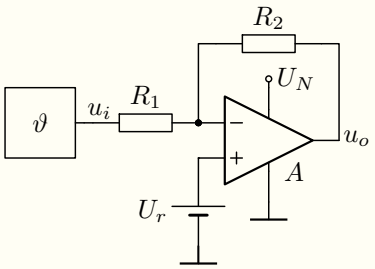
Řešení příkladů 12.1 a 12.2 by vycházelo mnohem nepříznivěji, pokud by nároky na zesilovač byly vyšší (např. pro $A' = 100$ nebo 1000, případně pro 16-bitový převodník by nároky na zesilovač byly zcela extrémní, jak se lze snadno přesvědčit).

Příklad 12.3 *Zesilovač pro teplotní senzor*

Zadání: Navrhněte zesilovač pro měření teploty pomocí teplotního senzoru s napěťovým výstupem (předpokládejte nulový vnitřní odpor čidla). Senzor vykazuje výstupní napětí $0\,\mathrm{V}$ při $0°\mathrm{C}$ s převodní konstantou $K = -2\,\mathrm{mV}/°\mathrm{C}$, linearitou $L_e = 0{,}2\,\%$ v požadovaném rozsahu měření teplot -20 až $105°\mathrm{C}$ a maximální statickou chybou $t_e = \pm 0{,}3°\mathrm{C}$. Navrhněte zesilovač s nesymetrickým napájením tak, aby byl schopen zpracovat napětí čidla v celé uvedeném teplotním rozsahu, přičemž odpovídající výstupní napětí u_o má být v rozsahu 0 až $3\,\mathrm{V}$. Dále určete minimální zesílení operačního zesilovače A_d tak, aby chyba zesílení celého zesilovače způsobila maximálně třikrát menší relativní chybu než je linearita čidla. Nakonec určete maximální napěťovou nesymetrii operačního zesilovače tak, aby se statická chyba zesilovače uplatnila 5x méně, než statická chyba vlastního čidla.

Řešení: Zesilovač budeme konstruovat jako invertující (1. bude schopen zpracovat záporné napětí i při kladném nesymetrickém napájení a 2. výstupní napětí bude přímo úměrné teplotě) s kladným referenčním napětím připojeným na neinvertující vstup a se zesílením daným rozsahem vstupního a výstupního napětí:

$$A_{uid} = \frac{\Delta u_o}{\Delta u_i} = \frac{3 - 0}{\big(105 - (-20)\big) \cdot (-2 \cdot 10^{-3})} = -12.$$



Obrázek 12.22: Zapojení zesilovače pro snímání teploty.

Pro výstupní napětí lze psát (princip superpozice):

$$u_o = u_i \left(-\frac{R_2}{R_1}\right) + U_r \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) = u_i A_{uid} + U_r(1 + |A_{uid}|)$$

Velikost referenčního napětí určíme z uvedené relace např. pro krajní hodnotu $T = 105°\text{C}$, tj. $u_o(105°) = 3\,\text{V}$ a $u_i(105°) = 105 \cdot (-2 \cdot 10^{-3}) = -0{,}21\,\text{V}$ (vzhledem k tomu, že pro $u_i(0°) = 0$) $\Rightarrow U_r \doteq 36{,}9231\,\text{mV}$.

Ve výpočtu je zanedbán vliv vnitřního odporu snímače teploty $\boxed{\vartheta}$, který uvažujeme nulový (ideální zdroj napětí), resp. zanedbatelný oproti hodnotě R_1.

Zesílení OZ lze vypočítat z relace (12.6), odkud pro zesílení platí:

$$A_d = (A_{uid} - 1)\left(1 - \frac{3}{L_e}\right) \doteq 20 \cdot 10^3.$$

Napěťovou nesymetrii pak lze určit ze vztahu (12.1), podle něhož pro výstupní napětí obou chybových složek platí:

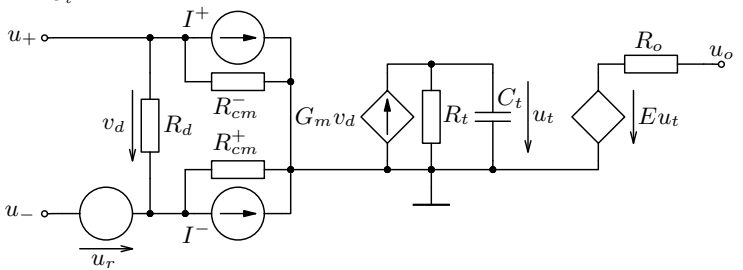
$$K\frac{|t_e|}{5}A_{uid} = |U_{os}|(1 - A_{uid}) \Rightarrow |U_{os}| = K\frac{|t_e|}{5}\frac{|A_{uid}|}{1 - A_{uid}} \doteq 0{,}11\,\mathrm{mV}$$

Diskuse výsledků:
Požadavky na OZ nejsou nikterak zásadní, lze je bez problému splnit. Navíc napěťovou nesymetrii a tím i statickou chybu snímače lze (v konkrétní realizaci) kompenzovat vhodným nastavením velikosti referenčního napětí U_r. Pokud by navíc $A_d > 200 \cdot 10^3$, pak lze jeho vliv zanedbat a vliv linearity může dále snížit nároky na napěťovou nesymetrii vzhledem k tomu, že $L_e = \frac{\text{odchylka teploty}}{\text{celkový rozsah, tj. } 125^\circ\text{C}}$.

Je však zřejmé, že OZ musí být typu „Rail-to-rail IO“ se zanedbáním saturačního napětí na výstupu (min. pro nulovou úroveň při napájení např. $U_N = 3{,}3\,\mathrm{V}$) a dále je nutné, aby referenční napětí bylo stabilní – pokud by mělo kompenzovat vliv U_{os}, neměla by být jeho absolutní chyba/změna vetší než $U_{os}/10$!

12.4. Makromodel operačního zesilovače

Jednoduchý lineární model OZ zahrnující uvedené parametry vychází ze struktury 12.4 a je na obrázku 12.23. Rozdílové zesílení lze určit jako $A_d = G_m R_t E$, přičemž se obvykle nastaví $R_t = 1\,\Omega$ a $E = 1$ a pak je A_d dáno transkonduktancí přímo G_m. Kapacitor pak slouží pro nastavení polohy dominantního pólu $\omega_0 = \frac{1}{R_t C_t}$, resp. tranzitního kmitočtu $\omega_t = \frac{G_m}{C_t}$. Zdroj u_r může zahrnovat napěťový offset U_{os} i CMRR (není rozkresleno)[3].



Obrázek 12.23: Lineární model OZ zahrnující dominantní pól přenosu.

V případě nelinearit, jako je omezení výstupního napětí, lze využít nelineárního zdroje s omezením napětí. Rychlost přeběhu je možné modelovat omezením maximálního proudu řízeného zdroje $G_m v_d$. Pro nelinearitu vstupního dílu viz např. Boyleho model [11] nebo SPICE Op Amp Macro-Models, případně dalších. Viz také dodatek D.

[3] Kmitočtovou závislost vykazuje i potlačení souhlasné složky signálu CMRR (viz. např. lineární model OZ v GEEC).

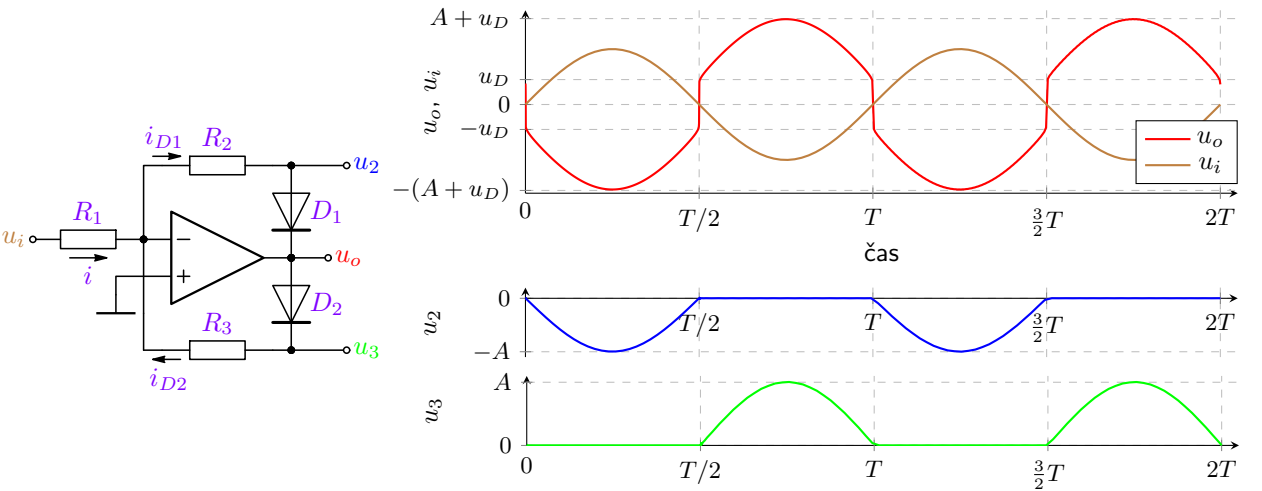
12.5. Vliv reálných vlastností OZ na nelineární zapojení

V předchozí části byl ukázán vliv základních reálných parametrů OZ na elementární lineární zapojení. V případě dalších lineárních obvodů je postup výpočtu obdobný. Čtenáři doporučuji použití simulátoru GEEC a použití lineárního modelu OZ, u něhož lze lze jednoduše aktivovat/deaktivovat jednotlivé parametry pro zjištění dominantních vlivů na chování analyzovaného zapojení. Pro zkoumání dalších vlivů jako vliv vstupních odporů a kapacit, složitější kmitočtové závislosti, a šumové vlastnosti, které nebyly vůbec zmíněny, odkážu čtenáře např. na [10].

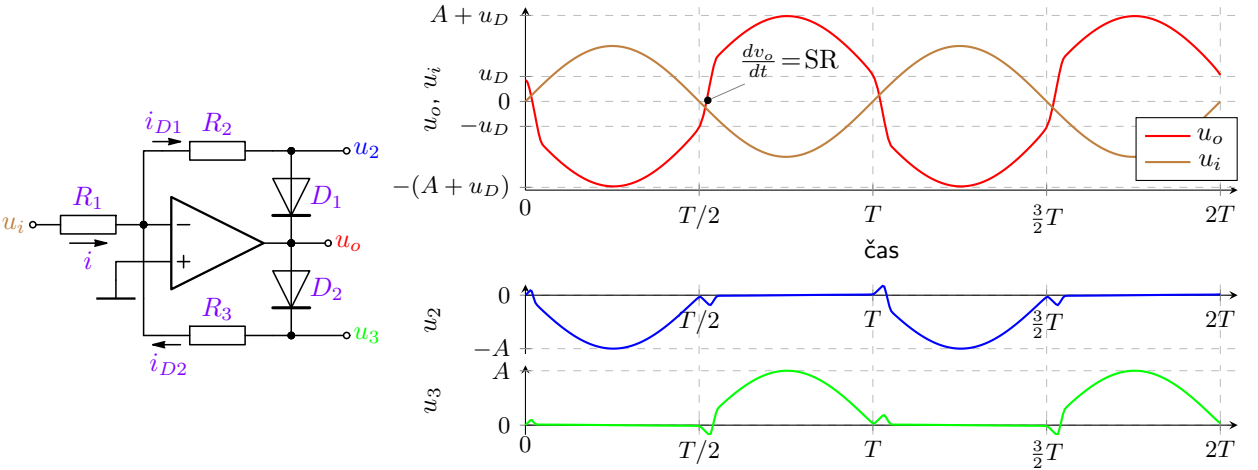
Další skupinou obvodů jsou nelineární obvody s OZ: Ty lze dělit podle typu nelinearit a u těch, kde se jedná o obvody po částech lineární jako je např. S&H, lze pro statické chyby postupně (v jednotlivých lineárních úsecích aplikovat výše uvedené metody. Jiná je však situace u dynamických vlastností, kde je situace komplikovanější, zejména v přechodech jednotlivých stavů obvodu, jak dále ukážeme.
U obvodů typu logaritmátor, exponenciátor, kde se jedná o klasický případ (spojitého) nelineárního obvodu neplatí princip superpozice a není možné vyšetřovat vliv jednotlivých parametrů odděleně – jejich působení závisí na velikosti každého z nich a samozřejmě na velikosti signálu. Tato partie opět přesahuje rámec kurzu a zájemce odkazuji na zmíněnou literaturu.

Dále je ukázán vliv dominantních reálných vlastností OZ na operační usměrňovač, který lze považovat za po částech lineární obvod (pokud budeme diody považovat za spínače s konstantním úbytkem). Pak lze vliv statických parametrů jako U_{os}, I_b a další analyzovat stejně, jako u lineárního obvodu. Budeme se proto věnovat dynamickému chování, kde se ukáže jako kritickým parametrem rychlost přeběhu. Kvantitativní vyšetřování parametrů takového obvodu je však nutné dělat numericky zvlášť pro danou míru vybuzení – *nelze hovořit o kmitočtové charakteristice obvodu, ale o kmitočtové závislosti* např. střední hodnoty výstupního napětí pro danou velikost buzení.

12.5.1. Vliv reálných vlastností OZ na operační usměrňovač



Obrázek 12.24: Časové průběhy jednotlivých napětí invertujícího usměrňovače s ideálním OZ pro $R_1 = R_2 = R_3$.



Obrázek 12.25: Časové průběhy jednotlivých napětí invertujícího usměrňovače s reálným OZ, pro $A_d = 10^5$, $f_t = 10^6\,\mathrm{Hz}$ a $\mathrm{SR} = 0{,}3\,\mathrm{V/\mu s}$, tj. hodnoty zesilovače LM741 a pro $R_1 = R_2 = R_3$.

Je zřejmý zásadní vliv rychlosti přeběhu na u_o, které „nestačí“ otevírat/zavírat diody v daných časech, což vede na dynamické chyby (pulzy) v časových průbězích výstupních napětí u_2 a u_3. Vliv f_t je patrný pouze v hladkosti křivky u_o, viz analýzu, její videoukázku a případně i dodatek F.

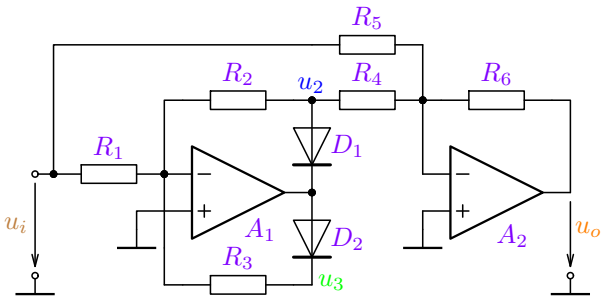
Známým řešením (přidáním invertujícího sumátoru) dostáváme dvoucestný usměrňovač pro

$$R_1 = R_2,\ R_5 = 2R_4\,(= R_6) \quad \text{pak} \quad u_o = -(u_i + 2u_2).$$

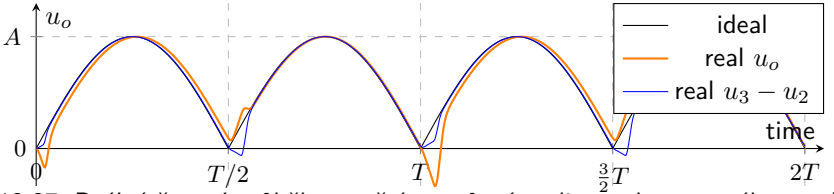
Nevýhodou je sčítání ideální (vstupní) půlvlny s neideálním a **fázově posunutým** průběhem (u_2). Další možností je využití rozdílového (přístrojového, kdy $i_i \to 0$!) zesilovače a absolutní hodnotu realizovat jako

$$u_3 - u_2 = \frac{R_2}{R_1}|u_i| \quad \text{pro} \quad R_2 = R_3,$$

kdy se sčítají obě půlvlny vždy s nulovým potenciálem, viz výsledky na obrázku 12.27 a také analýzu.

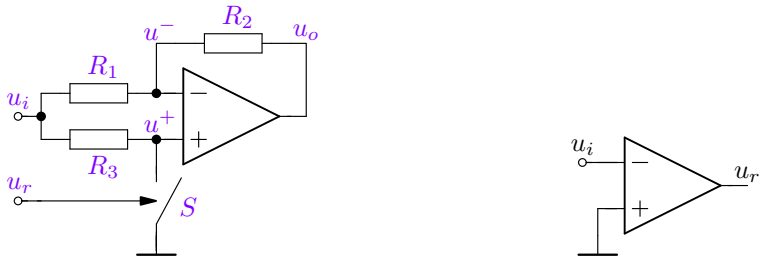


Obrázek 12.26: Realizace dvoucestného usměrňovače pomocí invertujícího sumátoru.



Obrázek 12.27: Reálné časové průběhy napětí pro různé realizace dvoucestného usměrňovače.

Další možností realizace zesilovače absolutní hodnoty je použití jednoduchého po částech spojitého obvodu s řízeným elektronickým spínačem. Minimalizují se tím chyby OZ, nicméně realizace přesného komparátoru zejména pro nízká napětí není elementární záležitostí. Funkce je evidentní z níže uvedeného popisu a analýzy.



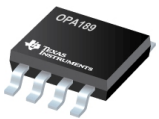
(a) (b)

Obrázek 12.28: Realizace dvoucestného usměrňovače pomocí operační sítě s řízeným spínačem (a), komparátor pro řízení spínače (b).

pro S rozepnutý: $u_i = u^+ = u^- = u_0 \quad \Rightarrow \quad \text{zisk} = 1,$
pro S sepnutý: $u^+ = 0 = u^- \ \rightarrow \ u_0 = -u_i \quad \Rightarrow \quad \text{zisk} = -1$

Pokud je S řízen logickou úrovní podle polarity vstupního signálu a je např. rozepnut pro kladnou půlvlnu a sepnut pro zápornou půlvlnu funguje celé zapojení jako „neinvertující“ dvoucestný usměrňovač. Viz videoukázku analýzy.

12.6. Příklady vyráběných OZ a jejich parametry



OPA189 – Low-noise, Zero-Drift, RRO, CMOS Precision Operational Amplifier:

- Ultra-Low Offset Voltage: 3 μV (Maximum)
- Zero-Drift: 0.005 μV/°C
- Input Bias Current: 300 pA (Max)
- CMRR: 168 dB
- Open-Loop Gain: 170 dB
- Low Noise: 5.2 nV/$\sqrt{\text{Hz}}$ at 1 kHz
  0.1 Hz to 10 Hz Noise: 0.1 μV_{pp}
- Gain Bandwidth: 14 MHz
- Slew Rate: 20 V/μs
- Supply Range: 4.5 V to 36 V
- Quiescent Current: 1.7 mA (Maximum)
- Rail-to-Rail Output
- Input Includes Negative Rail
- see datasheet

LT1028 – Ultra Low Noise Precision High Speed Op Amps:

- Offset Voltage: 40 μV (Maximum)
- Zero-Drift: 0.8 μV/°C
- Input Bias Current: 300 nA (Max)
- CMRR: 120 dB
- Open-Loop Gain: 7 Million (Min.)
- Ultra Low Noise: 0.85 nV/$\sqrt{\text{Hz}}$ at 1 kHz (Typ.)
  0.1 Hz to 10 Hz Noise: 35 nV_{pp}
- Gain Bandwidth: 50 MHz
- Slew Rate: 11 V/μs
- Supply Range: ±22 V
- Quiescent Current: 10 mA (Maximum)
- see datasheet

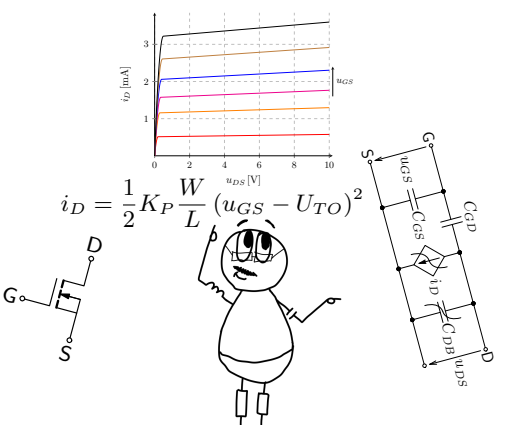
OPA2x11 – Low Noise, Low Power, Precision OA (THD+N:–136 dB$|_{G=1,\ f=1\,\text{kHz}}$)
LTC2050 – Zero-Drift Operational Amplifiers,
ADA4528-1 – Precision, Ultralow Noise, RRIO, Zero-Drift Single Op Amp,
AD8000 1.5 GHz, LTC6400 1,9 GHz Ultrahigh Speed Op Amp,
OP1177, AD8605, LME49720 → OPA1611, OPAx891, . . . , AD620, . . . , OPA1632, . . .
see Linear Technology, Analog Devices, Texas Instruments . . .

Poznámky XII

Kapitola 13

Základní elektronické prvky a jejich modely

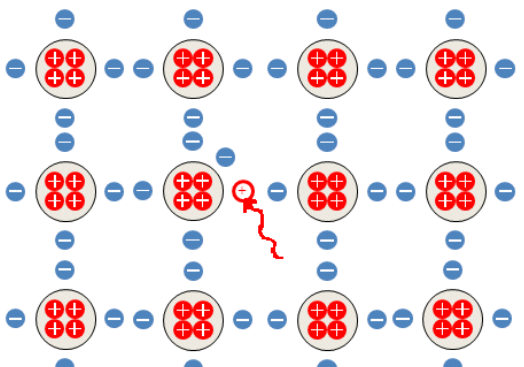
Tato kapitola ukazuje principy a vlastnosti základních polovodičových prvků elektronických obvodů, tj. diodu, bipolární a unipolární tranzistory. Uživatel se seznámí s matematickým popisem těchto prvků a charakteristikami uvedených prvků, včetně jejich obvodových modelů, které se pak používají při analýze i v simulačních programech. Jedná se o prvotní, stručné seznámení s touto problematikou, přičemž důraz je kladen na výsledný popis, který je nutný pro řešení obvodů s těmito prvky. Podrobnější popis fyzikální podstaty prvků a odvození uvedených vztahů přesahuje rámec tohoto materiálu a je uveden v citované literatuře.



13.1. Polovodič

13.1.1. Vlastní (intrinzický) polovodič

Polovodičový materiál lze vytvořit na různých materiálech, nejčastěji však na prvcích 4. skupiny periodické tabulky.

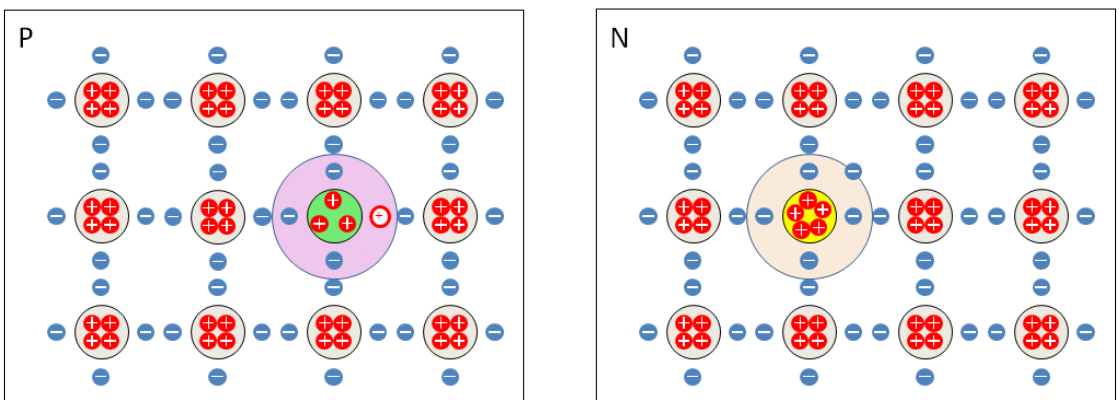


Obrázek 13.1: 2-D znázornění krystalové mřížky křemíku, (obrázek převzat z old.spsemoh.cz).

Nejčastěji je základním prvkem pro výrobu elektronických součástek křemík, který má ve valenční (poslední) vrstvě čtyři elektrony. Tyto elektrony vytvářejí vazby mezi atomy v krystalové mříži, viz ilustrativní obrázek 13.1. Takový ideálně krystalický materiál prakticky nevede el. proud – nemá volné nosiče náboje (elektrony). Elektron však může být snadno vytržen z krystalové mřížky takovéhoto čistého polovodiče (vlastního – bez příměsí) zahřátím či ozářením materiálu fotony a pod., jak ukazuje šipka v obrázku. Pak vede elektrický proud a používá se např. ve snímačích teploty, detektorů světla a pod.

13.1.2. Nevlastní polovodič

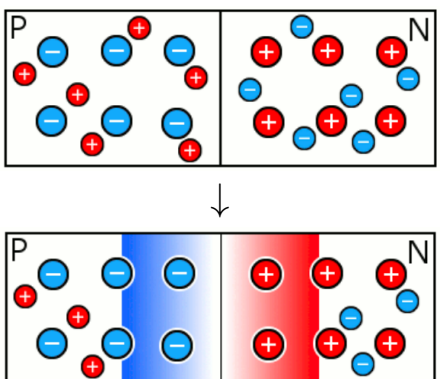
Zvýšení vodivosti lze uskutečnit pomocí nevlastní vodivosti tím, že do krystalové mřížky křemíku přidáme buď prvek 3. nebo 5. skupiny, tj. často (Indium nebo Arsen). Tím ve struktuře bude buď chybět nebo přebývat elektron od každého atomu. To se projeví jako volný nosič náboje (díra nebo elektron), který bude majoritním nosičem. Dle typu příměsi rozeznáváme polovodič typu P (majoritními nosiči náboje jsou díry) a N (majoritními nosiči jsou elektrony), jak je ilustrováno na následujících obrázcích.



Obrázek 13.2: 2-D znázornění krystalové mřížky polovodiče typu P a N, (obrázky převzaty z old.spsemoh.cz).

13.2. Vytvoření PN přechodu

Velké možnosti nabízí přechod jednoho a druhého typu polovodiče – technologicky vytvořený **PN přechod**.



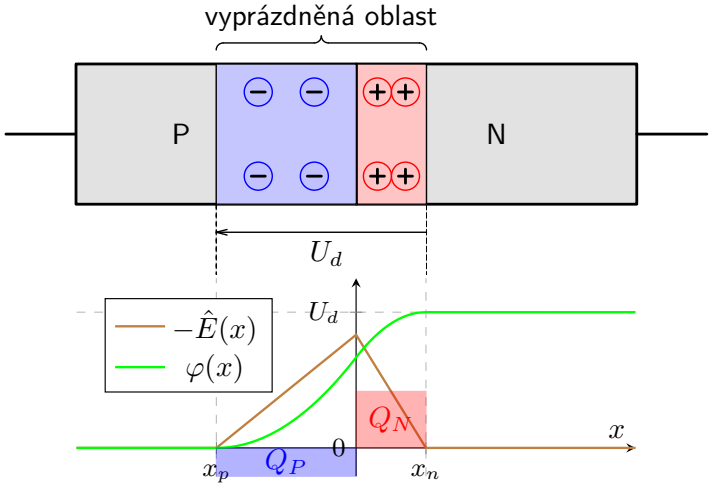
Obrázek 13.3: 2-D znázornění krystalové mřížky PN přechodu, (obrázky převzaty z old.spsemoh.cz).

V přechodu dojde ihned při jeho vzniku k přemístění volných nosičů náboje, tj. v jeho struktuře nebude rozložení nábojů odpovídat předchozím obrázkům – zde případu (a). V takovém případě by byl náboj v každé oblasti vyrovnaný (pokud měl dotovaný prvek o elektron méně, měl i o jeden proton méně a opačně). Volné nosiče náboje (v P polovodiči díry, v N elektrony) se díky opačnému náboji přitahují a elektrony z oblasti N přecházejí do oblasti P, kde **„rekombinují“** s volnými děrami a tím se **mění rozložení náboje v oblasti přechodu** – v každé oblasti zůstávají z dotovaných prvků ionty, jelikož jim chybí jeden elektron či naopak je ve struktuře navíc (rekombinoval s dírou). V oblasti přechodu zůstane tzv. **vyprázdněná oblast** (depletiční) – chybí v něm volné nosiče náboje, jak ukazuje obrázek (b).

13.3. Rozložení náboje v PN přechodu

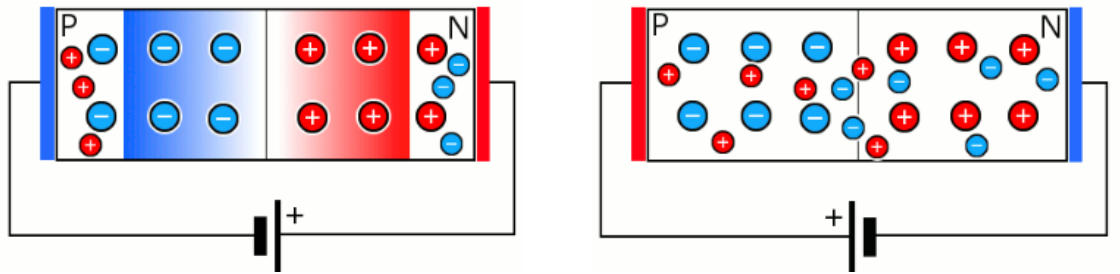
Situaci z předchozí ilustrace lze znázornit následujícím grafem: v oblasti P je kolem v blízkosti přechodu rozložen záporný náboj[a] (ionty v krystalové mříži) s celkovou velikostí Q_P do vzdálenosti x_p od přechodu, v oblasti N je podobně rozložen náboj s $Q_N = Q_P$ do vzdálenosti x_p, přičemž je např. $x_p = 2x_n$, pak je koncentrace příměsi v oblasti N $2\times$ vyšší. Vlivem tohoto náboje vzniká v okolí přechodu elektrické pole, jehož intenzita $\hat{E}$ bude mít lineární průběh (v grafu na pbrázku 13.4 vyneseno $-\hat{E}$) v závislosti na souřadnici. Pak průběh elektrického potenciálu φ v okolí přechodu ukazuje, že na vyprázdněné oblasti vznikne tzv. **difuzní napětí** U_d, které zabraňuje dalším rekombinacím (odpuzuje zbylé volné elektrony a díry).

[a] předpokládejme rovnoměrně



Obrázek 13.4: Ilustrativní 2-D znázornění rozložení náboje PN přechodu a odpovídající rozložení náboje, intenzity elektrického pole a potenciálu přechodu.

13.4. PN přechod s vnější polarizací



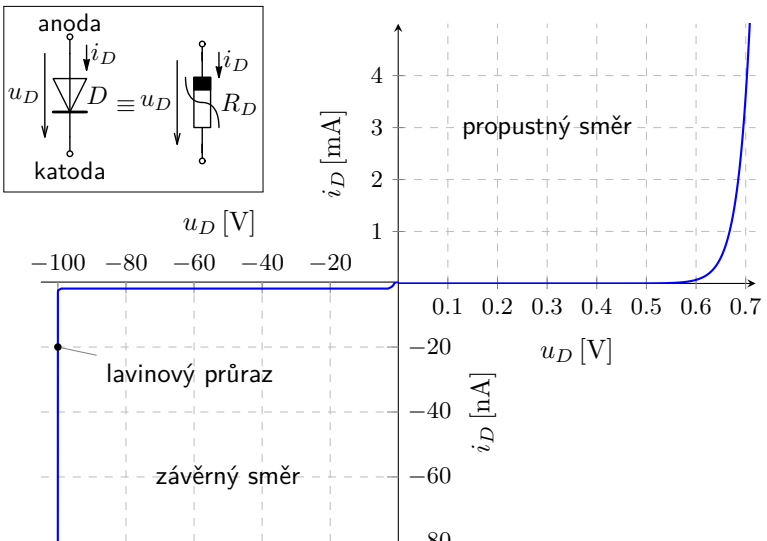
(a) (b)

Obrázek 13.5: 2-D znázornění krystalové mřížky křemíku, (obrázky převzaty z old.spsemoh.cz).

Pokud na nakontaktovaný PN přechod připojíme vnější napětí ve stejné orientaci jako difuzní napětí, tj. záporný pól zdroje na P a kladný pól na N, dojde k dalšímu rozšíření vyprázdněné vrstvy – volné nosiče jsou z oblastí přitahovány k připojovacím kontaktům, jak ukazuje obrázek (a). Proud struktura v tomto případě nepovede.

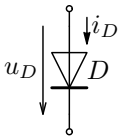
Při opačné polaritě jsou volné nosiče od kontaktů naopak odpuzovány a tím se zmenšuje vyprázdněná vrstva. V případě dostatečného vnějšího napětí (pro křemík cca $0{,}6\,\mathrm{V}$) vyprázdněná vrstva prakticky zmizí, celá struktura je zaplavena volnými nosiči náboje a prochází jí elektrický proud, viz. obrázek (b). Viz také video.

13.5. Polovodičová dioda



Dioda je jedna ze základních elektronických součástek. Polovodičová dioda je tvořena přechodem PN. Obě oblasti jsou opatřeny elektrodami nazývanými anoda a katoda, přičemž anoda je zapojena na oblast typu P a katoda na oblast N. Pokud budeme polarizovat diodu v propustném směr, tj. dle obrázku 13.5 (b), dioda (Si) se otevře asi při 0,6 V a proud v zásislosti na u_D strmě narůstá. Pokud budeme polarizovat diodu naopak ve směru závěrném, tj. dle obrázku 13.5 (a), pak je dioda uzavřena a protéká jí velmi malý prakticky konstantní zbytkový proud (10^0 nA pro Si). Pro vysoké závěrné napětí se však dioda prorazí. Více viz přednáška.

Obrázek 13.6: Schématická značka a voltampérová charakteristika diody.

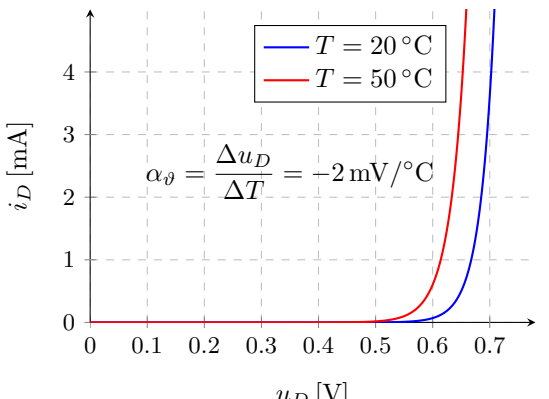


Vztah mezi proudem diody a napětím na diodě lze analyticky odvodit a vyjádřit následovně:

$$i_D = I_S\left(e^{\frac{u_D}{NU_T}} - 1\right), \quad \frac{1}{NU_T} = \frac{q}{NkT} \approx 38\,\mathrm{V}^{-1} \quad \text{pro Si diodu při pokojové teplotě,} \qquad (13.1)$$

kde I_s je tzv. saturační proud (cca 10^{-15} až 10^{-10} A),
q náboj elektronu ($1{,}6\cdot10^{-19}$ C),
T teplota v [K],
k Boltzmannova konstanta ($1{,}38\cdot10^{-23}\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$) a
$N \in \langle 1{,}2\rangle$ je emisní koeficient.

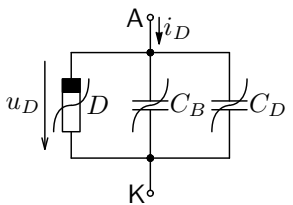
Saturační proud I_S udává proud diodou v závěrném směru, který je přímo úměrný ploše přechodu. Reálné diody (zapouzdřené součástky) vykazují proudové svody, které nejsou oproti proudu I_S nezanedbatelné a podílejí se tak na celkovém závěrném proudu diodou, který je obvykle v řádu 10^{-9} A. Mimo uvedené teplotní závislosti napětí U_T je teplotou výrazně ovlivňována i velikost saturačního proudu I_S, který je mimo jiné úměrný *třetí mocnině* absolutní teploty, viz. např. [7]. Výrazná závislost VA charakteristiky diody (obrázek 13.7) se někdy využívá pro měření teploty. (teplotní koeficient α_ϑ je v širokém rozsahu teplot lineární).



Obrázek 13.7: Teplotní závislost voltampérové (VA) charakteristiky, viz také videoukázku.

13.5.1. Obvodový model diody

Aby bylo možné se součástkou pracovat např. v simulačním programu, je nutné pro ni na základě matematického popisu vytvořit model. Základní model diody popisující dominantní vlastnosti (mimo průrazů, dynamických vlastností, ...) je velmi jednoduchý – jedná se o nelineární rezistor dle 13.6 popsaný vztahem (13.1). Pokud by měl model postihovat i základní dynamické chování, je třeba ho doplnit akumulačními prvky – v tomto případě tzv. bariérovou kapacitou C_B, která odpovídá kapacitě vyprázdněné oblasti PN přechodu v závěrném směru a tzv. difuzní kapacitou C_D, která odpovídá kapacitě zaplaveného PN přechodu pro propustný směr, viz obrázek 13.8 a vztahy 13.2 a 13.3, více viz. přednáška.



$$C_B = \frac{C_{JO}}{\left(1 + \frac{|u_D|}{U_J}\right)^m}, \qquad u_D < 0, \tag{13.2}$$

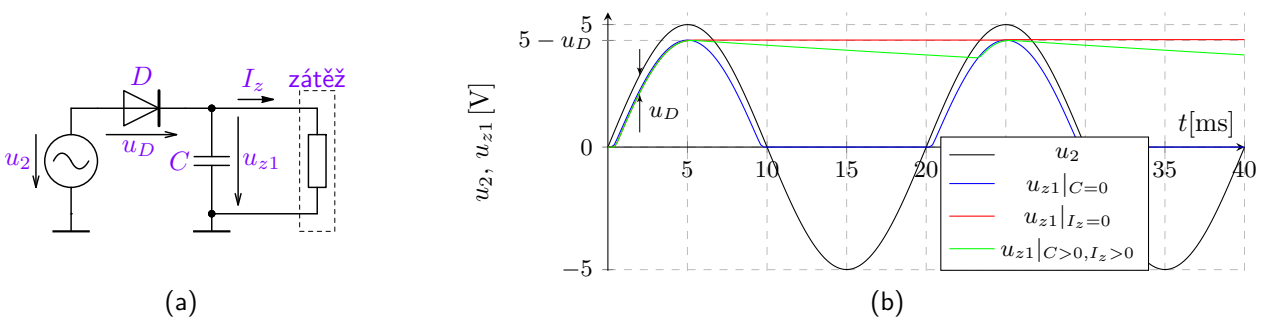
$$C_D = \frac{\tau_T}{N U_T} i_D, \qquad i_D > 0, \tag{13.3}$$

Obrázek 13.8: Nelineární model diody s akumulačními prvky.

kde C_{JO} je kapacita přechodu při nulovém napětí u_D,
U_J je tzv. difuzní potenciál (pro křemík $U_J \in \langle 0{,}6, 0{,}8 \rangle$ V)
$m \in \langle 1/3, 1/2 \rangle$ je koeficient závislý na koncentracích dotování obou polovodičů a
τ_T je efektivní doba života menšinových nosičů náboje (průměrná průletová doba), viz. [7].

13.5.2. Základní použití diody jako spínače

Nejčastější použití diody je ve funkci spínače. Zjednodušeně řečeno, dioda spojí dva uzly obvodu v případě, že uzlové napětí kde je připojena anoda je cca o $0{,}6\,\mathrm{V}$ větší než uzlové napětí, kde je připojena katoda. Nejedná se o dokonalé spojení, ale mezi uzly je udržováno napětí $0{,}6$ až $0{,}8\,\mathrm{V}$ v závislosti na procházejícím proudu. V ostatních případech diodou neprochází proud (je uzavřena). Jedná se tedy o spínač řízený napětím na sobě samém.
Toho se využívá u usměrňovačů – obvodů, které propouštějí jen jednosměrný (kladný nebo záporný) signál, viz obrázek 13.9. Vstupní napětí u_2 je harmonického průběhu, výstupní napětí je pouze kladné a časový průběh závisí na zátěži. Pokud není připojen kapacitor, je výstupní průběh v případě kladné půlvlny zmenšen o $u_D \approx 0{,}7\,\mathrm{V}$ oproti průběhu vstupnímu. V případě záporné půlvlny je výstupní napětí nulové nebo je „drženo“ kapacitorem – I_z teče pouze z kapacitoru (dioda je uzavřena). Více, viz přednáška včetně videoukázky analýzy a experimentu.

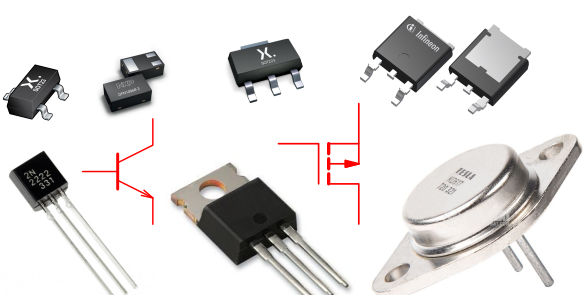


Obrázek 13.9: Zapojení jednocestného usměrňovače (a) a odpovídající časové průběhy napětí (b).

13.6. Tranzistory

Vynález tranzistoru – polovodičového prvku řízeného externím napětím/proudem je zcela průlomový pro další vývoj elektroniky a integrovaných obvodů. Vyrábí se jednak jako diskrétní součástka v různých pouzdrech (viz níže), jednak je používán jako základní součást **všech** integrovaných obvodů. Dnešní procesor v PC jich obsahují miliardy!

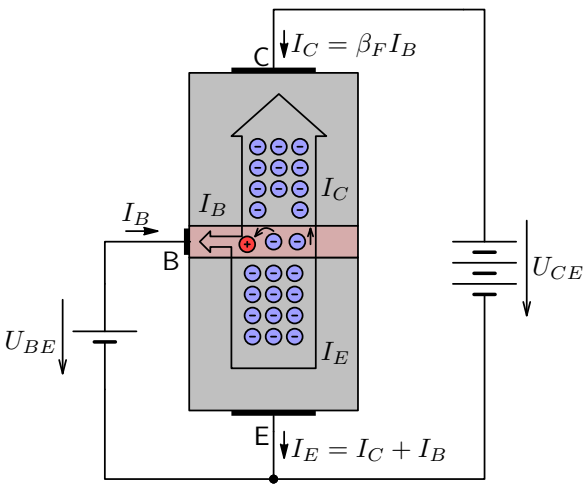
Rozlišujeme dva základní typy tranzistorů: „bipolární“ a dnes nejčastěji používaný „unipolární“ tranzistor.





Obrázek 13.10: Replika prvního tranzistoru vynalezeného r. 1947 Johnem Bardeenem, Walterem Brattainem a Williamem Shockleyem v laboratořích společnosti Bell, USA (b), (obrázek převzat z www.gettyimages.co.uk).

13.6.1. Struktura bipolárního tranzistoru a jeho princip

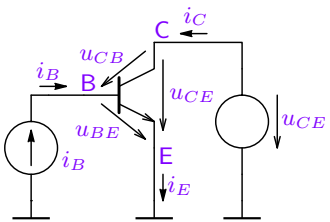


Obrázek 13.11: Struktura bipolárního tranzistoru NPN a jeho pólování v aktivním režimu.

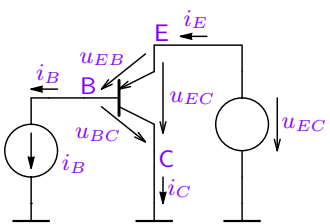
Bipolární tranzistor (BJT – bipolar junction transistor) je tvořen dvěma PN přechody – emitorovým a kolektorovým dle názvů elektrod (kolektor C, emitor E a prostřední báze B). Pokud otevřeme emitorový přechod (připojením kladného napětí cca $0{,}6\,\mathrm{V}$ na bázi vůči emitoru) budou elektrony z emitorové oblasti přecházet do oblasti báze a zde rekombinovat s děrami a tím vytvářet uzavírat proud stejně jako u diody. Pokud však zároveň připojíme na kolektor větší napětí než na bázi (kolektorový přechod polarizujeme v závěrném směru) bude většina elektronů, které jsou v oblasti báze minoritními nosiči náboje přecházet do kolektorové oblasti (kolektorový přechod je pro ně otevřen), do které jsou navíc přitahovány kladným napětím U_{CE}. Podíl proudů $I_C/I_B = \beta_F$ nazýváme proudovým zesilovacím činitelem, který málo závisí na velikosti obvodových veličin a je dán zejména konstrukcí tranzistoru. Pokud bude oblast báze málo dotovaná (malá koncentrace děr) a tenká bude minimum elektronů rekombinovat v bázi a proudovým zesilovacím činitelem bude tím větší ($\beta_F \approx 100 \div 400$). Viz také video. Tuto činnost dobře ilustrují VA charakteristiky tranzistoru na obrázku 13.12 (b).

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

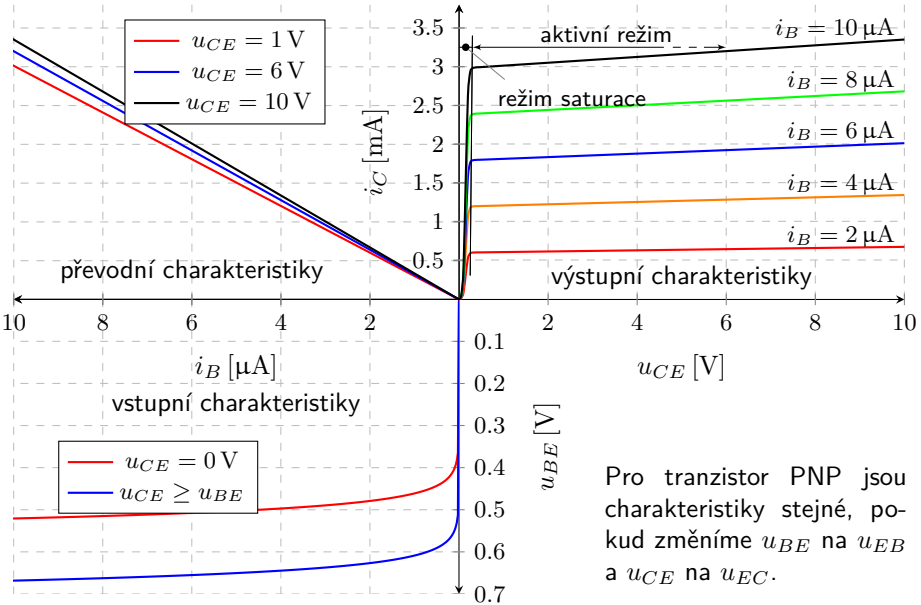
Schématické značky a polarizace (označení kladných směrů obvodových veličin) pro tranzistor NPN:



a tranzistor PNP:



(a)



(b)

Pro tranzistor PNP jsou charakteristiky stejné, pokud změníme u_{BE} na u_{EB} a u_{CE} na u_{EC}.

Obrázek 13.12: „Kladná“ polarizace tranzistoru NPN a PNP (a) a charakteristiky NPN tranzistoru (b).

13.6.2. Obvodové modely bipolárního tranzistoru

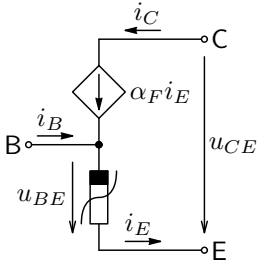
Bázový přechod se chová jako dioda (vstupní charakteristika – 3. kvadrant) a kolektorový proud je násobek bázového proudu a je prakticky nezávislý na napětí kolektoru (převodní a výstupní charakteristika – 2. a 1. kvadrant). Podobně jako NPN lze charakterizovat i PNP tranzistor (místo elektronů budou díry a naopak a kladné směry obvodových veličin se změní dle obrázku 13.12 (a). Více viz linky na analýzy a přednášku. Výše popsaná činnost bipolárního tranzistoru a zejména vztah $i_C/i_B = \beta_F$ platí pouze v **aktivním režimu, tj. kolektorový přechod je polarizován v závěrném a emitorový v propustném směru, tj.** $u_{BE} > 0{,}5\,\mathrm{V}$ **a cca** $u_{CB} > -0{,}4\,\mathrm{V}$**, resp.** $u_{CE} > 0{,}3\,\mathrm{V}$ **pro NPN tranzistor**. Pak lze tranzistor modelovat jednoduše s využitím nelineárního rezistoru jako diody a řízeného zdroje proudu, viz obrázek 13.13. Řídící konstanta zdroje udává poměr $\alpha_F = i_C/i_E$.



(a) model NPN (b) model PNP

Obrázek 13.13: Ebers-Mollův nelineární statický tzv. T model bipolárního tranzistoru pro aktivní režim.

Obvodové veličiny Ebers-Mollova modelu **pro aktivní režim** lze na základě popisu diody vyjádřit níže uvedenými vztahy:



$$i_C = I_S \left(e^{\frac{u_{BE}}{N_F U_T}} - 1 \right), \tag{13.4}$$

$$i_E = \frac{i_C}{\alpha_F} = \frac{I_S}{\alpha_F} \left(e^{\frac{u_{BE}}{N_F U_T}} - 1 \right), \tag{13.5}$$

$$i_B = i_E - i_C = \left(\frac{1}{\alpha_F} - 1 \right) i_C = \frac{i_C}{\beta_F} = \frac{I_S}{\beta_F} \left(e^{\frac{u_{BE}}{N_F U_T}} - 1 \right), \tag{13.6}$$

kde I_S/α_F je zpětný saturační proud emitorového přechodu (cca 10^{-12} až 10^{-15} A) ,
N_F je emisní koeficient pro aktivní režim (forward) α_F je proudový zesilovací činitel nakrátko pro zapojení se společnou bází opět v aktivním režimu.

Činitel $\frac{1}{\alpha_F} - 1 = \frac{1}{\beta_F}$ je převrácená hodnota proudového zesilovacího činitele β_F pro zapojení se společným emitorem.

$$i_C = \beta_F i_B, \quad \text{přičemž evidentně platí:} \tag{13.7}$$

$$\beta_F = \frac{i_C}{i_B} = \frac{\alpha_F}{1 - \alpha_F}, \quad \text{resp.} \quad \alpha_F = \frac{i_C}{i_E} = \frac{\beta_F}{1 + \beta_F}, \quad \text{vše pro: } u_{CE} > 0{,}3\,\text{V},\ u_{BE} > 0{,}5\,\text{V}. \tag{13.8}$$

Poznámka: Pro standardní nízkovýkonové typy bipolárních tranzistorů bývá činitel β_F v rozsahu 100 až 400, tj. α_F v rozsahu 0,99 až 0,997, pro výkonové typy mívá činitel β_F velikost cca 30 až 70.

Rovnice (13.4) až (13.6) popisovaly vztahy mezi obvodovými veličinami NPN tranzistoru. Relace pro tranzistor PNP budou stejné, je však nutné vzít v úvahu opačnou polarizaci mezielektrodových napětí dle obrázku 13.12 (a). Pak např. rovnice (13.4) přejde na tvar (13.9) a podobně se upraví i zbývající relace.

$$i_C = I_S \left(e^{\frac{u_{EB}}{N_F U_T}} - 1 \right), \quad \text{pro: } u_{EC} > 0{,}3\,\mathrm{V},\ u_{EB} > 0{,}5\,\mathrm{V}. \tag{13.9}$$

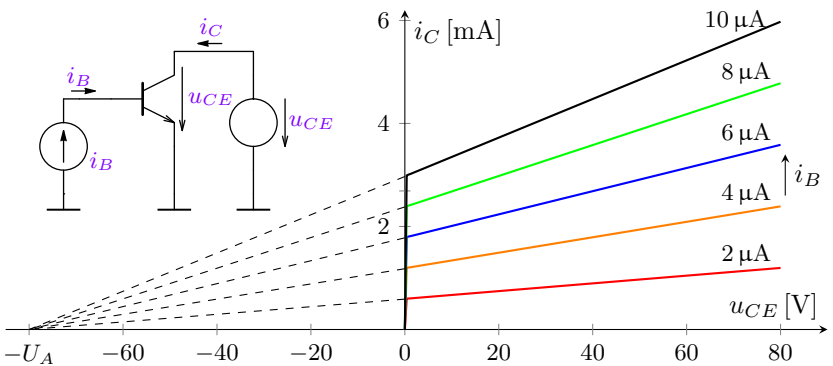
Bipolární tranzistor lze modelovat i pro případ, kde přechod B-E budeme modelovat v oblasti báze. Tou teče proud i_B při stejném napětí u_{BE} a pro oba typy tranzistorů dostaneme modely, které jsou uvedeny na obrázku 13.14. U odporového modelu diody (nelineárního rezistoru) je v závorce uveden i odpovídající saturační proud, podle vztahu (13.6).



(a) model NPN (b) model PNP

Obrázek 13.14: Tzv. Π nelineární statický model bipolárního tranzistoru pro aktivní režim.

V některých případech je třeba modelovat i sklon výstupních charakteristik tranzistoru, který je demonstrován na obrázku 13.15 pro velká napětí u_{CE}. Tranzistor se nechová jako ideální proudový zdroj. Jev, který to způsobuje se nazývá Earlyho a napětí, kde se protne prodloužení výstupních charakteristik Earlyho napětí $U_A > 0$.



Obrázek 13.15: Demonstrace Earlyho jevu u bipolárního tranzistoru.

Pro matematický popis vyjdeme ze vztahu (13.4), resp. (13.9) který lze upravit na tvar (13.10), který popisuje i tuto závislost pro NPN tranzistor, resp. (13.11) pro PNP tranzistor.

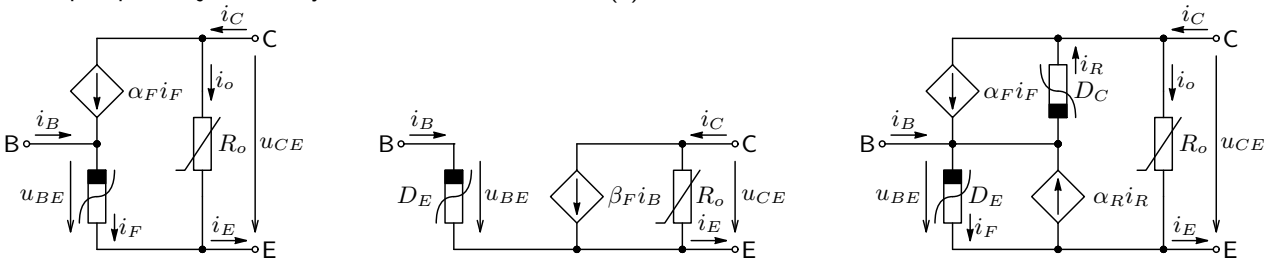
$$i_C = I_s \left(e^{\frac{u_{BE}}{n_F U_T}} - 1 \right) \left(1 + \frac{u_{CE}}{U_A} \right) \tag{13.10}$$

$$i_C = I_s \left(e^{\frac{u_{EB}}{n_F U_T}} - 1 \right) \left(1 + \frac{u_{EC}}{U_A} \right) \tag{13.11}$$

Je zřejmé, že pro $u_{CE} = U_A$ se proud i_C zdvojnásobí, oproti počátku ($u_{CE} \approx 0{,}3\,\mathrm{V}$).

Adekvátně lze upravit i model tranzistoru, jak je uvedeno na obrázku 13.16 (a) a (b). Tyto modely obsahují navíc výstupní rezistor $R_o = \frac{U_A}{I_s\left(e^{\frac{u_{BE}}{n_F U_T}} - 1\right)}$, který je řízen napětím u_{BE}, resp. proudem i_C.

Doposud jsme předpokládali, že tranzistor je polarizován v aktivním (forward) režimu, tj, přechod B-E je polarizován v propustném a přechod B-C v závěrném směru. Proto jsme proudové zesilovací činitele označili indexem F. Pokud však zaměníme elektrody kolektoru a emitoru a tranzistor bude provozován v tzv. reverzním režimu, tranzistorový jev se při funkci takto polarizovaného tranzistoru uplatní také, nicméně celkové chování nebude identické ($\alpha_R < \alpha_F$). Je to dáno vlastní technologií výroby a zejména konstrukcí tranzistoru, která není ve skutečnosti symetrická. Toto pak postihuje rozšířený model na obrázku 13.16 (c).

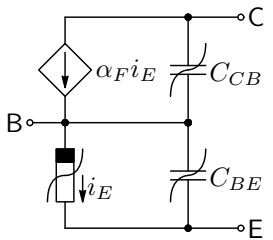


(a) T-model (b) Π-model (c) rozšířený T-model

Obrázek 13.16: Nelineární statické modely bipolárního NPN tranzistoru s uvažováním výstupního odporu R_o.

Dynamický model bipolárního tranzistoru pro v aktivní režim

Stejně jako v případě diody, i v případě bipolárního tranzistoru je pro dynamické chování obohatit model o akumulační prvky, které budou modelovat chování tranzistoru pro v čase proměnné signály. Vzhledem k tomu, že tranzistor obsahuje dva PN přechody, ale využít dynamického modelu diody a do základního modelu tranzistoru pro aktivní režim přidat bariérovou kapacitu C_{CB} modelující chování kolektorového přechodu a difuzní kapacitu C_{BE} pro přechod emitorový. Vztahy pro hodnoty kapacit odpovídají vztahům 13.2 a 13.3 s příslušnými obvodovými veličinami (u_{CB} a i_E).

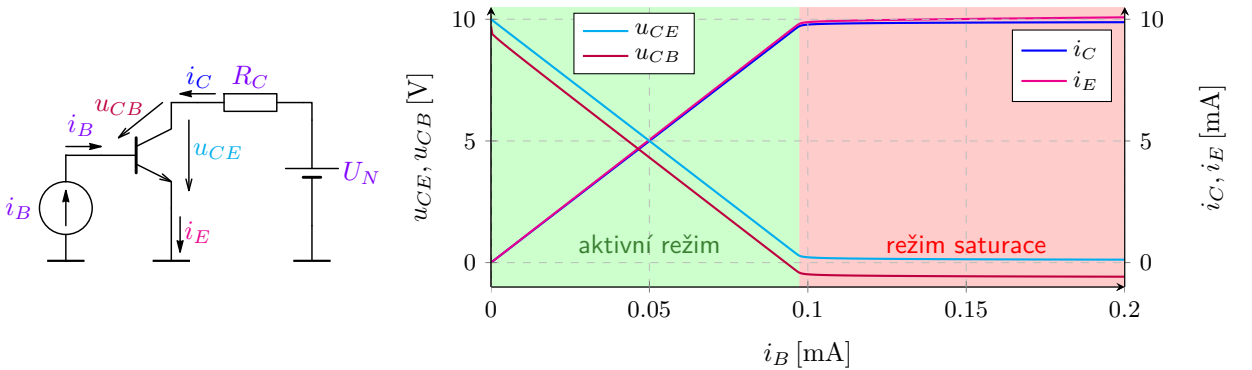


Obrázek 13.17: Základní nelineární model bipolárního NPN tranzistoru s akumulačními prvky pro aktivní režim.

V simulačních programech je nutné podchytit většinu (i parazitních) vlastností prvku. Pro bipolární tranzistor se používá tzv. Gummel-Poonův model, který částečně vychází z rozšířeného Ebers-Mollova modelu. Takový model je pak podstatně složitější včetně vztahů popisujících jednotlivé nelineární prvky.

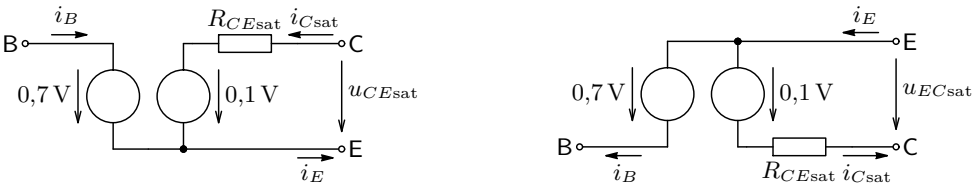
Chování bipolárního tranzistoru v saturačním režimu (ve funkci spínače) a jeho model

Pokud budeme v zapojení na obrázku níže (NPN tranzistor) zvyšovat proud i_B (emitorový přechod je otevřen), bude se zpočátku zvyšovat i kolektorový proud dle $i_C = \beta_F i_B$, jelikož kolektorový přechod je uzavřen ($u_{CB} > -0{,}4\,\mathrm{V}$) a tranzistor pracuje v aktivním režimu. Zároveň se bude snižovat napětí u_{CE} díky zvětšujícímu se úbytku na R_C: $u_{CE} = U_N - R_C i_C$. Pokud však proud vzroste natolik, že $u_{CE} < 0{,}3\,\mathrm{V}$ začne se otevírat i kolektorový přechod přechod ($u_{CB} = u_{CE} - u_{BE} \approx 0{,}3 - 0{,}7 = -0{,}4\,\mathrm{V}$) a tranzistor přechází z aktivního režimu do režimu saturačního, kdy je proud kolektoru saturovaný vnějším obvodem (U_N/R_C) a $i_C < \beta_F i_B$! Viz také obrázek 13.12 (b).



Obrázek 13.18: Zapojení tranzistoru pro dosažení režimu saturace a odpovídající závislosti obvodových veličin na velikosti buzení i_B.

Z grafu na obrázku 13.18 je zřejmé, jak lze jednoduše modelovat kolektorový obvod tranzistoru v saturaci. Napětí u_{CE} je téměř konstantní ($\approx 0{,}1$ až $0{,}2\,\mathrm{V}$) a nepatrně se zmenšuje s rostoucím proudem i_B, tj. $R_{CE\mathrm{sat}}$ lze v většinou zanedbat[1]. Pro PNP tranzistor platí výše uvedené samozřejmě také s tím rozdílem, že uvedené veličiny mají opačné znaménko (aktivní režim PNP tranzistoru platí pro $u_{CE} < -0{,}3\,\mathrm{V}$, $u_{BE} < -0{,}5\,\mathrm{V}$, resp. $u_{EC} < 0{,}3\,\mathrm{V}$, $u_{EB} < 0{,}5\,\mathrm{V}$).



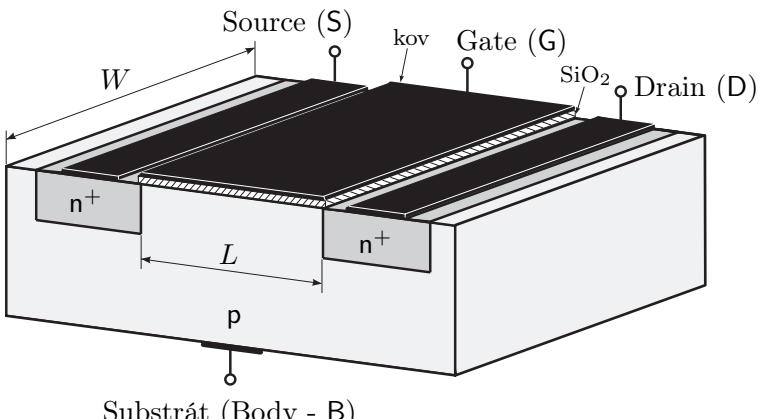
(a) tranzistor NPN (b) tranzistor PNP

Obrázek 13.19: Statické modely bipolárních tranzistorů pro režim saturace.

Aktivní režim tranzistoru se používá zejména v lineárních aplikacích při zpracování (zesilování) analogových signálů, saturační režim se využívá při spínání zátěží (s jednocestným proudem) a v digitální technice.

[1] Pro vysoké proudy lze použít zjednodušený vztah $R_{CE\mathrm{sat}} \approx \frac{0{,}1}{\beta_F i_B}$ při $i_C \doteq \frac{\beta_F}{2} i_B$.

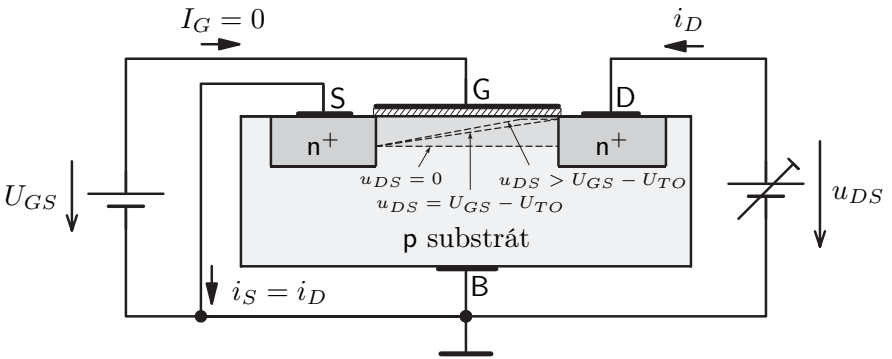
13.6.3. Struktura unipolárního tranzistoru typu MOSFET



Obrázek 13.20: Principiální struktura MOSFETu s kanálem N.

Unipolární tranzistory jsou tranzistory řízené polem (FET – Field Effect Transistor). Rozlišujeme dva základní typy: nejrozšířenější MOSFET (Metal Oxide Silicon) a méně používaný přechodový, tj. JFET (Junction). Jejich princip je založen na řízení proudu tzv. kanálu pomocí elektrického pole vytvořeného řídícím napětím. Principiální struktura MOSFETu s kanálem typu N je uvedena na obrázku 13.20. Řídící napětí se přivádí na kovovou elektrodu Gate, která je oddělena izolantem od vlastního polovodiče-substrátu (Body), kde vzniká vodivý kanál (délky L a šířky W) mezi elektrodami Drain a Source, které jsou analogií kolektoru a emitoru tranzistoru bipolárního. Pro kanál typu P jsou všechny polovodiče opačného typu.

13.6.4. Princip funkce tranzistoru typu MOSFET



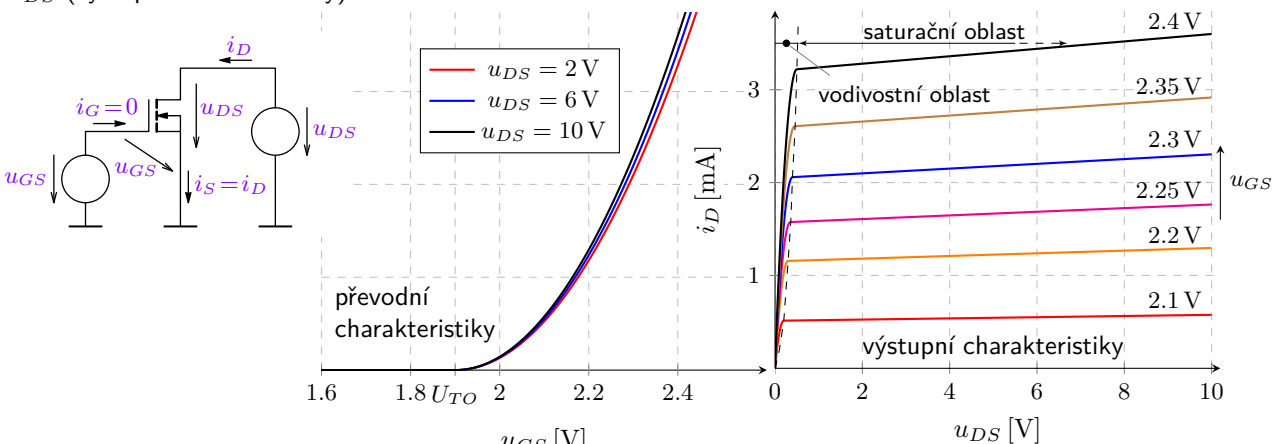
Obrázek 13.21: Polarizace MOSFETu pro vytvoření vodivého kanálu typu N.

Pro vytvoření vodivého kanálu mezi drainem a sourcem je v případě kanálu typu N třeba přivést na řídící elektrodu (G) kladné napětí vůči substrátu, který bývá spojen s elektrodou source. Toto kladné napětí přitáhne volné elektrony (minoritní ze substrátu a zejména ze source vlivem elektrického pole) pod izolant, kterým je řídící elektroda oddělena.

Některé z těchto elektronů zrekombinují, ale při dostatečně velkém řídícím napětí, větším než tzv. prahové napětí U_{TO}, tj. $U_{GS} > U_{TO}$ koncentrace elektronů převáží a tím dojde k vodivému „kanálu“ mezi source s drainem (substrát v této oblasti změní typ vodivosti). Pokud pak přivedeme mezi drain a source napětí (u_{DS}) začne procházet kanálem proud. Vlivem kladného napětí na drainu bude v této části docházet ke snížení elektrického pole a zmenšování (zaškrcování) kanálu. Kanálem však bude i po „zaškrcení“ procházet saturovaný proud (pro $U_{DS} > U_{GS} - U_{TO}$) a jeho velikost nebude záviset na napětí u_{DS} – saturační oblast (pozor neplést s oblastí saturace BJT!). Více viz. přednáška a „externí“ video.

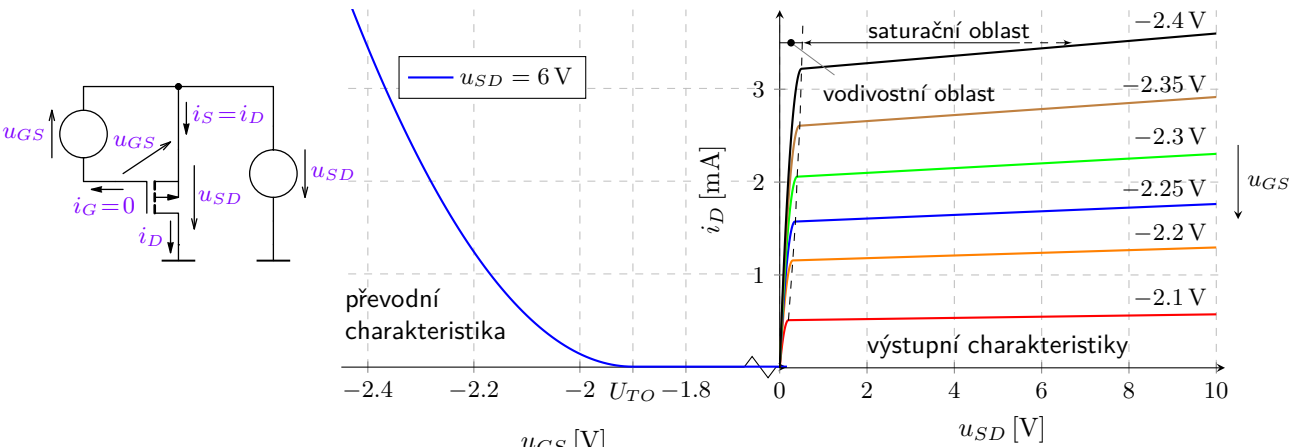
13.6.5. Statické charakteristiky tranzistoru typu MOSFET

Popsanou činnost dokládají charakteristiky tranzistoru MOSFET. Na obrázku 13.22 jsou typické charakteristiky MOSFET s N-kanálem, které lze získat v zapojení uvedeném vlevo: řídícím napětím u_{GS} lze měnit proud i_D při daném napětí u_{DS} (převodní charakteristiky), resp. pro dané napětí u_{GS} vynášíme proud i_D v závislosti na napětí u_{DS} (výstupní charakteristiky).



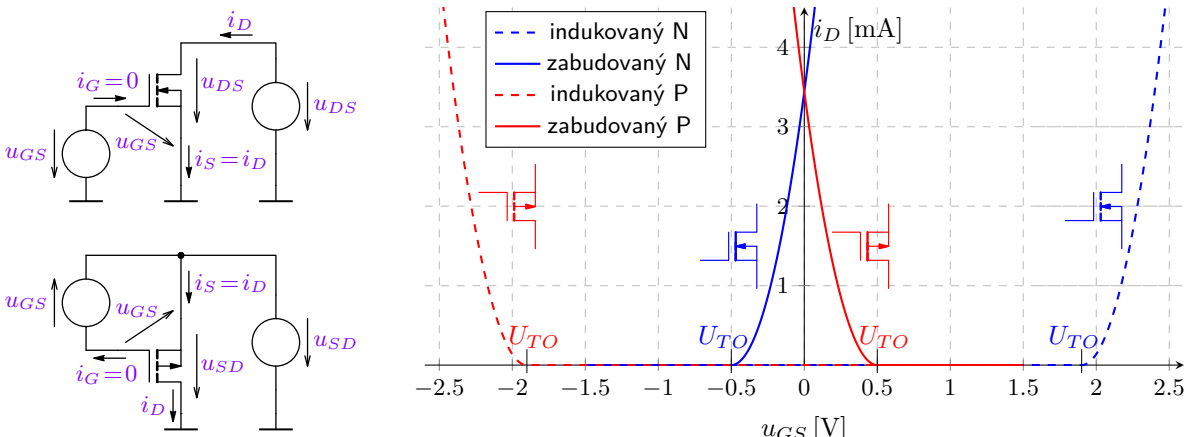
Obrázek 13.22: Převodní a výstupní charakteristiky tranzistoru MOSFET s kanálem typu N.

Tranzistor se podobně jako BJT chová jako řízený zdroj proudu. V tomto případě je to proud i_D, který je však řízen napětím u_{GS} a v saturační oblasti závisí minimálně na u_{DS}. Hradlo je odděleno izolantem (SiO_2), proto do řídící elektrody prakticky neteče proud ($i_G \approx 10^{-12}\,\mathrm{A}$). Podobně jako tranzistor s N-kanálem lze vykreslit i charakteristiky MOSFETu s kanálem typu P – viz obrázek 13.23, včetně zapojení a orientace obvodových veličin.



Obrázek 13.23: Převodní a výstupní charakteristiky tranzistoru MOSFET s kanálem typu P.

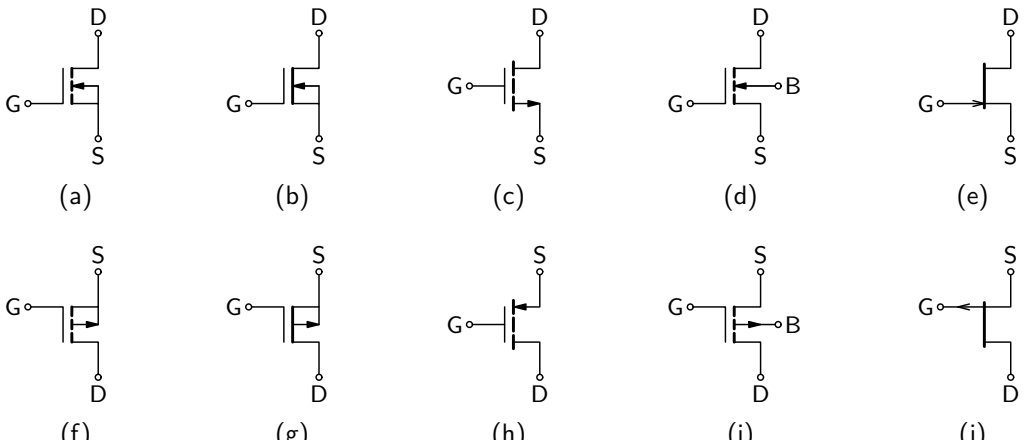
Kromě uvedených tranzistorů MOSFET s tzv. indukovaným kanálem (vytvořeným pouze elektrickým polem díky napětí u_{GS}) lze kanál připravit i technologicky, tak že kanálem prochází proud při nulovém napětí u_{GS}, kterým lze pak proud zvětšovat i zmenšovat – hovoříme o tzv. zabudovaném kanálu (prakticky se vyrábí minimálně).



Obrázek 13.24: Převodní charakteristiky tranzistorů MOSFET dle typu kanálu ($u_{DS} = 6\,\mathrm{V}$ pro N-kanál, resp. $u_{SD} = 6\,\mathrm{V}$ pro P-kanál).

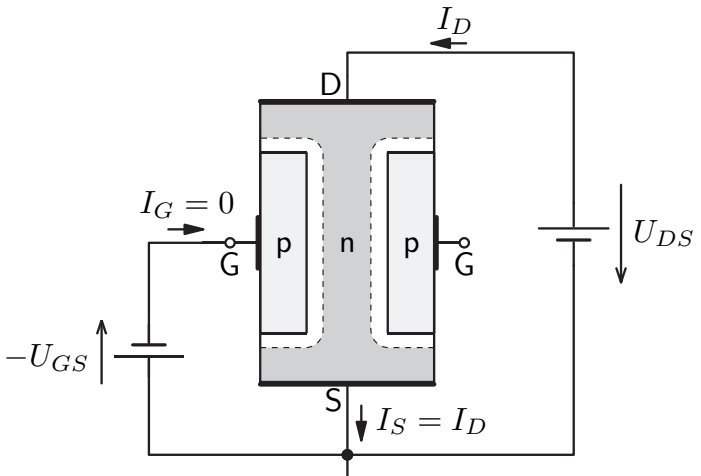
Schématické značení tranzistorů FET

Schématické značky tranzistorů FET jsou uvedeny na obrázku 13.25, přičemž (a) až (e) značí kanál typu N, (f) až (j) pro kanál typu P. Schématické značky (e) a (j) značí tranzistory JFET (viz. déle), značky (b) a (g) značí MOSFETy se zabudovaným kanálem, ostatní značky jsou pro MOSFETy s indukovaným kanálem, přičemž (c) a (h) jsou alternativní schématické značky k (a), (f) a (d), (i) mají vyvedený substrát (Body, resp. Bulk).



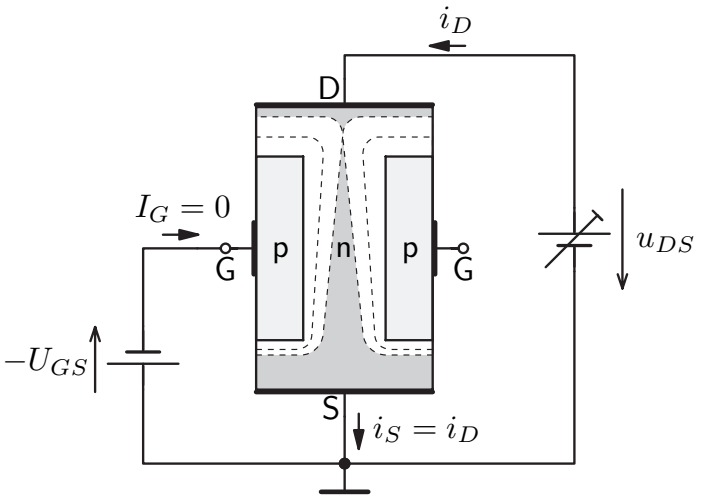
Obrázek 13.25: Schématické značky tranzistorů FET.

13.6.6. Struktura unipolárního tranzistoru typu JFET a jeho princip



Obrázek 13.26: Principiální struktura JFETu s kanálem typu N pro $U_{DS} = 0$.

Podobně jako MOSFET funguje i tranzistor JFET (Junction Field Effect Transistor), který využívá elektrického pole na zavřeném PN přechodu. Jeho principiální struktura je uvedena na obrázku 13.26. Řídící napětí U_{GS} je záporné v tomto případě (přechod musí být ve všech případech polarizován v závěrném směru) a zvětšuje vyprázdněnou oblast n, kde jsou volné elektrony pro transport náboje. Pokud tedy přivedeme (malé) napětí mezi drain a source bude procházet proud, který můžeme měnit jak napětím U_{GS} (čím menší napětí tím menší proud I_D), tak napětím U_{DS}. Tranzistor takto pracuje ve vodivostní oblasti (pro malá napětí (U_{DS} cca do $0{,}2$ až $1\,\mathrm{V}$ v závislosti na i_D) a chová se jako odpor (mezi D-S) řízený napětím U_{GS}.



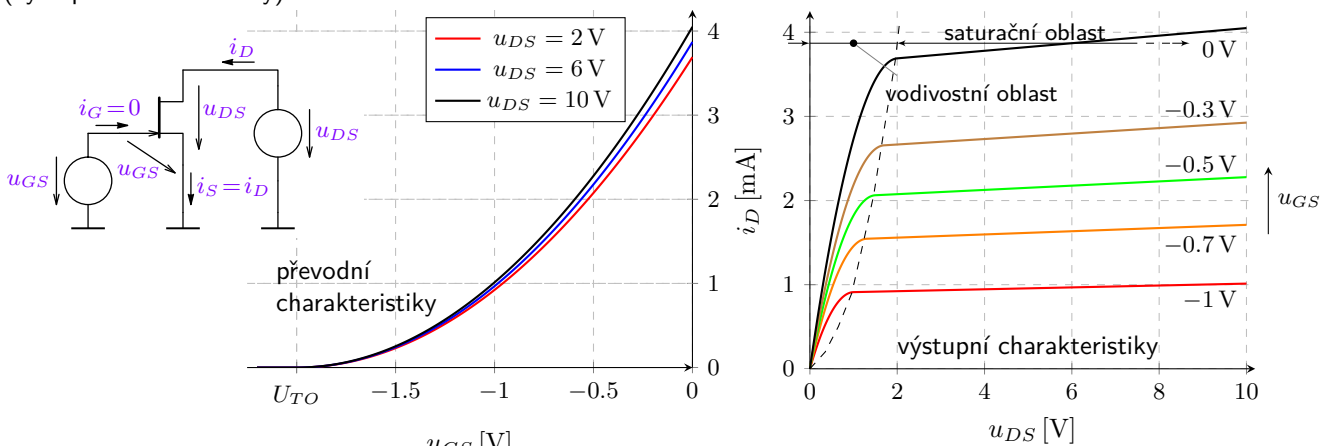
Obrázek 13.27: Principiální struktura JEFTu s kanálem typu N pro $U_{DS} = 0$.

Pokud budeme napětí u_{DS} zvětšovat, dojde stejně jako u tranzistoru MOSFET k zaškrcení kanálu (pro $U_{DS} > U_{GS} - U_{TO}$), tranzistor přejde do saturační oblasti, kde je proud i_D minimálně závislý na napětí u_{DS}. Proud i_D je saturován a jeho velikost lze měnit/zmenšovat řídícím napětím U_{GS} od maximální hodnoty $I_{DSS}|_{U_{GS}=0}$ (viz obrázek 13.29) do nuly pro $U_{GS} < U_{TO}$ (pro N-kanál).

Popis uvádí pouze základní pohled na funkci polovodičů – tranzistorů. Pro detailnější popis a pochopení fyzikálních principů viz např. [8, 9] . To platí i pro odvození matematického popisu, který následuje a uvádí pouze výsledné vztahy.

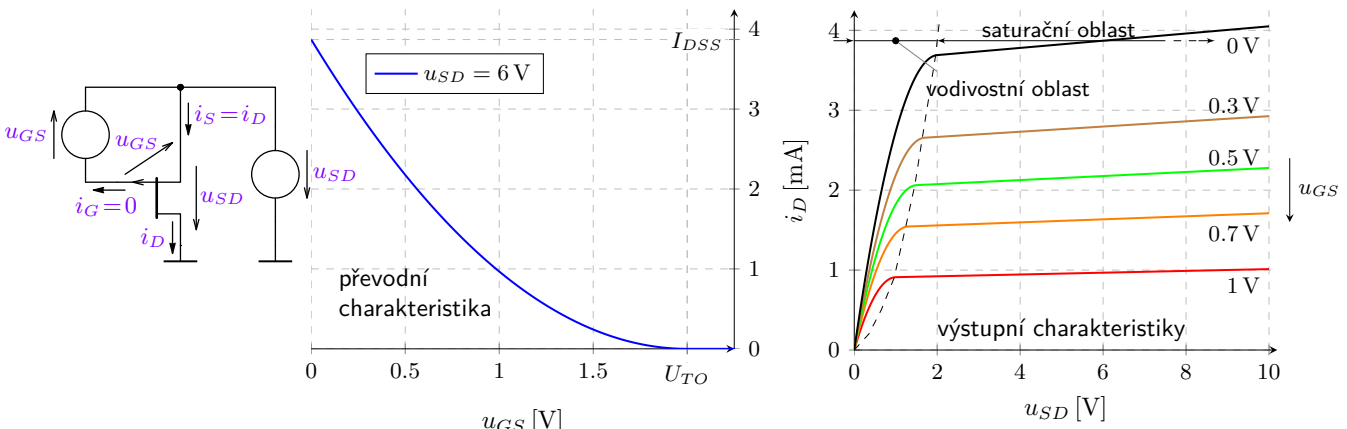
13.6.7. Statické charakteristiky tranzistoru typu JFET

Popsanou činnost JFETu opět dokládají jeho charakteristiky. Na obrázku 13.28 jsou typické charakteristiky JFET s N-kanálem, které lze získat v zapojení uvedeném vlevo: řídícím napětím u_{GS} lze měnit proud i_D při daném napětí u_{DS} (převodní charakteristiky), resp. pro dané napětí u_{GS} vynášíme proud i_D v závislosti na napětí u_{DS} (výstupní charakteristiky).



Obrázek 13.28: Převodní a výstupní charakteristiky tranzistoru JFET s kanálem typu N.

Charakteristiky jsou analogií charakteristik tranzistorů MOSFET. V tomto případě je širší vodivostní oblast, která se využívá jako řízený odpor (lze použít i pro malá záporná napětí u_{DS} – střídavé). Svodový proud gate je oproti MOSFETu větší ($i_G \approx 10^{-9}\,\mathrm{A}$). Podobně jako tranzistor s N-kanálem lze vykreslit i charakteristiky MOSFETu s kanálem typu P – viz obrázek 13.29, včetně zapojení a orientace obvodových veličin. Tranzistor se dnes používá pouze v bipolární technologii analogových obvodů.



Obrázek 13.29: Převodní a výstupní charakteristiky tranzistoru JFET s kanálem typu P.

13.6.8. Matematický popis a modelování tranzistorů FET

Aby bylo možné s tranzistory pracovat – navrhovat obvodové struktury a analyzovat je, nutné popsat jejich činnost matematicky. U tranzistoru FET obecně rozlišujeme následující oblasti: tranzistor uzavřený, vodivostní a saturační oblast (neplést s oblastí saturace BJT!). Pro MOSFET s indukovaným (obohacovaným) kanálem pak platí:

1. tranzistor uzavřený: $i_D = 0$ pro $\begin{cases} u_{GS} \leq U_{TO} & \text{pro kanál N,} \\ u_{GS} \geq U_{TO} & \text{pro kanál P,} \end{cases}$
2. vodivostní oblast, kde: $\begin{cases} \text{pro kanál N je} & 0 < U_{TO} \leq u_{GS} \text{ a } 0 \leq u_{DS} \leq u_{GS} - U_{TO}, \\ \text{pro kanál P je} & u_{GS} \leq U_{TO} < 0 \text{ a } 0 \geq u_{DS} \geq u_{GS} - U_{TO} \text{ a} \end{cases}$
3. saturační oblast, kde: $\begin{cases} \text{pro kanál N je} & 0 < U_{TO} \leq u_{GS} \text{ a } u_{DS} \geq u_{GS} - U_{TO}, \\ \text{pro kanál P je} & u_{GS} \leq U_{TO} < 0 \text{ a } u_{DS} \leq u_{GS} - U_{TO}. \end{cases}$

Je zřejmé, že je v závislosti na typu kanálu nutné rozlišovat polaritu, resp. orientaci obvodových veličin. Pro vlastní popis to už není nutné, jak se ukáže v následujícím textu (veličiny se buď vyskytují v kvadrátu nebo se násobí/odečítají záporné veličiny navzájem).

Pro **proud drainem v saturační oblasti** lze odvodit pro MOSFET vztah:

$$i_D = \frac{1}{2} K_P \frac{W}{L} \left(u_{GS} - U_{TO}\right)^2 \tag{13.12}$$

kde $K_P\,[\mathrm{A/V^2}]$ je vodivostní (transkonduktanční) parametr tranzistoru,
W je šířka a L je délka kanálu – viz. obrázek 13.20 a
U_{TO} je prahové napětí – napětí u_{GS}, kdy se začíná otevírat, resp. zavírat kanál.

Vodivostní parametr je dán následující rovnicí

$$K_P = \mu C_{ox} \tag{13.13}$$

kde $\mu\,[\mathrm{m^2/V/s}]$ je pohyblivost volných nosičů náboje (elektronů pro N kanál μ_n, děr pro P kanál $\mu_p \approx 0{,}25\mu_n$ až $0{,}5\mu_n$) a $C_{ox}\,[\mathrm{F/m^2}]$ je měrná kapacita hradla.

Sklon výstupních charakteristik, resp. závislost proudu i_D na napětí u_{DS} lze modelovat obdobně jako u bipolárního tranzistoru, kde parametr $\lambda\,[\mathrm{V^{-1}}]$ je analogií $1/U_A$ a je nepřímo úměrný L, tzv. modulace délky kanálu [7]:

$$i_D = \frac{1}{2} K_P \frac{W}{L} \left(u_{GS} - U_{TO}\right)^2 (1 + \lambda u_{DS}), \quad \lambda > 0 \text{ pro N-kanál, } \lambda < 0 \text{ pro P-kanál.} \tag{13.14}$$

Pro **proud drainem ve vodivostní oblasti** lze odvodit následující vztah, což představuje zmíněný řízený odpor, jelikož pro malá u_{DS} je $u_{DS}^2 \approx 0$.

$$i_D = \frac{1}{2} K_P \frac{W}{L} \left(2(u_{GS} - U_{TO}) u_{DS} - u_{DS}^2\right) \tag{13.15}$$

U tranzistoru JFET platí stejné relace pro pracovní oblasti jako u tranzistoru MOSFET (liší se pouze velikosti/znaménka napětí u_{GS} a U_{TO}). Proud drainem u tranzistoru JFET **v saturační oblasti** má až na převodní konstantu prakticky stejný tvar:

$$\boxed{i_D} = I_{DSS}\left(1-\frac{u_{GS}}{U_{TO}}\right)^2 = \frac{I_{DSS}}{U_{TO}^2}\left(U_{TO}-u_{GS}\right)^2 \boxed{= K_\beta\left(u_{GS}-U_{TO}\right)^2} \tag{13.16}$$

kde I_{DSS} je proud drainu při nulovém řídícím napětí $u_{GS}=0$,
U_{TO} je opět prahové napětí, pro otevření/zavření kanálu a
$K_\beta = \frac{I_{DSS}}{U_{TO}^2}$ [A/V^2] je vodivostní (transkonduktanční) parametr tranzistoru.

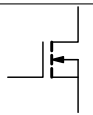
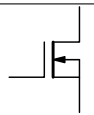
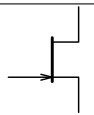
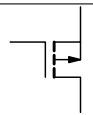
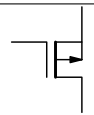
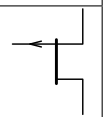
Stejně pak lze vyjádřit i sklon výstupních charakteristik.

$$i_D = K_\beta\left(u_{GS}-U_{TO}\right)^2\left(1+\lambda u_{DS}\right), \quad \lambda > 0 \text{ pro N-kanál, } \lambda < 0 \text{ pro P-kanál} \tag{13.17}$$

a **proud i_D ve vodivostní oblasti** platí:

$$i_D = K_\beta\big(2(u_{GS}-U_{TO})u_{DS}-u_{DS}^2\big). \tag{13.18}$$

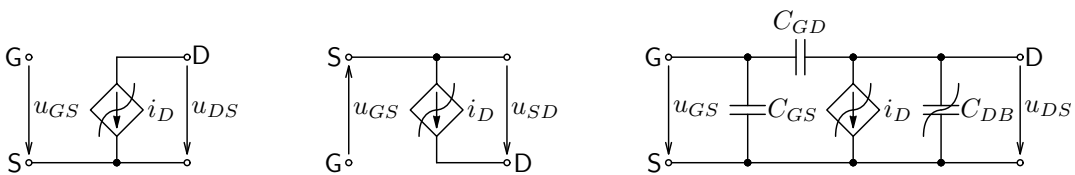
Poznámka: Zřejmě jste si v simulacích všimli, že u tranzistorů NPN a MOSFET-N počítají simulátory všechny proudy dovnitř tranzistoru, ale u tranzistorů PNP a MOSFET-P počítá (pouze) numerický simulátor proudy ven z tranzistoru. Dále numerický simulátor označuje opačně orientaci mezielektrodových napětí u PNP a MOSFET-P (v_{BE}, v_{CB} a v_{GS}, v_{DS} místo vypočtených $v_{EB}=-v_{BE}$, atd.).

Typ	N-kanál			P-kanál		
	MOSFET		JFET	MOSFET		JFET
	obohacovaný	ochuzovaný		obohacovaný	ochuzovaný	
Symbol						
$U_{TO} <> 0$	$+$	$\pm$	$-$	$-$	$\mp$	$+$
otevření tranzistoru	$u_{GS} > U_{TO}$			$u_{GS} < U_{TO}$		
$u_{DS} <> 0$	$+$			$-$		
vodivostní oblast	$u_{DS} < u_{GS} - U_{TO}$			$u_{DS} > u_{GS} - U_{TO}$		
	$i_D = K\left(2(u_{GS} - U_{TO})u_{DS} - u_{DS}^2\right)$					
saturační oblast	$u_{DS} \geq u_{GS} - U_{TO}$			$u_{DS} \leq u_{GS} - U_{TO}$		
	$i_D = K(u_{GS} - U_{TO})^2\left(1 + \lambda u_{DS}\right)$					
K	$\frac{1}{2}\mu C_{ox}\frac{W}{L}$		$\frac{I_{DSS}}{U_{TO}^2}$	$\frac{1}{2}\mu C_{ox}\frac{W}{L}$		$\frac{I_{DSS}}{U_{TO}^2}$
$\lambda <> 0$	$+$			$-$		

Tabulka 13.1: Základní vztahy a vlastnosti unipolárních tranzistorů dle typu.

Statický a dynamický model unipolárního tranzistoru pro saturační oblast

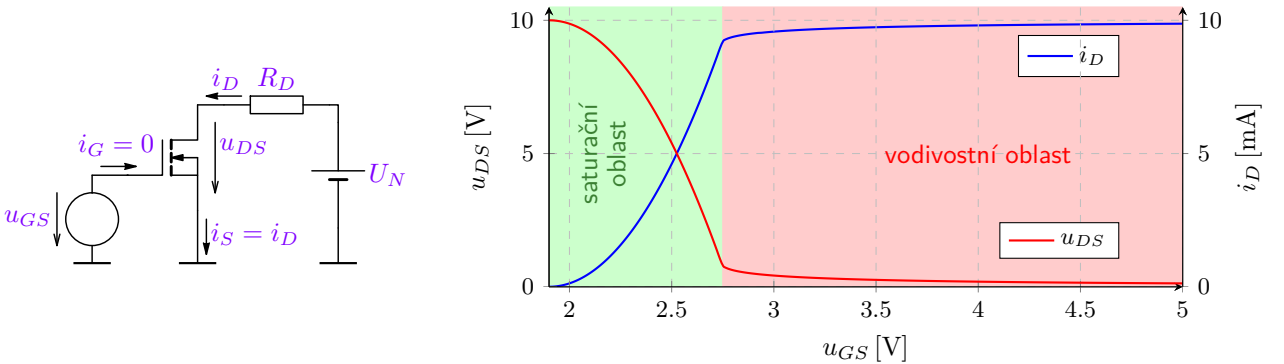
Vzhledem k tomu, že gate je oddělen izolantem a neteče jím žádný proud, lze statický model FETů zjednodušit na nelineární řízený proudový zdroj, jak je patrné z obrázků 13.30 (a) a (b), kde proud je nelineární funkcí napětí $i_D = f(u_{GS})$ dle (13.12), resp.dle (13.16). Výstupní odpor lze modelovat stejně jako u BJT nebo může být vliv modulace délky kanálu zaveden přímo do popisu proudového zdroje, tj. $i_D = f(u_{GS},u_{DS})$ dle (13.14), resp. (13.18). Dynamický model na obrázku 13.30 (c) obsahuje jak lineární kapacity C_{GS} a C_{GD} dané konstrukcí, dielektrickými vlastnostmi SiO_2, ... a bariérovými kapacitami přechodů, ze kterých se při spojeném substrátu a source uplatní pouze kapacita C_{BD}. V simulačních programech je nutné podchytit většinu (i parazitních) vlastností prvku. Složitost modelů je obrovská a liší se dle úrovní, kterých jsou desítky.



Obrázek 13.30: Základní nelineární modely FETů, kde $i_D = f(u_{GS},u_{DS})$: (a), (b) – statické pro N a P-kanál a (c) – dynamický pro N-kanál.

Chování unipolárního tranzistoru ve vodivostní oblasti (ve funkci spínače) a jeho model

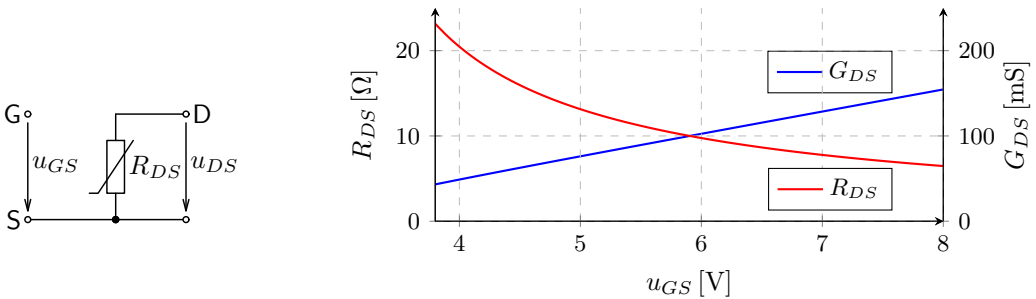
Stejně jako aktivní oblast tranzistoru se i saturační oblast FETů používá zejména v lineárních aplikacích při zpracování (zesilování) analogových signálů. Vodivostní oblast se využívá při spínání zátěží (s jednocestným proudem) a v digitální technice. Pokud omezíme proud např. i_D pomocí R_D dle obrázku 13.31 (typické zapojení pro spínání zátěže R_D) a napětí drainu díky tomu klesne pod hodnotu $u_{DS} < u_{GS} - U_{TO}$, bude tranzistor pracovat ve vodivostní oblasti a proud drainu bude dominantně dán relací $i_D \doteq U_N/R_D$, podobně jako u bipolárního tranzistoru v oblasti saturace.



Obrázek 13.31: Zapojení tranzistoru N-FET pro dosažení vodivostní oblasti a odpovídající závislosti obvodových veličin na velikosti buzení u_{GS}.

Na rozdíl od tranzistoru bipolárního se náhradní obvod FETu ve vodivostní oblasti chová pouze jako řízený rezistor R_{DS}, dle obrázku 13.32 (a). Jeho hodnotu lze jednoduše z relace (13.15), resp (13.18):

$$G_{DS} = K_p \frac{W}{L}(u_{GS} - U_{TO}), \quad R_{DS} = \frac{1}{G_{DS}} \quad \text{pro} \quad u_{DS} < 1\,\text{V}. \tag{13.19}$$



(a) (b)

Obrázek 13.32: Model FETu ve vodivostní oblasti a závislost G_{DS} a R_{DS} na řídícím napětí u_{GS}.

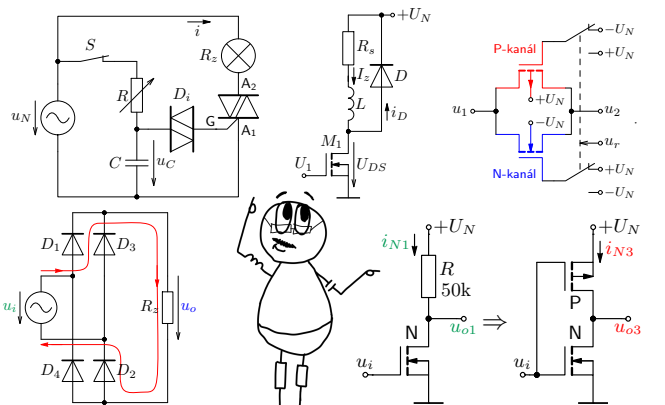
Pro $u_{GS} > 2U_{TO}$ je vodivost G_{DS} prakticky lineární funkcí u_{GS} – viz. obrázek 13.32 (b) a např. pro $u_{GS} = 5\,\text{V}$ je v případě parametrů FETu z uvedené simulace $G_{DS} = 1{,}6 \cdot 16 \cdot (5 - 1{,}9) \doteq 80\,\text{mS}$, tj. $R_{DS} \doteq 12{,}5\,\Omega$.
Pro $u_{GS} > 10\,\text{V}$ se obvykle už R_{DS} dále nezmenšuje, ale je dáno konstrukcí tranzistoru a sériovými odpory. U většiny tranzistorů nesmí u_{GS} překročit hranici $\pm 20\,\text{V}$! jinak dojde k průrazu dielektrika a zničení tranzistoru.

Poznámky XIII

Kapitola 14

Elektronické spínače elektrických signálů

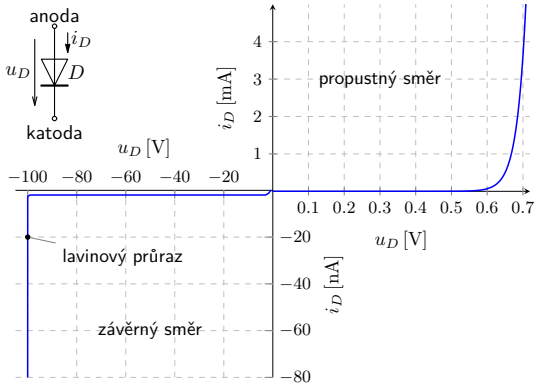
Tato kapitola navazuje na kapitolu předchozí a ukazuje jednak použití známých prvků ve funkci elektronického spínače a jednak principy a vlastnosti dalších polovodičových prvků určených pro spínání elektrických proudů. Uživatel se seznámí s funkcí tyristoru a triaku i základních spínacích obvodů nejen s těmito prvky. Dozví se jak nastavit buzení tranzistoru ve funkci spínače, jak navrhnout a základní spínací obvod a určit hodnoty použitých komponent. V závěru jsou pak uvedeny různé implementace invertoru jako základního stavebního bloku digitálních obvodů, včetně ukázky jejich charakteristik.



14.1. Dioda – jednosměrný spínač řízený vlastním napětím

V sekci 13.5 byly ukázány základní vlastnosti polovodičové diody. Podle volt-ampérové charakteristiky z obrázku 13.6 (viz také vpravo) je zřejmé, že při polarizaci diody v propustném směru se pro napětí $u_D > 0{,}6\,\mathrm{V}$ dioda otevírá, přičemž napěťový úbytek na diodě závisí na procházejícím proudu minimálně. Velikost proudu je pak dána vnějším obvodem. V závěrném směru dioda proud prakticky nevede.

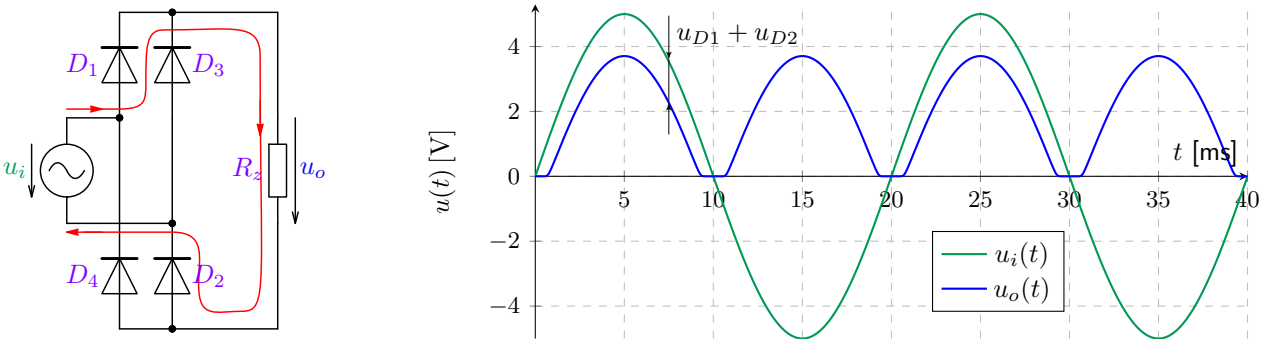
Pro diodu kov-polovodič (Schottky) je napětí pro pro polarizaci přechodu do propustného stavu cca $u_D \approx 0{,}25\,\mathrm{V}$, ale závěrný proud je již v řádu [μA], viz analýzu.



Dioda jako elektronický spínač

Diodu lze chápat jako jednosměrný spínač s nenulovým napěťovým úbytkem v sepnutém stavu $u_D \approx 0{,}7\,\mathrm{V}$ (pro Si) a malým sériovým odporem. Spínání je řízeno napětím na diodě, které musí být pro sepnutý stav $u_D > 0{,}6\,\mathrm{V}$. Pro $u_D < 0{,}5\,\mathrm{V}$ je dioda uzavřena a její proud lze považovat za nulový.

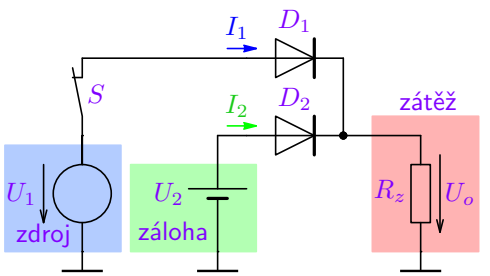
Skutečnosti, že dioda propouští proud pouze jedním směrem – od anody ke katodě se hojně využívá při usměrňování signálů, jak bylo ukázáno v sekci 13.5.2 na obrázku 13.9, v analýze a také v experimentu. Úpravou uvedeného zapojení 13.9 s použitím 4 diod lze snadno získat tzv. dvoucestný usměrňovač uvedený spolu s časovými průběhy napětí na obrázku 14.1. Při kladné půlvlně u_i se otevírají diody D_1, D_2 (ilustrováno na obrázku), při záporné půlvlně pak diody D_3, D_4. Výstupní napětí je tak zmenšeno o dva úbytky na diodách, jak je patrné také z analýzy. Další modifikace zapojení diodového usměrňovače jsou uvedeny v kapitole 19.

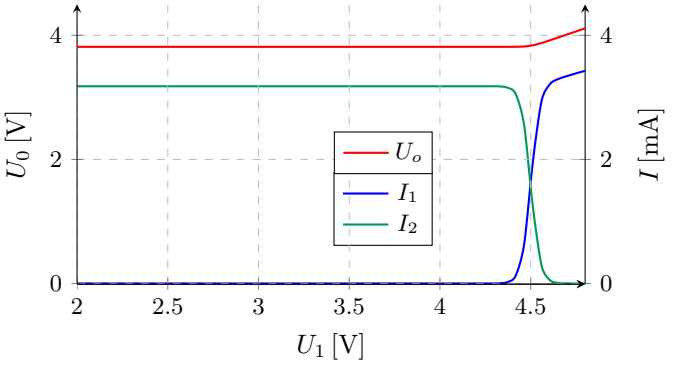


Obrázek 14.1: Zapojení dvoucestného usměrňovače střídavého napětí $u_i(t)$.

Další používanou aplikací je např. jednoduché spínání baterie v případě výpadku zdroje, tzv. „power management“, což je v zásadě realizace logického součtu pomocí diodové logiky.

Zátěž je napájena ze zdroje U_1, pokud je sepnutý spínač S a zároveň platí, že $U_1 > U_2$. V tom případě je otevřena dioda D_1 a dioda D_2 je uzavřena ($I_1 > 0$, $I_2 = 0$). Při výpadku výpadku zdroje ($U_1 = 0$, resp. $U_1 < U_2$ nebo rozpojení spínače S), přičemž se otevře naopak dioda D_2 a dioda D_1 se uzavře ($I_1 = 0$, $I_2 > 0$), čímž se zátěž začne napájet z baterie U_2, viz analýzu.

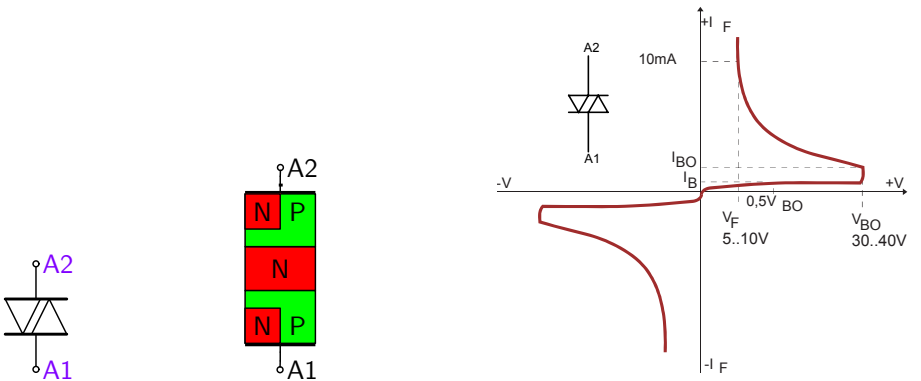




Obrázek 14.2: Řízení napájení zátěže ze záložní baterie U_2 při výpadky napájecího zdroje U_1.

14.2. Diak – obousměrný spínač řízený vlastním napětím

Diak (Diac – Diode for Alternating Current) – je nelineární polovodičový spínací prvek se symetrickou VA charakteristikou. Do průrazného napětí $(25 - 45\,\mathrm{V})$ je minimálně vodivý, poté nastává lavinový průraz s úbytkem na diaku jednotky voltu (typicky $1{,}5\,\mathrm{V}$), přičemž je nutné zajistit omezení proudu např. rezistorem, aby nebyl překročen maximální ztrátový výkon. Při snížení hodnoty proudu pod přídržnou hodnotu je opět nevodivý, viz také analýzu.



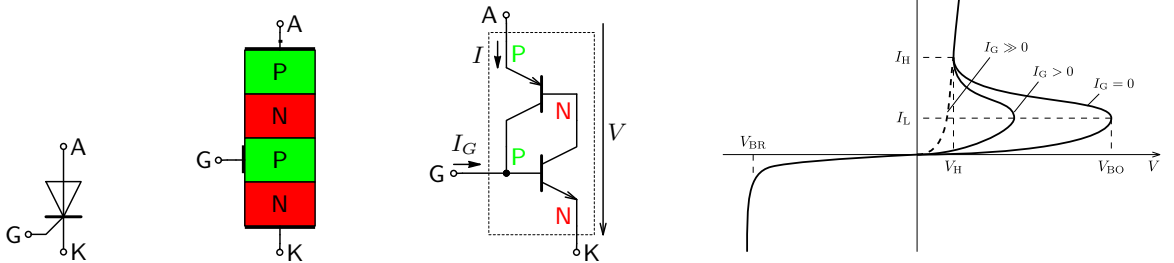
Obrázek 14.3: Schématická značka, struktura a VA charakteristika diaku (převzata z https://en.wikipedia.org/).

Použití: ochranné obvody při spínání indukční zátěže, ovládání (spínání) řízených prvků (tyristor, triak).

14.3. Tyristor – jednosměrný spínač řízený externím signálem

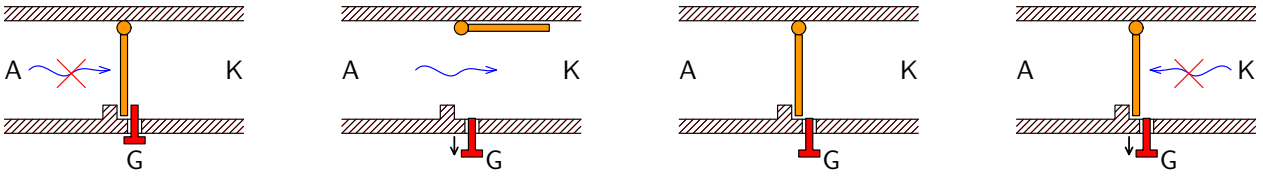
Sepnutí struktury diaku je iniciováno lavinovým průrazem daným technoliogií (koncentrací příměsí, ...). Tyristor (Thyratron Transistor, Silicon Controlled Rectifier – SCR) je možné sepnout otevřením PN přechodu G-K „gate“ - proudem $I_G = 5$ až $50\,\mathrm{mA}$ (i krátkým pulzem), pak je tyristor vodivý až do zániku proudu I.

Tyristorem však prochází proud pouze jedné polarity (půlvlnný), jak je patrné z voltampérové charakteristiky. Po zániku proudu (průchodu nulou) je sepnutí nutné opět iniciovat proudem I_G. Princip lze dobře demonstrovat na náhradním schématu s tranzistory. Vlivemm sepnutí NPN tranzistoru proudem I_G dojde k sepnutí (saturaci) i tranzistoru PNP, přičemž úbytek v propustném stavu je typicky $1{,}5\,\mathrm{V}$.



Obrázek 14.4: Schématická značka, struktura, náhradní zapojení a voltampérová charakteristika tyristoru (převzata z https://en.wikipedia.org/).

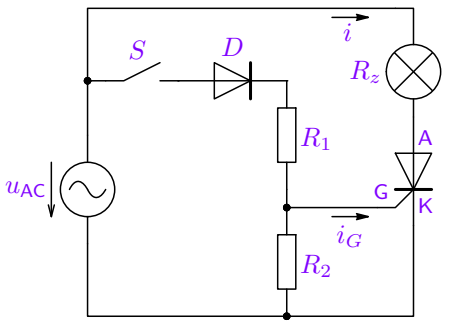
© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL



Obrázek 14.5: Ilustrativní znázornění principu tyristoru pomocí řízeného ventilu v proudu vody.

Princip tyristoru lze vysvětlit i na řízeném ventilu v proudu vody podle obrázku 14.5. Pokud je zarážka G uzavřena, ventil vodu nepropustí – obrázek (a). V elektrickém zapojení 14.6 to znamená S rozpojen, $i_G = 0$ a $i = 0$. Pokud zarážku G otevřeme – obrázek (b), ventil se otevře proudem vody od A ke K (S sepnut, $u_{AC} > 0 \Rightarrow i_G > 0$ a $i > 0$). Pokud proud vody ustane, resp. změní směr, ventil se uzavře – obrázek (c,d). V elektrickém zapojení je pak $u_{AC} < 0 \Rightarrow i_G = 0$ a $i = 0$ bez ohledu na stav spínače S.

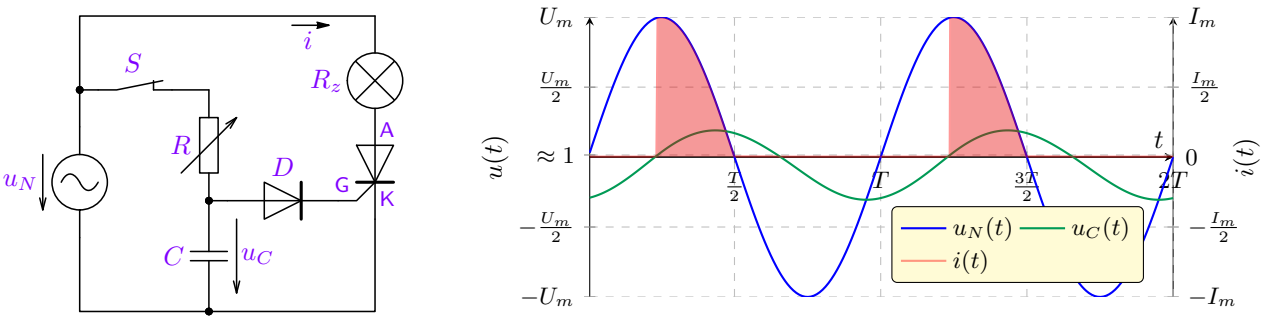
Dioda D v zapojení 14.6 zabraňuje průrazu přechodu G-K v závěrném směru ($u_{AC} < 0$), rezistor R_1 omezuje i_G při otevření tyristoru a R_2 zajišťuje rychlé uzavření přechodu G-K pro $u_{AC} < 0$.



Obrázek 14.6: Zapojení pro spínání tyristoru.

Napětí na gate, resp. proud I_G je možné přivést fázově posunutý (zpožděný), např. dle obrázku 14.7 (a), čímž lze tyristor otevřít i na část $\Delta t < \frac{T}{4}$ půlperiody (pro $u_N > 0$ a cca $u_C > 0{,}7\,\mathrm{V}$) a tím řídit výkon na zátěži téměř do nuly, viz časové průběhy na obrázku 14.7 (b) a analýzu (pozor, modely těchto vícevrstvých prvků v simulačních programech jsou nepřesné – neodpovídají přesně skutečnému chování reálných prvků).

Zpoždění a tím tzv. „úhel sepnutí“ lze měnit časovou konstantou RC článku, nejsnadněji hodnotou R. Pro $C = 0$ bude tyristor sepnut prakticky celou kladnou půlvlnu, viz také odkaz zde.



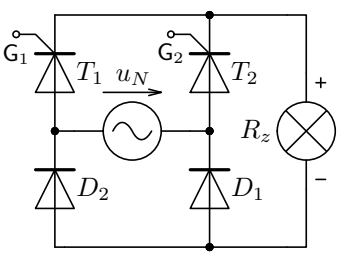
(a) (b)

Obrázek 14.7: Použití tyristoru pro regulaci výkonu na zátěži R_z fázově zpožděným napětím u_C ve střídavé síti.

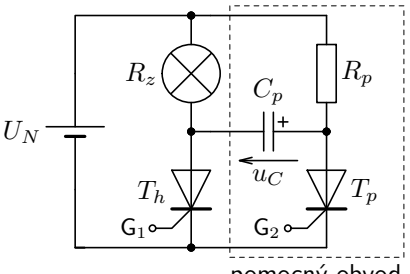
Použití: v oblasti velmi vysokého výkonového spínaní – až jednotky kV a kA!, viz např. zde.

Výhody: Malý úbytek při sepnutí (typicky do $2\,\mathrm{V}$ pro proudy do $1\,\mathrm{kA}$), rychlý nárůst proudu při sepnutí ($\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$ i $10^2\,\mathrm{kA/\mu s}$).

Nevýhody: Spíná pouze jednu polaritu (lze řešit můstkovým zapojením za cenu zvýšení napěťového úbytku), problematické rozpínání ve stejnosměrných aplikacích, viz obrázky 14.8 (a) a (b).



(a)



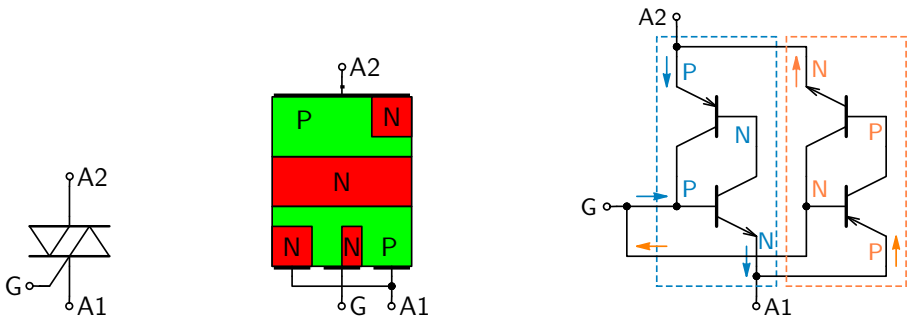
(b)



Obrázek 14.8: Zapojení pro spínání AC a vypínání DC proudu.

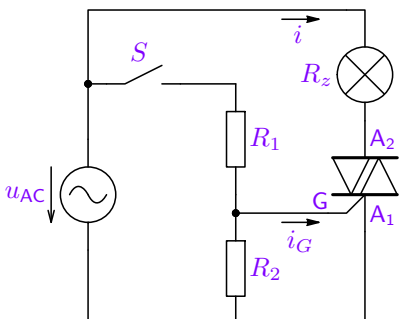
14.4. Triak – obousměrný spínač řízený řídícím signálem

Jednou z evidentních nevýhod tyristoru je skutečnost, že vede proud pouze jedním směrem (řízená dioda). Tuto nevýhodu řeší triak. Triak (Triode for Alternating Current) je vícevrstvá polovodičová struktura, která je někdy nepřesně popisovaná jako dva antiparalelně zapojené tyristory s jednou řídící elektrodou, (viz obrázek 14.9 (c). Proudem/napětím řídící elektrody G vůči elektrodě A1 obou polarit lze strukturu triaku otevřít a to pro obě polarity hlavního napětí mezi elektrodami A2-A1.

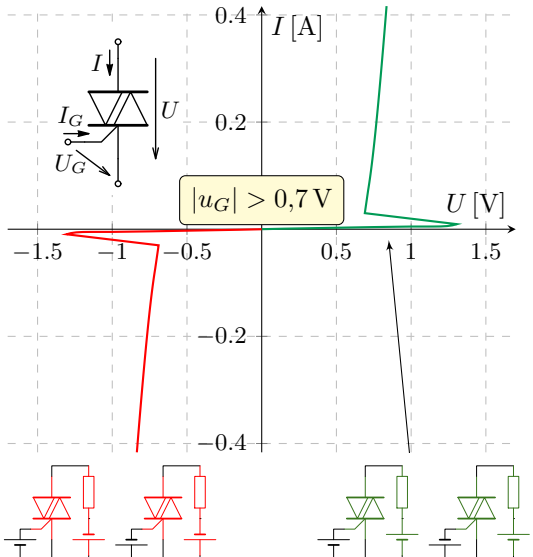


Obrázek 14.9: Schématická značka, struktura a nepřesné tranzistorové náhradní zapojení triaku.

Volt-ampérová charakteristika triaku je v 1. a 4. kvadrantu analogická jako charakteristika tyristoru 1. kvadrantu, jak ukazuje obrázek 14.11, včetně ilustrace možností polarizace elektrod triaku pro jeho otevření. Popis otevření struktury v jednotlivých kvadrantech je uveden např. na wikipedia.org. Schéma zapojení triaku ve funkci spínače střídavého proudu je uvedeno na obrázku 14.10, analýza zde.

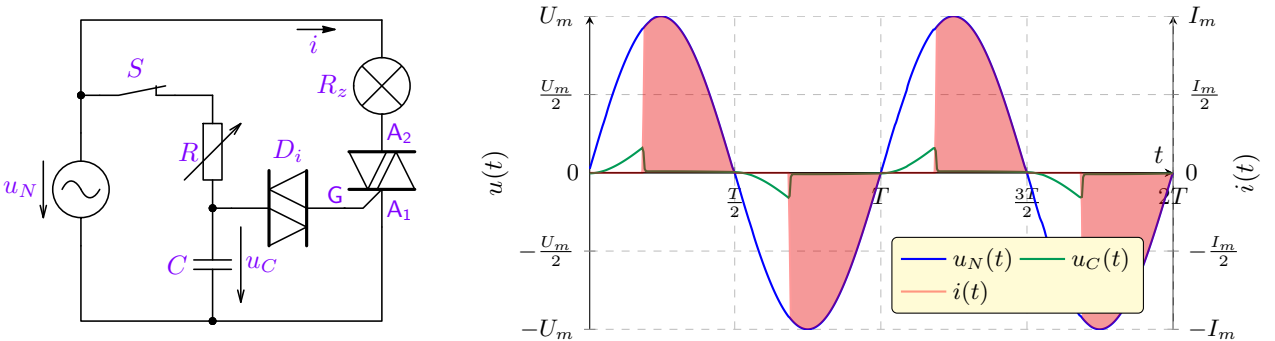


Obrázek 14.10: Zapojení triaku jako spínače střídavého proudu.



Obrázek 14.11: Statická charakteristika triakku.

Podobně jako v případě tyristoru lze i pomocí triaku regulovat výkon na zátěži R_z pomocí fázově posunutého napětí na řídící elektrodě. V tomto případě to lze pro obě půlvlny (polarity) napájecího napětí u_N. Na obrázku 14.12 (a) je základní schéma zapojení obvodu tyristorové regulace a na obrázku (b) jsou uvedeny odpovídající časové průběhy důležitých veličin (viz také analýzu). Zpoždění je dáno jednak posunutým řídícím napětím na kapacitoru a dále díky předřazenému diaku, který sepne až při cca $31\,\mathrm{V}$.

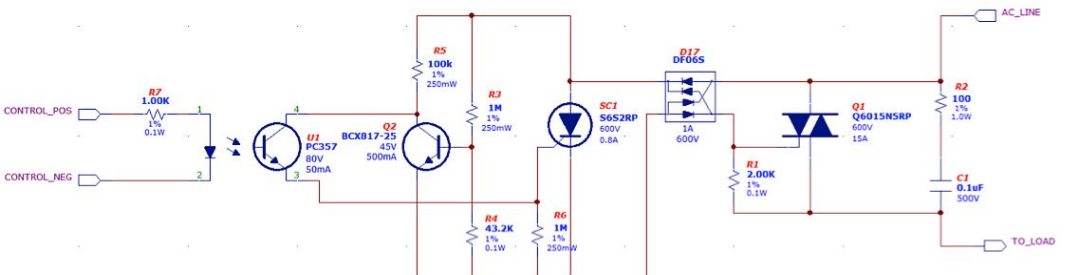


(a) (b)

Obrázek 14.12: Použití triaku pro regulaci výkonu na zátěži R_z fázově zpožděným napětím u_C ve střídavé síti.

Vzhledem k možnosti spínání obou polarit se triak využívá v mnoha aplikacích elektrických rozvodů (stmívače, časové relé, . . .). Dále se na základě triaku vyrábějí tzv. Solid State Relay, kde je spínání výkonového triaku galvanicky odděleno (řídícím optotranzistorem nebo opto-triakem, který spíná při osvětlení luminiscenční diodou). Na obrázku 14.13 je ukázka možného zapojení elektronického relé, které spíná pouze při průchodu proudu nulou (sepnutí je zakázáno, pokud hlavní napětí převýší velikost jednotek voltů), což výrazně snižuje rušení vznikající při spínání velkých proudů, více viz přednáška. Na rozdíl od tyristoru se triak používá „pouze“ do cca $10^2\,\mathrm{A}$ a $2\,\mathrm{kV}$.

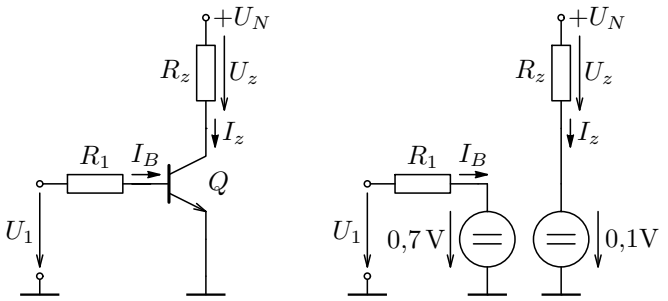




Obrázek 14.13: Ukázka vnitřního zapojení tzv. Solid State Relay (převzato z https://www.edn.com, případně viz také makingcircuits.com).

14.5. Tranzistor jako řízený spínač jednosměrného proudu

Nevýhodou tyristoru či triaku je jejich řízení, kterým se ovládá pouze sepnutí. Struktura se uzavře pouze zánikem protékajícího proudu (poklesem pod udržovací mez). Proto se používají zejména v obvodech střídavého proudu. Naopak v obvodech stejnosměrného proudu je výhodné využít jako elektronický spínač tranzistor, který lze řídícím signálem zapnout i vypnout. Na obrázku 14.14 je základní zapojení pro spínání stejnosměrného proudu zátěží R_z.



Obrázek 14.14: Obvod pro spínání odporové zátěže R_z pomocí bipolárního tranzistoru (a) a jeho náhradní schéma pro režim saturace (b).

Pokud má bipolární tranzistor pracovat ve funkci spínače, musí být napěťový úbytek U_{CEsat} v sepnutém stavu velmi malý, tj. tranzistor musí pracovat v režimu saturace, viz obrázek 13.18. Pro dosažení tohoto stavu je nutná dostatečná velikost napětí $U_1 > 0{,}7\,\mathrm{V}$ a dostatečně malý odpor R_1 tak, aby platilo:

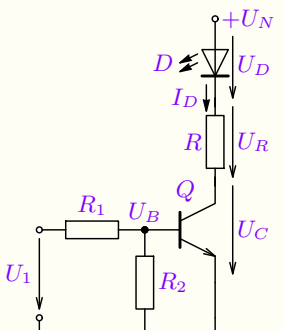
$$I_B = \frac{U_1 - 0{,}7\,\mathrm{V}}{R_1} > \frac{I_z}{\beta}, \text{ kde } I_z \doteq \frac{U_N}{R_z}. \quad (14.1)$$

Tranzistor lze pak nahradit modelem 13.19, kde $R_{CE\mathrm{sat}}$ lze většinou zanedbat (pro proudy $I_z < 10^1\,\mathrm{A}$). Pro sepnutý stav dostáváme náhradní obvod na obrázku (b) a typická hodnota napětí $U_{CE\mathrm{sat}}$ je cca $0{,}1\,\mathrm{V}$.

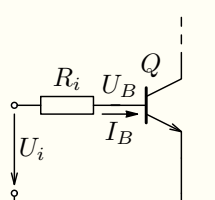
***Příklad 14.1** Návrh elementárního spínacího obvodu*

Zadání: Navrhněte spínací obvod pro LED pomocí NPN tranzistoru, pokud je zadáno: napájecí napětí $U_N = 5\,\mathrm{V}$, proud LED $I_z = 5\,\mathrm{mA}$ při $U_D = 1{,}8\,\mathrm{V}$ a proudový zesilovací činitel tranzistoru $\beta_F \approx 100$. Dále uvažujte řídící napětí $U_1 = U_{1L} \leq 1{,}2\,\mathrm{V}$ pro stav vypnuto a $U_1 = U_{1H} \geq 4{,}5\,\mathrm{V}$ pro stav zapnuto.

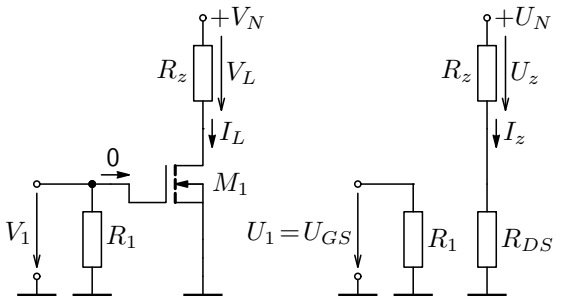
Řešení: Jedná se o základní použití tranzistoru jako spínače, podobně jako v předchozí ukázce, viz obrázek 14.14. V tomto případě je však $U_{1L} > 0{,}6\,\mathrm{V}$ a tudíž by došlo v obou případech k otevření tranzistoru Q. Z tohoto důvodu je za vstupní svorky zařazen napěťový dělič R_1 zavřený R_2, viz zapojení vlevo.



Návrh provedeme např. pro volbu $U_B = 0{,}4\,\mathrm{V}$ pro $U_1 = U_{1L}$, což zajistí spolehlivé vypnutí tranzistoru. Naopak pro $U_1 = U_{1H}$ je třeba zajistit $I_B > I_z/\beta_F = 50\,\mu\mathrm{A}$. Výpočet hodnot rezistorů R_1, R_2 pak určíme z náhradního Theveninova zapojení, viz. obrázek vpravo. Vzhledem k volbě $U_B = U_{iL} = \frac{U_{1L}R_2}{R_1+R_2} = 0{,}4\,\mathrm{V}$ $(I_B \approx 0)$, je $R_1 = 2R_2$. Podobně $U_{iH} = \frac{U_{1H}R_2}{R_1+R_2}$, $R_i = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ a z volby $I_B = 2\frac{I_z}{\beta_F} = 2\frac{U_{iH}-0{,}7}{R_i}$ lze pak určit $R_1 = 24\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 12\,\mathrm{k\Omega}$. Nakonec vypočítáme velikost omezujícího odporu $R = \frac{U_N-U_D-U_C}{I_D} = \frac{5-1{,}8-0{,}1}{5\cdot 10^{-3}} = 620\,\Omega$. Výsledky lze ověřit analýzou.



Podobně jako bipolární tranzistor lze ke spínání využít i tranzistor unipolární, viz obrázek 14.15. Využíváme vodivostní oblasti tranzistoru, jak bylo ukázáno na obrázku 13.31. Pro dosažení této oblasti musí platit $U_{DS} < U_{GS} - U_{TO}$. Toho docílíme v případě, že $U_{GS} > U_{GS_{min}}$, kde $U_{GS_{min}}$ určíme z rovnice $I_D(U_{GS_{min}}) \doteq \frac{U_N}{R_z}$.

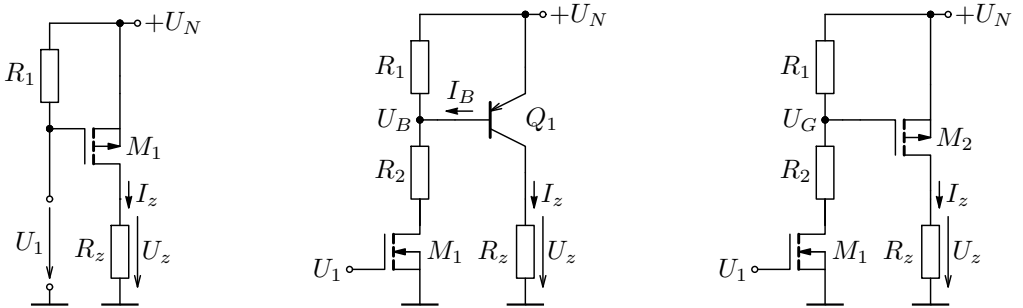


Obrázek 14.15: Obvod pro spínání odporové zátěže R_z pomocí unipolárního tranzistoru (a) a jeho náhradní schéma pro odporový režim tranzistoru (b).

V praxi však volíme řídící napětí obvykle podle napájecího napětí, pro výkonové tranzistory vždy $U_{GS} \leq 5\,\mathrm{V}$, ale $|U_{GS_{max}}| = 20\,\mathrm{V}$, aby nedošlo k průrazu oxidu gate. Rezistor R_1 slouží k vybytí parazitní kapacity tranzistoru v případě odpojení zdroje U_1.

Tranzistor lze pro vodivostní oblast nahradit modelem dle 13.32 (a). dostáváme pak náhradní obvod na obrázku 14.15 (b). Pro spínací tranzistory se obvykle udává minimální hodnota R_{DS} v katalogu pro $U_{GS} = 5$ nebo $10\,\mathrm{V}$. Typ tranzistoru volíme tak, aby platilo $R_z \gg R_{DS}$. Pak bude v sepnutém stavu úbytek napětí na tranzistoru (R_{DS}) zanedbatelný oproti napájecímu napětí U_N, resp. napětí U_z na zátěži.

Pokud je požadavek na uzemněnou zátěž, lze použít zapojení 14.16 (a). Tranzistor spíná při nízké (logické) úrovni $U_{1L} \approx 0$ a pro $U_N \gg U_{TO}$. K vypnutí tranzistoru dochází při horní úrovni řídícího napětí: $U_{1H} > U_N - U_{TO}$. V mnoha případech je však napájecí napětí U_N vyšší (min. o hodnotu $|U_{T0}|$) než horní úroveň řídícího napětí, pak nelze tranzistor „vypnout“ a pro spínání je nutné využít modifikaci zapojení (b), resp. (c).

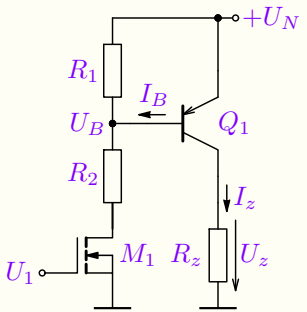


Obrázek 14.16: Obvod pro spínání uzemněné zátěže R_z pomocí unipolárního tranzistoru (a) a jeho modifikace s bipolárním (b) a unipolárním (c) tranzistorem v případě řídícího napětí $U_{1H} < U_N$.

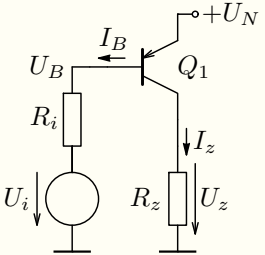
Vždy je třeba dodržet $|U_{GS}| < 20\,\mathrm{V}$ a dále dimenzovat průrazné napětí tranzistoru $U_{EC_{\max}} > U_N$, resp. $|U_{DS_{\max}}| > U_N$. Rezistory R_1, R_2 slouží k omezení proudu I_B, resp. napětí U_G, více viz následující příklad a přednášku.

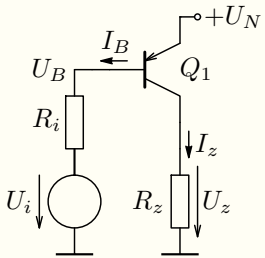
Příklad 14.2 Návrh spínacího obvodu

Zadání: Navrhněte spínací obvod pro uzemněnou odporovou zátěž $R_z = 60\,\Omega$ a napájecí napětí o velikosti $U_N = 30\,\mathrm{V}$. Uvažujte řídící napětí $U_{1L} = 0$ pro stav vypnuto a $U_{1H} = 5\,\mathrm{V}$ pro stav zapnuto ($5\,\mathrm{V}$ logika) a proudový zesilovací činitel bipolárního tranzistoru $\beta = 100$.



Řešení: Zadání řeší např. zapojení na obrázcích 14.16 (b), resp. (c). Vyjdeme např. z obrázku (b). Pro $U_1 = U_{1L}$ je tranzistor M_1 zavřený, tj. $I_{R_2} = 0$, pro $U_1 = U_{1H}$ připojí tranzistor M_1 rezistor R_2 na zemní potenciál. První část obvodu lze pak překreslit, jak je uvedeno na obrázku vpravo, přičemž $U_i = U_N$, $R_i = R_1$ pro $U_1 = U_{1L}$ a $U_i = \frac{U_N R_2}{R_1+R_2}$, $R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$ pro $U_1 = U_{1H}$. V prvním případě je tranzistor Q_1 evidentně uzavřen, ve druhém případě je pro jeho otevření do saturace určit správně relace odporů R_1, R_2.





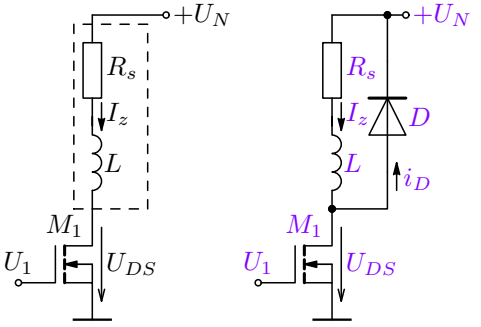
Hodnotu R_1 volíme tak, aby vyhovovala doba vypínání Q_1, tj. vybíjecí čas jeho parazitních kapacit přes R_1. Volme např. $R_1 = 2\,\mathrm{k\Omega}$, což je dostatečně malá hodnota pro relativně rychlé vypnutí i výkonnějších tranzistorů. Hodnotu R_2 určíme z následujících rovnice a volbě I_B při výše uvedených relacích:

$$U_i = \frac{U_N R_2}{R_1 + R_2}, \quad R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \quad R_1 = 2\,\mathrm{k\Omega}, \quad I_z \doteq \frac{U_N}{R_z},$$
$$I_B = 2\frac{I_z}{\beta} \doteq \frac{U_N - 0{,}7 - U_i}{R_i} \;\Rightarrow\; R_2 \doteq 2{,}8\,\mathrm{k\Omega}.$$

Spínání pomocí PNP, resp. P-MOS tranzistoru se často využívá k **připojování napájecího napětí**, viz např. TPS27081A. Jeho typické aplikace jsou uvedeny v datasheetu.

14.5.1. Spínání induktivní zátěže

Zvláštní pozornost je třeba věnovat indukčním zátěžím, např. cívka relé a pod. a jejich chování při rozpojování!



(a) – špatně (b) – správně

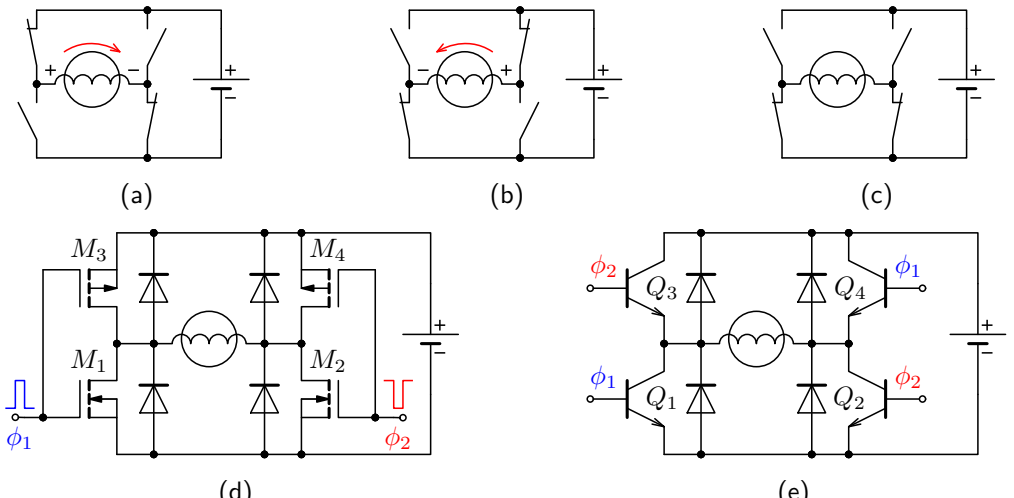
Obrázek 14.17: Spínání indukční zátěže: základní zapojení (a) a s ochrannou diodou (b) zamezující zničení tranzistoru při jeho vypínání.

Pokud vyjdeme ze základního chování induktoru a příkladu 4.6, je zřejmé, že obvod na obrázku 14.17 (a) nebude pracovat správně při rozpojení tranzistoru. Pokud teče induktorem proud $I_z \doteq U_N/R_s$ (tranzistor M_1 sepnut, ustálený stav), bude tento proud indukčnost vynucovat i v čase rozpojení $\Rightarrow$ na drainu tranzistoru M_1 vznikne napěťová špička, která tranzistor prorazí. Na její velikost lze jednoduše nahlížet díky skutečnosti $I_z = i_L(0_-) = i_L(0_+)$. Pokud si rozpojený tranzistor představíme jako rezistor o vysoké hodnotě R_p, bude v momentě rozpojení napětí $U_{DS} = R_p I_z$. To samozřejmě při dosažení průrazné hodnoty povede na poškození tranzistoru a tím vynucení proudu a rychlého „vybití“ induktoru.

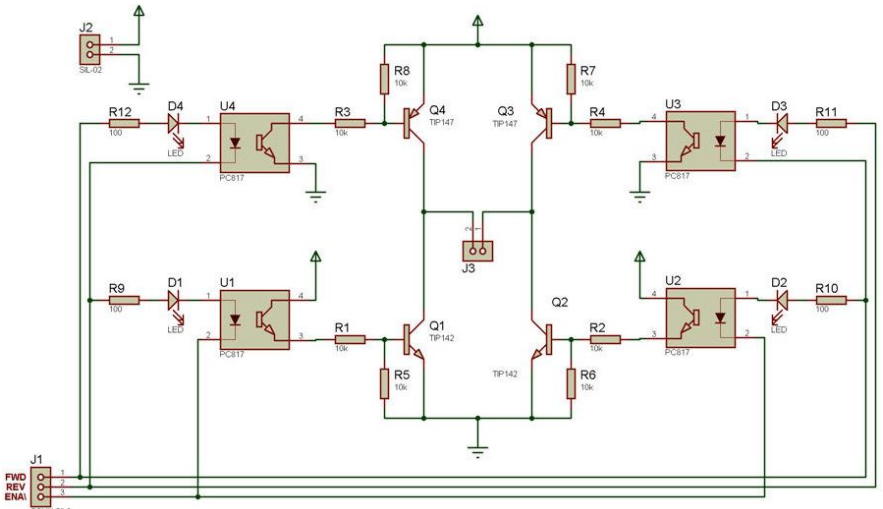
Řešením je přidání diody D, jak ukazuje obrázek (b). Ta při rozpojení tranzistoru odvede proudový pulz do napájecího zdroje, jak se lze přesvědčit analýzou. Viz také tuto analýzu.

Všimněte si, že **problém s napěťovými špičkami se nevyskytoval u spínacích obvodů s tyristory a triaky**. Důvodem je, že tento prvek nelze vypnout řídícím napětím/proudem, což může být nevýhoda, ale jejich vypnutí je dáno zánikem proudu, tj. pro $i_L(0_-) = i_L(0_+) = 0$, což je z tohoto pohledu nesporná výhoda.

14.5.2. H můstek – spínání stejnosměrného napětí s řízením polarity



Obrázek 14.18: Obvod pro spínání např. motoru s možností volby směru otáčení: (a) – (c) je ideové schéma se spínači, přičemž zapojení (c) slouží k brzdění motoru, (d) je zapojení s komplementárními MOS tranzistory (diody bývají čato součástí MOS tranzistorů) a (e) s bipolárními tranzistory pouze typu NPN (jejich řízení není uvedeno).

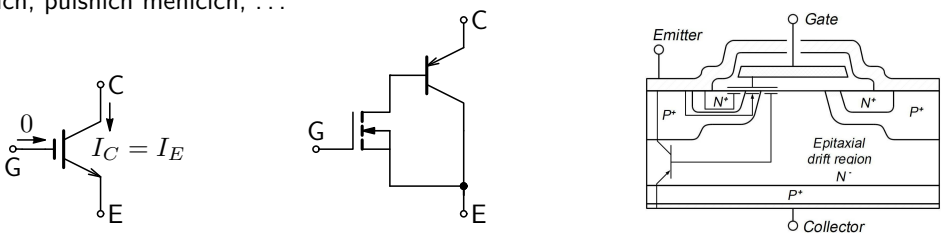


Obrázek 14.19: Ovládání tranzistorů H-můstku pomocí optočlenů (viz danyk.cz/). Zde není znázorněna ochrana tranzistorů při indukční zátěži – lze řešit i pomocí diaku zapojeného paralelně k zátěži.

Existuje celá řada IO pro tento účel, viz. např. L293, ZXMHC6A07T8, ...

14.5.3. IGBT – bipolární tranzistor s izolovaným hradlem

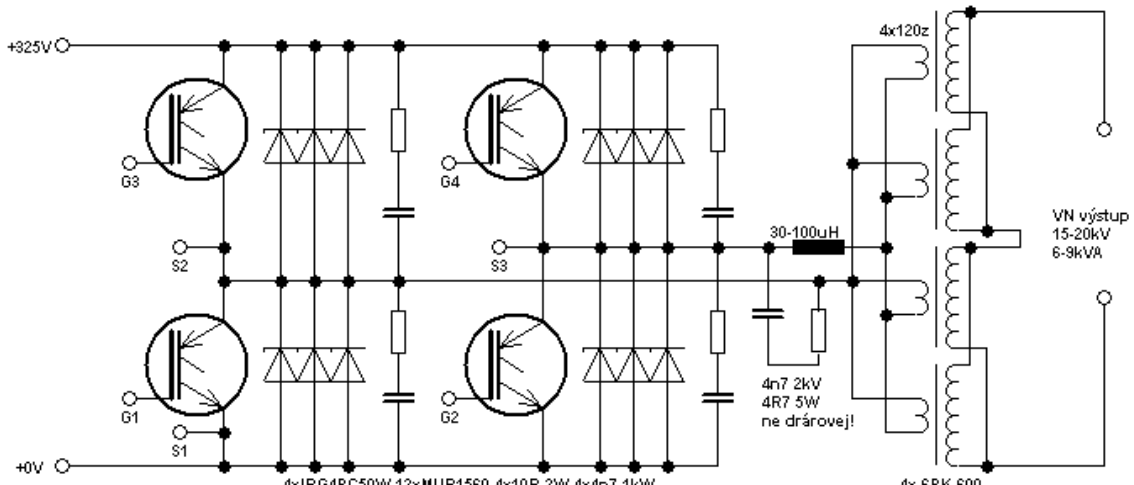
IGBT (Insulated Gate Bipolar Transistor) je prvek pro rychlé spínání velkých výkonů (napětí i proudů). Použití v usměrňovačích, pulsních měničích, ...



Obrázek 14.20: Značka, zjednodušené náhradní zapojení a struktura (převzato z wikipedia.org) IGBT.

Význačné vlastnosti:

- nezanedbatelný úbytek v sepnutém stavu, ale málo závislý na proudu (výhoda oproti MOSFETu),
- prakticky nulový řídící proud (pouze při přebíjení kapacity hradla – výhoda oproti BJT),
- možnost spínání velkých napětí ($> 1\,\mathrm{kV}$ – většinou lepší než BJT i MOSFET) i velkých proudů ($> 500\,\mathrm{A}$),
- rychlé výkonové spínání pro $f \leq 200\,\mathrm{kHz}$ – spínací časy lepší než BJT ($\mu\mathrm{s}$), ale horší než MOSFET (ns).
- některé typy mají záporný teplotní koeficient – nevhodné pro paralelní spojování (nevýhoda oproti MOSFET).
- existují typy tranzistorů MOSFET s lepšími parametry, ale za výrazně vyšší cenu než IGBT.

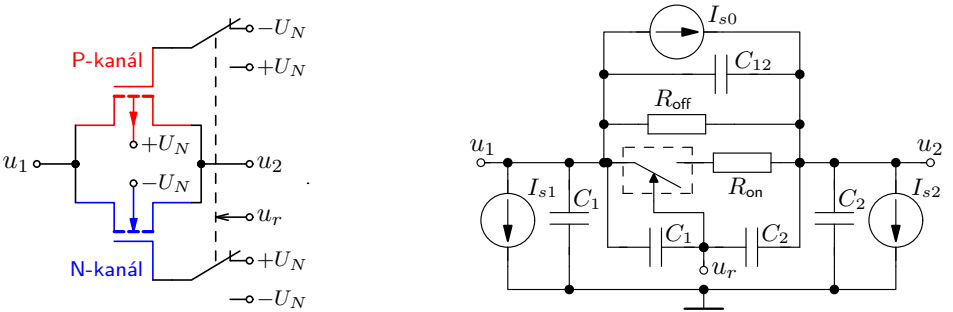


Obrázek 14.21: Jedna z možností použití IGBT tranzistorů v H-můstku vysokonapěťového spínaného zdroje (převzato z www.ek-web.wz.cz).

14.6. Spínání analogového signálu

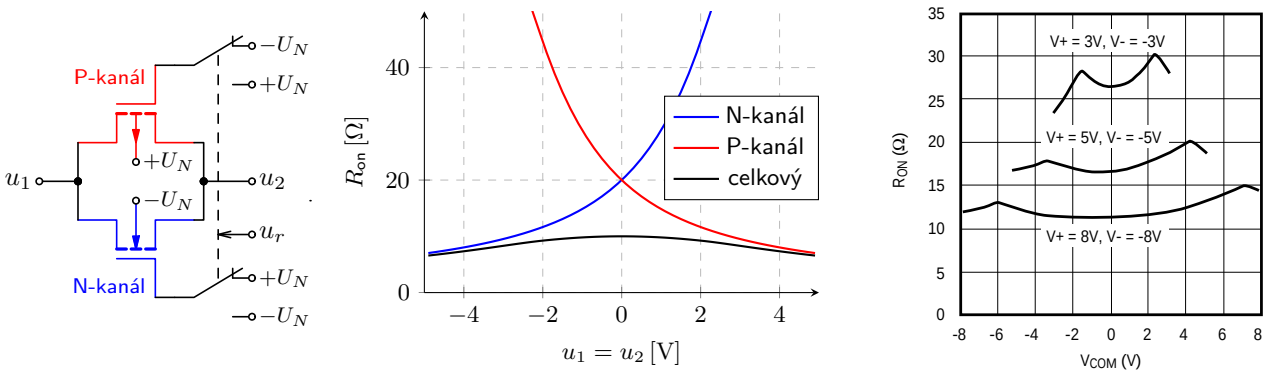
V předchozí podkapitole byl představen tranzistor ve funkci elektronického spínače jednosměrného proudu. V případě spínání obecného analogového signálu je však třeba spínat/vypínat střídavé napětí, resp. proud. Tento požadavek lze splnit níže uvedeným paralelním spojením dvou komplementárních MOS tranzistorů, kde N-kanálový tranzistor má substrát připojený na nejnižší a P-kanálový na nejvyšší napětí (napájecí). Řídícím napětím u_r na gate lze pak oba tranzistory sepnout (gate N-kanálového na $+U_N$ a P-kanálového na $-U_N$), resp. rozepnout (opačné polarity).

Toto zapojení se pak chová jako řízený spínač s nenulovým sériovým odporem R_{on} v sepnutém stavu, konečným odporem v R_{off} ve stavu rozepnutém, svodovými proudy a parazitními kapacitami, jak udává následující obrázek.



Obrázek 14.22: Zapojení analogového spínače a jeho náhradní schéma.

Proud (sepnutí) MOS tranzistoru závisí na velikosti napětí u_{GS}, jak víme z kapitoly 13.6.8. Je tedy zřejmé, že odpor v sepnutém stavu ($u_1 = u_2$) N-kanálového tranzistoru bude nejnižší pro $u_2 = -U_N$ a P-kanálového tranzistoru naopak pro $u_2 = -U_N$. Vzhledem k jejich paralelnímu spojení, je pak celkový odpor R_{on} malý v celém rozsahu spínaných napětí, jak ukazuje obrázek 14.23 (b), a klesá s velikostí napájecího napětí ($\pm U_N$, resp. V±), jak ilustruje charakteristika (c) konkrétního typu spínače MAX38x. Více viz přednáška.

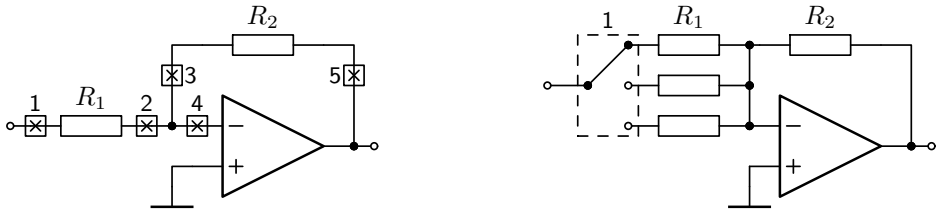


(a) (b) (c)

Obrázek 14.23: Zapojení analogového spínače (a), jeho náhradní schéma (b) a vlastnosti konkrétního typu (c) – převzato z www.maximintegrated.com.

14.6.1. Použití analogových spínačů pro přepínání zesílení

Uvažujme změnu zesílení zesilovače změnou velikosti odporu = přepnutím rezistoru v operační síti.



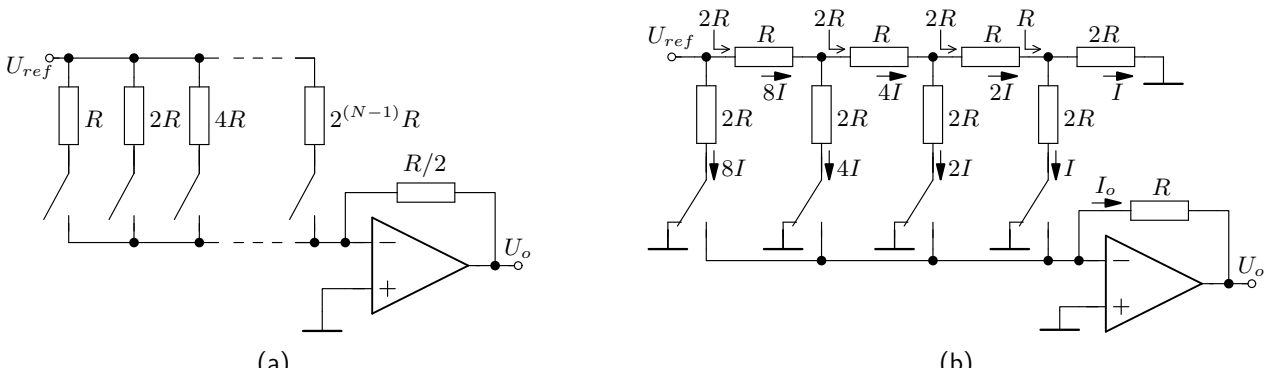
Obrázek 14.24: Možné umístění spínačů v operační síti a realizace polohy 1 pomocí multiplexeru (třech spínačů).

Diskuse k umístění spínačů:

1. uplatňuje se R_{on}, který je navíc modulovaný vstupním signálem, nerozpojuje ZV – nevhodné,
2. uplatňuje se R_{on}, který není modulovaný, nerozpojuje ZV – vhodné,
3. uplatňuje se R_{on}, který není modulovaný, rozpojuje ZV – méně vhodné,
4. přepíná se celá ZV síť (oba rezistory), neuplatňuje se R_{on}, který není modulovaný, rozpojuje ZV – vhodné při správném fázování spínačů,
5. uplatňuje se R_{on}, který je navíc modulovaný výstupním signálem, rozpojuje ZV – zcela nevhodné, více viz přednáška.

14.6.2. Použití analogových spínačů v konstrukci D/A převodníku

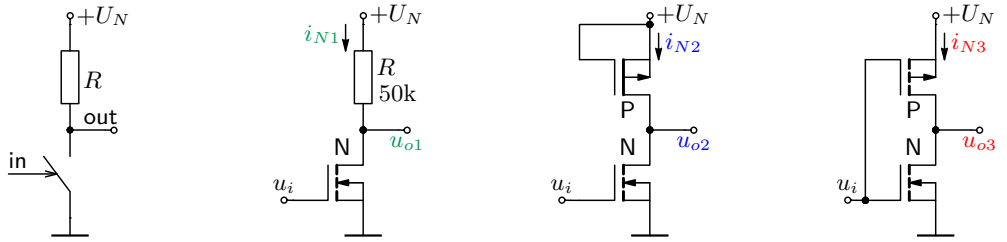
Analogové spínače se používají v mnoha, většinou „nízkoproudových“ aplikacích, jako je přepínání signálů (multiplexery), přepínání topologie obvodu jak pro změnu zesílení (uvedeno výše), tak např. pro implementaci D/A převodníku, jak ukazuje obrázek 14.25.



Obrázek 14.25: Přepínaná operační síť pro implementaci D/A převodníku, (a) ideové schéma, (b) použití R-2R sítě.

Pro minimalizaci rozsahu hodnot odporů, což je nezbytné zejména u vícebitových převodníků je výhodné použít tzv. R-2R. Používají se i kapacitní pole nebo tzv. proudový mód, což však přesahuje rozsah tohoto kurzu.

14.7. Spínací obvody digitálních systémů

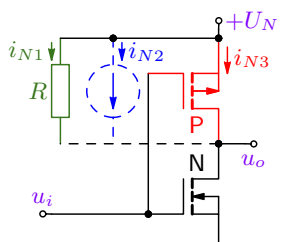


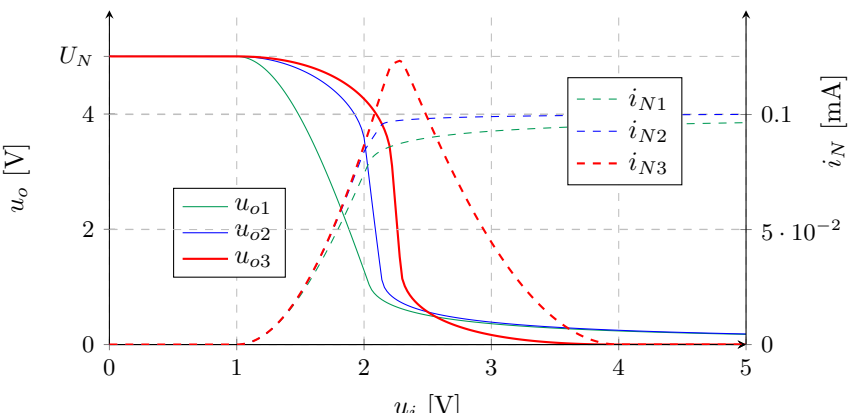
Obrázek 14.26: Principiální schéma invertoru (a), implementace spínače pomocí MOFETu s odporovou zátěží (b), s dynamickou (proudovou) zátěží (c) a CMOS implementace (d).

Nevýhody: implementace (b): malý sklon převodní charakteristiky v oblasti přepínání, implementace (b) i (c): proudový odběr při výstupu v log. 1, značný vliv velikosti odporové zátěže na úroveň log. 1 a zejména zpoždění náběžné hrany při kapacitní zátěži, viz. charakteristiky na obrázku 14.27 a analýzu.

Uvedené nevýhody odstraňuje implementace (d) – požívaná struktura v současných digitálních obvodech, která znamenala „revoluci“ digitální techniky.

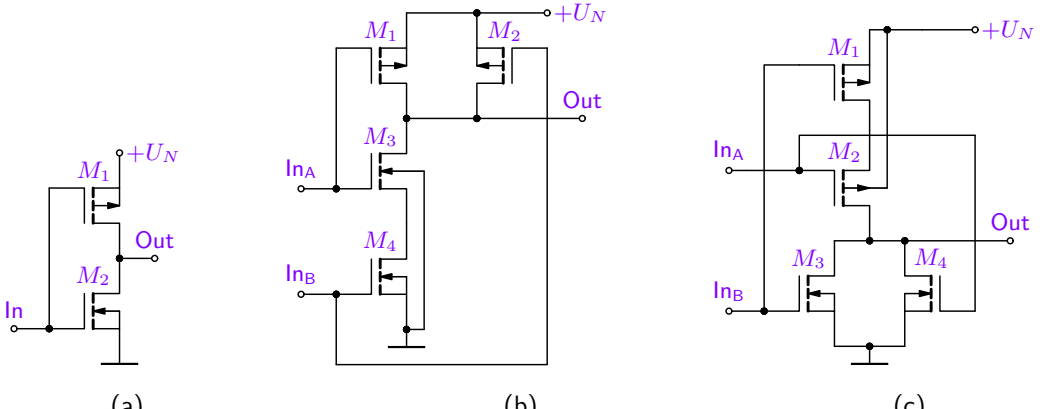
Uvedené nevýhody/nevýhody jsou zřejmé jak z funkce zapojení, tak z níže uvedených charakteristik. V případě implementace s odporem R vykazuje převodní charakteristika malý sklon, který je dán součinem $-g_m R$ (v této oblasti tranzistor pracuje jako zesilovač, viz obrázek 15.9 a vztahy (15.3), (15.38)). V případě implementace (c) pracuje tranzistor P jako zdroj proudu a v lineární oblasti pracuje zapojení jako zesilovač s dynamickou zátěží (viz sekci 16.2), čímž je sklon převodní charakteristiky větší. V implementaci (d) – CMOS se navíc oproti zapojení (c) uzavírá tranzistor P pro $u_i > 2{,}5\,\mathrm{V}$, čímž je pak klidový odběr invertoru prakticky nulový i pro u_o ve stavu log. 0. Více viz přednáška.





Obrázek 14.27: Znázornění různých implementací invertorů a jejich převodní a odběrové charakteristiky.

Ze zapojení invertoru vychází i konstrukce dalších zapojení logických obvodů, viz obrázek 14.28. V případě (b) se jedná o hradlo NAND, kde výstup je v log. 1, pokud jakýkoli vstup je ve stavu v log. 0 (jeden z tranzistorů M_1, M_2 je otevřen a jeden z tranzistorů M_3, M_4 uzavřen). Výstup bude ve stavu log. 0 pouze v případě, že oba vstupy jsou ve stavu v log. 1 (tranzistory M_1, M_2 uzavřeny a tranzistory M_3, M_4 otevřeny). Analogicky lze popsat i chování obvodu (c) – hradla NOR.



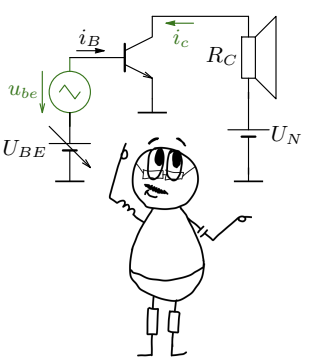
Obrázek 14.28: Základní hradla rodiny CMOS: invertor, NAND a NOR, (AND a OR dostaneme zařazením invertoru na výstup hradel NAND a NOR)

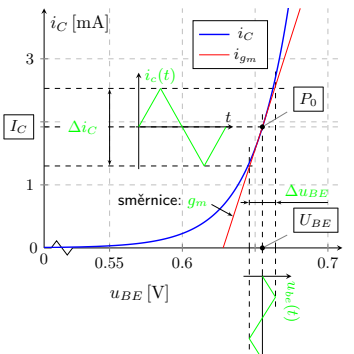
Poznámky XIV

Kapitola 15

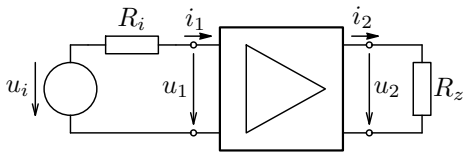
Tranzistor jako zesilovač signálu – jednostupňové zesilovače

Tato kapitola za zabývá konstrukcí a analýzou vlastností jednostupňových zesilovačů s bipolárními i unipolárními tranzistory. Uživatel se seznámí s principy funkce lineárního zesilování signálu pomocí tranzistoru a naučí se metodě linearizace, která je nezbytná pro analýzu parametrů uvedených zapojení. Dále si osvojí všechna základní zapojení jednostupňových zesilovačů a naučí se vypočítat jejich parametry. V závěru je pak uvedena analýza kmitočtových vlastností uvedených zapojení, tj, výpočet jejich dolního a odhad horního mezního kmitočtu.





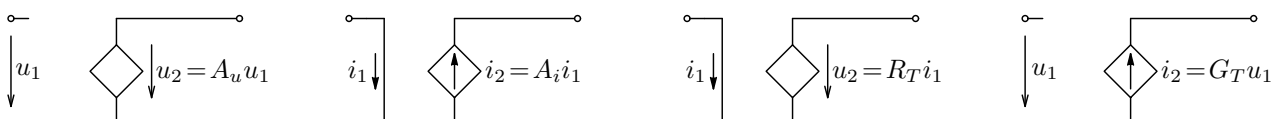
15.1. Úvod – co je zesilovač elektrického signálu



Obrázek 15.1: Základní uspořádání zesilovače

Zesilovač je elektronický lineární systém, který umožňuje zesilovat (násobit konstantou) vstupní signál (napětí u_1 resp. proud i_1) na signál výstupní. Používá se jak pro zesilování napětí (např. před ADC), tak proudu, resp. výkonu.

V ideálním případě si lze zesilovač představit jako řízený zdroj, přičemž řídící veličinou je vstupní signál a výstupní veličina je daná typem zdroje. Z tohoto pohledu tedy rozeznáváme čtyři typy ideálních zesilovačů:



(a) – napěťový (b) – proudový (c) – transimpedanční (d) – transadmitanční

Obrázek 15.2: Základní typy ideálních zesilovačů.

Implementace zesilovače vede na reálné vlastnosti, které lze charakterizovat následujícími elementárními modely, přičemž vstup a výstup mohou být galvanicky odděleny, což je naznačeno čárkovanou čarou. Výstup lze v reálném případě přepočítat pomocí Theveninova, resp. Nortnova teorému, takže se jedná v zásadě o jeden obvod.



Obrázek 15.3: Odporové modely reálných zesilovačů.

Je zřejmé, že tyto modely zanedbávají zpětný přenos, tedy přenos z výstupu zesilovače na jeho vstup a dále dynamické, resp. kmitočtové vlastnosti. Nicméně pro širokopásmové zesilovače charakterizují základní (odporové) chování reálných zesilovačů, tj. vstupní a výstupní odpor (R_i, R_o) a převodní konstantu (zesílení). Je zřejmé, že u_o resp. i_o lze řídit jak napětím u_1, tak proudem $i_1 = u_1/R_i$ a charakter výstupní brány je dán velikostí výstupního odporu: pro ideální napěťový výstup je $R_o \to 0$, pro proudový výstup je $R_o \to \infty$. Analogicky pro ideální napěťový vstup platí $R_i \to \infty$ a pro proudový $R_i \to 0$.

Řízený zdroj lze realizovat pomocí tranzistoru, tj. reálného a navíc nelineárního řízeného zdroje proudu. Pro realizaci lineárního zesilovače je třeba pracovat pouze v lineární části charakteristik tranzistoru. Tímto tématem se zabývá následující podkapitola.

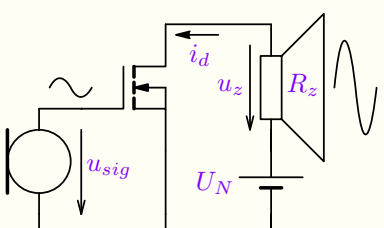
15.2. Metoda linearizace (úvod do tranzistorových zesilovačů)

15.2.1. Motivace

Příklad 15.1: Modelový zesilovač s tranzistorem MOSFET

Zadání: Zapojte MOSFET tak, aby elektrický signál (vstupní napětí u_{sig}) zesiloval na výstupní napětí u_z na odporové zátěži R_z.

Řešení: elektrické zapojení s odkazem na simulaci s komentářem.

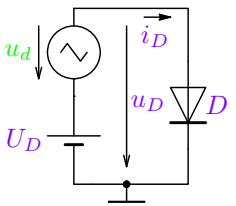


Komentář: Tranzistor může fungovat jako řízený zdroj proudu, tj. v případě transistoru MOS $i_D = f(u_{GS})$ v satruřační oblasti. Nejen k tomu je nutné napájení U_N (pokud chceme zesilovat i výkonově musí výkon „něco“ dodávat, zde je to napěťový zdroj U_N). Jak je dále zřejmé z výsledků experimentu a simulace, je pro správnou funkci nutná stejnosměrná složka vstupního signálu (nastavení tzv. pracovního bodu) tak, aby tranzistor pracoval v lineární části charakteristik. Pak je i_d i u_z lineárním násobkem u_{sig} a dochází k lineárnímu zesilování signálu, které lze kvantifikovat pomocí metody linearizace.

Experiment: viz přednáška, případně i analýzu.

Metodu linearizace vysvětlíme pro jednoduchost nejprve na diodě.

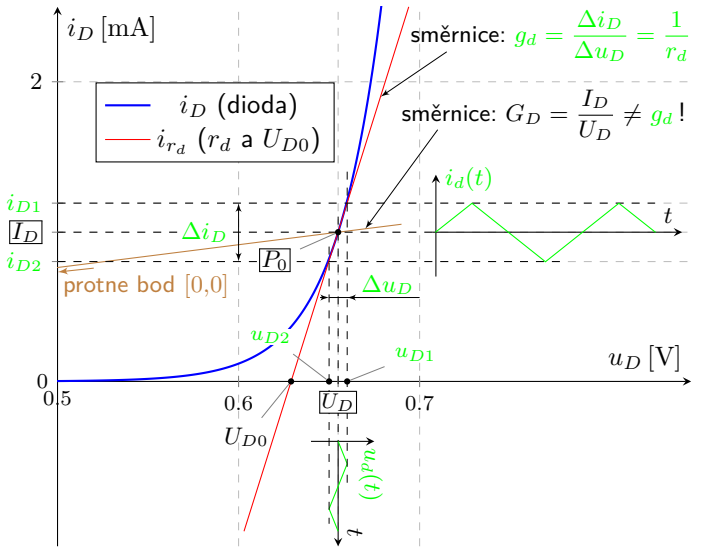
15.2.2. Linearizace polovodičové diody



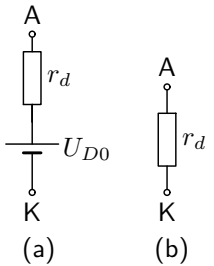
Polarizujme diodu dle schématu pomocí stejnosměrného napětí U_D, na němž je superponována střídavá složka u_d a spolu tvoří napětí na diodě u_D, viz obr. 15.4. Toto napětí vyvolá proud i_D a platí:

$$u_D(t) = U_D + u_d(t), \quad i_D(t) = I_D + i_d(t) \tag{15.1}$$

Stejnosměrnou složkou je definován tzv. pracovní bod P_0, v jehož okolí dochází ke změnám obvodových veličin, dle dané charakteristiky diody. Pokud je střídavé buzení $u_d(t)$ malé, lze pak změny proudu $i_d(t)$ určit i jednodušeji dle směrnice charakteristiky diody v pracovním bodě P_0, na rozdíl od nelineárního vztahu $i_D = I_S\left(e^{\frac{u_D}{NU_T}} - 1\right)$, kde pak nelze použít princip superpozice (oddělit U_D a u_d).



Obrázek 15.4: Linearizace charakteristiky diody v pracovním bodě P_0.



Obrázek 15.5: Linearizovaný statický model diody pro malé změny obvodových veličin v okolí P_0: (a) kompletní model a (b) model pro výpočet změn.

Směrnice charakteristiky diody v pracovním bodě P_0 je charakteristikou rezistoru r_d s posunem o U_{D0}, což lze realizovat stejnosměrným zdrojem, viz obrázek 15.5 (a). Pokud nás budou zajímat pouze změny obvodových veličin (střídavé složky signálů), lze zdroj U_D nahradit zkratem, jelikož vykazuje nulové změny (jedná se o stejnosměrný zdroj). **Pozor**, je nutné rozlišovat dynamické a statické veličiny: $g_d = \frac{1}{r_d} = \frac{\Delta i_D}{\Delta u_D} \neq \frac{I_D}{U_D} = G_D$!, viz obrázek 15.4.

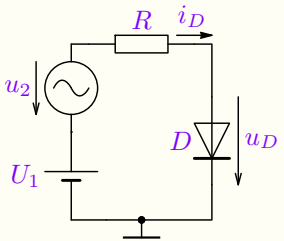
Hodnotu odporu r_d, resp. vodivosti g_d lze zjistit výpočtem směrnice charakteristiky v P_0. Tu zjistíme podílem změn, resp. derivací charakteristiky v P_0:

$$\boxed{g_d = \frac{1}{r_d}} = \left.\frac{\Delta i_D}{\Delta u_D}\right|_{P_0} = \left.\frac{i_d}{u_d}\right|_{P_0} = \left.\frac{\partial i_D}{\partial u_D}\right|_{P_0:(u_D=U_D)} = \left.\frac{\partial I_S\left(e^{\frac{u_D}{NU_T}}-1\right)}{\partial u_D}\right|_{P_0} =$$

$$= \frac{1}{NU_T}\left(I_S e^{\frac{U_D}{NU_T}}\right) \boxed{\doteq \frac{1}{NU_T} I_D \doteq 38 I_D \doteq 40 I_D} \quad \text{pro pokojovou teplotu.} \tag{15.2}$$

Ve výsledném vztahu (15.2) je zanedbán proud I_S vůči proudu I_D v pracovním bodě, což lze bez problému učinit vzhledem jejich k obvyklým velikostem (např. $I_S < 1\,\mathrm{pA}$, $I_D \approx 1\,\mathrm{mA}$). Hodnota r_d závisí lineárně na I_D v pracovním bodě (dáno exponenciální závislostí), což je důležitý poznatek a budeme ho využívat i u bipolárního tranzistoru. Buzení proudu diody ideálním zdrojem napětí nelze v praxi použít díky teplotní závislosti i_D, více viz přednáška.

Příklad 15.2



Zadání: Vypočítejte střídavou složku napětí na diodě u_d, pokud je zadáno: stejnosměrné předpětí $U_1 = 5{,}7\,\mathrm{V}$, střídavé buzení $u_2 = 1\,\mathrm{V}$ a $R = 5\,\mathrm{k\Omega}$.

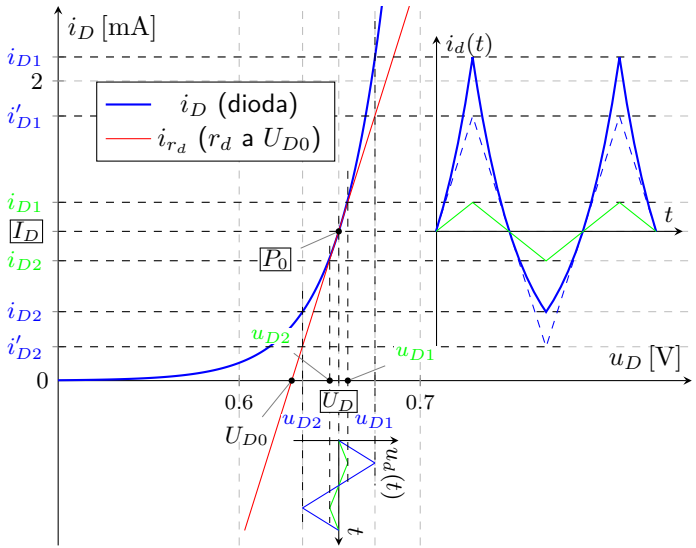
Řešení: Vzhledem k tomu, že nejsou zadané parametry diody, předpokládejme křemíkovou diodu, na které bude úbytek v P_0 cca $U_D \approx 0{,}7\,\mathrm{V}$. Při „ručním“ výpočtu pracovního bodu neřešíme nelineární rovnici – neuvažujeme exponenciální závislost. To si lze dovolit vzhledem k charakteru nelinearity diody - její napěťový úbytek se pro široký rozsah proudů pohybuje v rozmezí cca $0{,}6$ až $0{,}8\,\mathrm{V}$. Lze si ověřit, že touto volbou neuděláme velkou chybu.

Pak je výpočet velmi snadný. Proud I_D v P_0 a hodnota linearizovaného rezistoru r_d je dle (15.2) dána

$$I_D = \frac{U_1 - 0{,}7}{R} \doteq 1\,\mathrm{mA}, \qquad g_d \doteq 40 I_D = 40\,\mathrm{mS}, \qquad r_d = \frac{1}{g_d} = 25\,\Omega.$$

Zapojení nyní můžeme překreslit pro změny obvodových veličin (střídavé veličiny), kde zdroj U_1 nahradíme zkratem, jelikož jeho změny jsou nulové a diodu nahradíme rezistorem r_d dle obrázku 15.5 (b) s výše určenou hodnotou. Výpočet je pak už elementární. Výsledky porovnej se simulací. **Komentář:** viz přednáška, včetně grafického řešení.

$$u_d = u_2 \frac{r_d}{R + r_d} \doteq 5\,\mathrm{mV}.$$



Obrázek 15.6: Zkreslení signálu na diodě díky velkému buzení.

Využívání lineární oblasti nelineárních prvků (zejména tranzistorů) je nezbytné pro lineární operace analogových obvodů (např. zesílení). Linearizace je efektivní nástroj pro výpočet parametrů systémů. Platí však pouze za předpokladu malého buzení. Pokud bude buzení velké, nelinearita se projeví na zkreslení signálu, viz obrázek 15.6. Nelze přesně určit velikost „malého buzení“. Navíc se tato hodnota evidentně mění s polohou P_0 - mluvíme o **relativně malém buzení** a míru zkreslení je třeba ověřovat numerickou simulací.

V dalších případech budeme používat stejnou symboliku značení, která byla zavedena vztahem (15.1): např. pro FET je pak napětí mezi G-S: u_{GS}, tj. střídavá složka u_{gs} superponovaná na stejnosměrnou složku U_{GS}, udávající polohu pracovního bodu na ose u_{GS}. Obdobně je značen i proud drainem i_D, atd.

Linearizovaný dynamický model diody

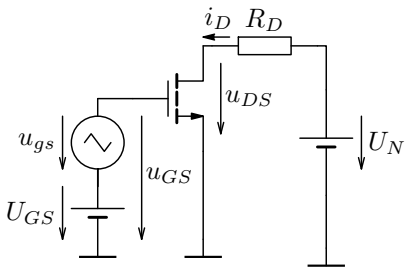
Pokud chceme modelovat diodu i pro dynamické děje (vyšší kmitočty, či jednorázové rychlé děje), je nutné ke statickému modelu přidat odpovídající akumulační prvky – v tomto případě kapacitor C_d, případně i sériový odpor r_s, viz obrázek 15.7. Kapacita je pak dána hodnotou difuzní, resp. bariérové kapacity v pracovním bodě (záleží na polarizaci – propustný, resp. závěrný směr) dle vztahů (13.3) a (13.2).



(a) (b)

Obrázek 15.7: Linearizovaný model diody s akumulačními prvky, (a) základní, (b) včetně sériového odporu.

15.2.3. Linearizace unipolárního tranzistoru



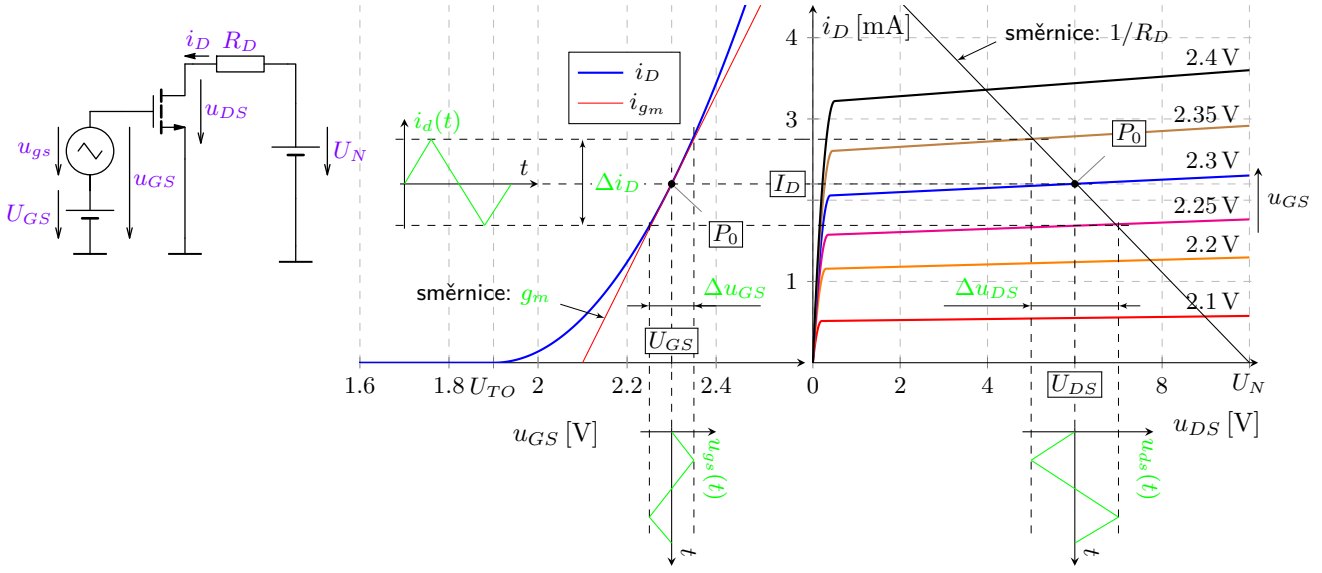
Obrázek 15.8: Zapojení MOSFETu jako zesilovače signálu pro ilustraci linearizace jeho charakteristik.

Analogicky jako u diody lze linearizovat charakteristiky FETu a získat jeho linearizovaný model. Budeme se zabývat saturační oblastí, kde lze tranzistor provozovat jako zesilovač, tj. zdroj proudu i_D řízený napětím u_{GS} viz. obrázek 13.30. Je tedy třeba linearizovat převodní charakteristiku $i_D = f(u_{GS})$ v okolí pracovního bodu P_0. Grafické znázornění linearizace převodní charakteristiky je na obrázku 15.9. V saturační oblasti platí pro proud i_D vztah (13.12), případně (13.16) a její linearizací (výpočtem směrnice) v P_0 získáme tzv. převodní vodivost g_m:

$$g_m = \left.\frac{\partial i_D}{\partial u_{GS}}\right|_{P_0:\ (u_{GS}=U_{GS})} = K_P \frac{W}{L}(U_{GS} - U_{TO}) \quad \text{pro N-kanál} \quad (15.3)$$

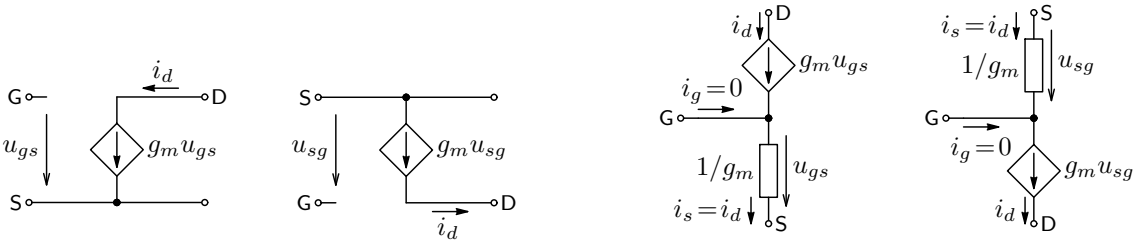
Tento vztah lze použít pro oba typy kanálů, ale v případě P-kanál vyjde záporná hodnota g_m. Vzhledem k tomu, že proud i_D je u P-kanálu orientován obráceně (ven z tranzistoru), můžeme jeho směr obrátit a znaménko g_m změnit na kladné. Tím dostáváme stejný model jak pro N, tak P-kanál a transkonduktance je pak dána vztahem (15.4), resp. (15.5). Linearizované modely jsou na obrázku 15.10, kde jsou i modely pro P-kanál. Pokud však obrátíme řídící napětí z u_{sg} na $u_{gs} = -u_{sg}$, obrátí se tím i směr proudu i_d a modely jsou identické – u linearizovaných modelů není třeba rozlišovat P a N kanál. Na obrázku 15.10 jsou uvedeny i T modely, kde evidentně platí $i_d = g_m u_{gs}$ a pro i_s z Ohmova zákona $i_s = \frac{u_{gs}}{1/g_m} = i_d$ a tím musí být $i_g = 0$, tj. modely T jsou identické s modely Π.

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL



Obrázek 15.9: Linearizace charakteristik tranzistoru řízeného polem v pracovním bodě P_0, viz i analýzu.

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL



(a) N-kanál (b) P-kanál (c) N-kanál (d) P-kanál

Obrázek 15.10: Elementární linearizované modely Π (a) a (b) a modely T (c) a (d) unipolárního tranzistoru.

$$\boxed{g_m} = \left.\frac{\partial i_D}{\partial u_{GS}}\right|_{P_0:\ (u_{GS}=U_{GS})} \boxed{= K_P \frac{W}{L} |U_{GS} - U_{TO}| = \sqrt{2\frac{W}{L}}\sqrt{K_P I_D}} \quad \text{pro MOSFET a} \quad (15.4)$$

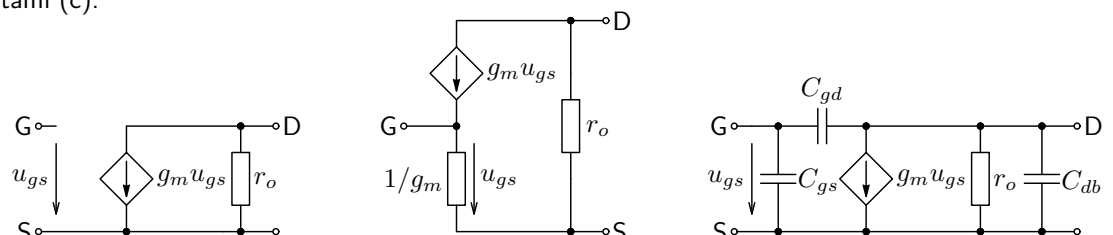
$$\boxed{= 2K_\beta |U_{GS} - U_{TO}| = 2\sqrt{K_\beta I_D}} \quad \text{pro JFET.} \quad (15.5)$$

V případě vodivostní oblasti tranzistor nahradíme pouze rezistorem r_{ds} (mezi D-S) dle obrázku 13.32, pro který platí vztah (13.19), kde pouze dosadíme hodnoty v P_0, tj. za u_{GS} dosadíme U_{GS}. Obecně (i pro P-kanál) je třeba jako u g_m výše použít absolutní hodnotu.

Pokud je třeba modelovat i sklon výstupních charakteristik v saturační oblasti, obohatíme model o výstupní odpor r_o, jehož velikost získáme linearizací, tj. derivací vztahu (13.14), resp. (13.17) v pracovním bodě ($u_{GS} = U_{GS}$):

$$\boxed{\frac{1}{r_o} = g_o} = \left.\frac{\partial i_D}{\partial u_{DS}}\right|_{P_0} \boxed{= I_D|\lambda|} \tag{15.6}$$

kde λ je zde v absolutní hodnotě, jelikož se pro P-kanál mění polarita u_{GS}, U_{TO}, u_{DS} i λ, viz Tab. 13.1.[1] Výsledné linearizované modely unipolárních tranzistorů jsou na obrázku 15.11 (a), (b) a dynamický model s parazitními kapacitami (c).



(a) Π-model (b) T-model (c)

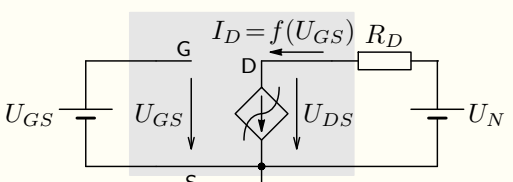
Obrázek 15.11: Linearizované odporové modely unipolárních tranzistorů včetně výstupního odporu (a) a (b) a linearizovaný model unipolárního tranzistoru pro vyšší kmitočty (c).

[1] V simulačních programech se však λ udává kladně (absolutní hodnota).

Příklad 15.3

Zadání: Vypočítejte amplitudu střídavé složky napětí u_{ds} dle schématu 15.9, pokud je zadáno: napájecí napětí $U_N = 10\,\mathrm{V}$, amplituda střídavého buzení $u_{gs} = 50\,\mathrm{mV}$ se stejnosměrným předpětím $U_{GS} = 2{,}3\,\mathrm{V}$, $R_D = 1{,}8\,\mathrm{k\Omega}$ a parametry tranzistoru: $U_{TO} = 1{,}9\,\mathrm{V}$, $K_P = 1{,}6\,\mathrm{mA/V^2}$, $W/L = 16$.

Řešení: Předpokládáme malé buzení v okolí P_0, kde lze výpočet provést pomocí linearizace. Nejprve je však nutné vypočítat pracovní bod, aby bylo možné zjistit parametry linearizovaného modelu. V tomto případě nelze požít postup jako u diody, kdy jsme vzhledem k exponenciální závislosti i_D na u_D odhadli U_D. V tomto případě je závislost kvadratická a obvodové veličiny v P_0 je nutné určit výpočtem. Tranzistor nahradíme statickým nelineárním modelem dle 13.30 (a) a I_D určíme dle vztahu (13.12), jelikož se má jednat o zesilovač a tudíž budeme předpokládat, že tranzistor pracuje v saturační oblasti, pak lze napsat:

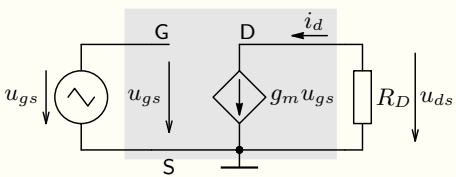


$$U_{GS} = 2{,}3\,\mathrm{V},\ I_D = 1/2 \cdot 16 \cdot 1{,}6 \cdot (2{,}3 - 1{,}9)^2 = 2{,}048\,\mathrm{mA}.$$

Předpoklad saturační oblasti je nutné ověřit: $U_{DS} = U_N - R_D I_D \doteq 6{,}3\,\mathrm{V} > U_{GS} - U_{TO} = 0{,}4\,\mathrm{V} \Rightarrow$ **platí!**
Pak už lze dle (15.4) určit transkonduktanci:

$$g_m = \sqrt{32}\sqrt{1{,}6 \cdot 2{,}048} = 10{,}24\,\mathrm{mS}.$$

Nyní už lze přistoupit k výpočtu vlastních střídavých veličin. Tranzistor tedy nahradíme linearizovaným modelem dle obrázku 15.10 (a) a celé zapojení 15.9 překreslíme pro výpočet změn obvodových veličin (střídavé složky). To v našem případě znamená, že nahradíme oba stejnosměrné zdroje (U_{GS} a U_N) zkratem (mají nulovou střídavou složku), viz obrázek 15.12.



Pro požadovanou amplitudu střídavé složky napětí u_{ds} evidentně platí:

$$u_{ds} = -i_d R_D = -g_m u_{gs} R_D \doteq 920\,\mathrm{mV}.$$

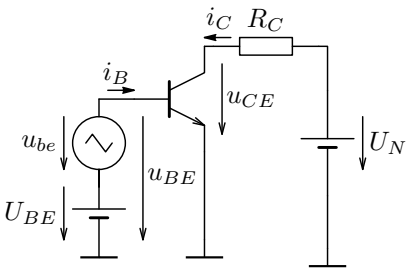
Znaménko mínus značí, že výstupní napětí má oproti vstupnímu napětí otočenou fázi o 180° a výstupní napětí je více jak $18\times$ větší než napětí vstupní. Zesilovač zesiluje a zesílení je $-g_m R_D$!

Obrázek 15.12: Náhradní lineární zapojení pro výpočet střídavých veličin s modelem Π MOSFETu.

Při výpočtu nebyl použit náhradní obvod tranzistoru s výstupním odporem, jelikož nebyl zadán parametr λ. I v případě jeho zadání provedeme výpočet P_0 bez jeho uvažování, tj. dle 13.12 s malým vlivem na přesnost výpočtu I_D, tj. i g_m. Pro střídavé veličiny je v některých případech r_o nutné použít (viz dále).

Výsledky lze ověřit jednak přibližně na grafickém řešení – viz obrázek 15.9, jednak přesněji pomocí analýzy (viz komentář v aplikaci pod schématem).

15.2.4. Linearizace bipolárního tranzistoru



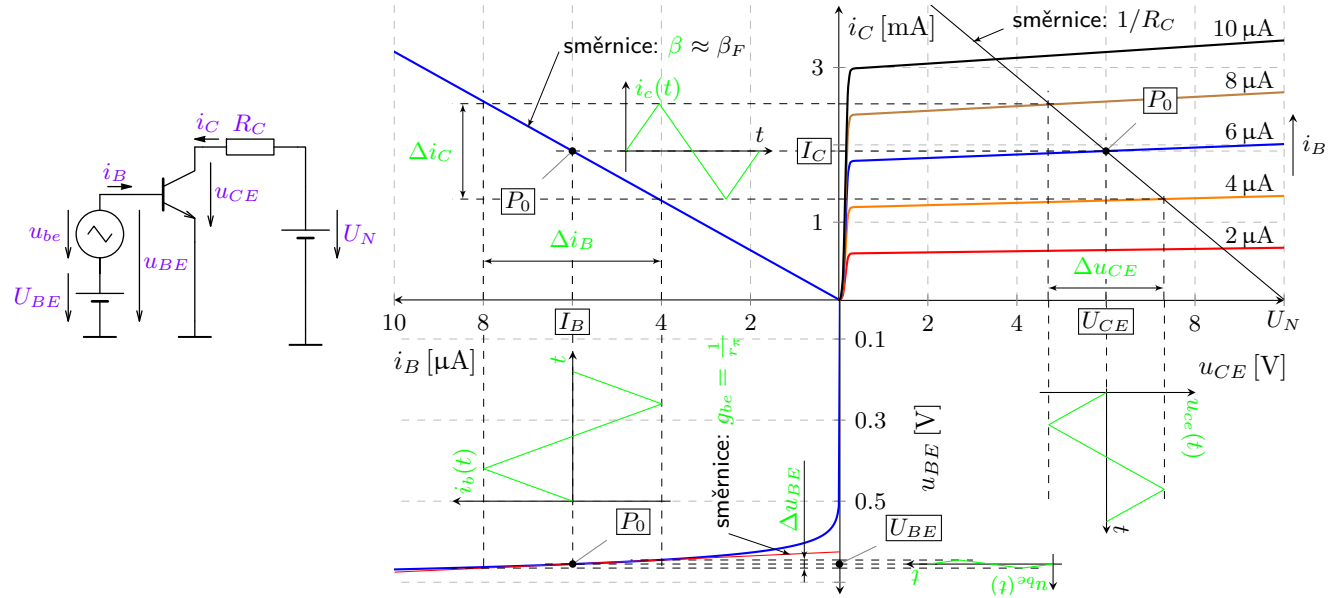
Obrázek 15.13: Zapojení bipolárního tranzistoru jako zesilovače signálu pro ilustraci linearizace jeho charakteristik.

Linearizace charakteristik bipolárního tranzistoru je obdoba případu s unipolárním tranzistorem v sekci 15.2.3. Budeme se zabývat aktivním režimem (přechod B-E polarizován v propustném a B-C v závěrném směru). V tomto režimu může bipolární tranzistor, stejně jako unipolární tranzistor v saturační oblasti, pracovat jako zesilovač, tj. zdroj proudu i_C řízený napětím u_{BE}, resp. proudem i_B, viz. obrázek 13.14 a vztah (13.4). V tomto případě je třeba linearizovat vstupní charakteristiku $i_B = f(u_{BE})$ (to v případě FETu nebylo třeba díky $i_G = 0$), resp. nepřímo převodní charakteristiku $i_C = f(u_{BE})$ vzhledem ke vztahu (13.7), podobně jako u tranzistorů FET. Grafické znázornění linearizace charakteristik NPN tranzistoru je na obrázku 15.14 a linearizace převodní charakteristiky $i_C = f(u_{BE})$ na obrázku 15.15, přičemž uvažujeme, že tranzistor pracuje v aktivním režimu, kde platí vztah (13.7), tj. $i_C = \beta_F i_B$. Více viz přednáška.

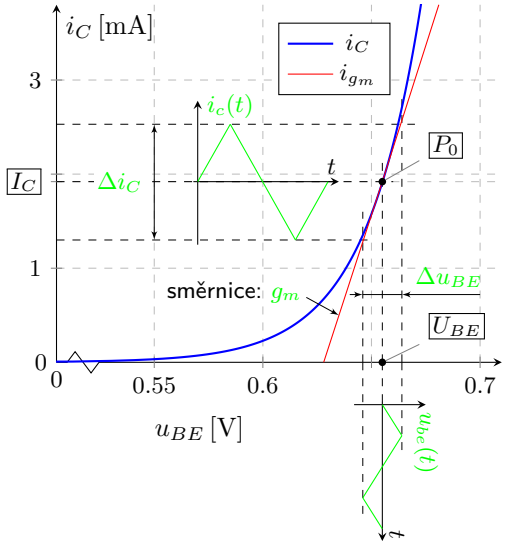
Tak jako v předchozích případech jsou značením odděleny stejnosměrné veličiny (např. I_C), které nastavují pracovní bod P_0 od malých změn obvodových veličin (střídavých, např. $i_c \approx \Delta i_C$), které mění hodnoty veličin v lineárních úsecích charakteristik v okolí P_0:

$$u_{BE} = U_{BE} + u_{be}, \quad u_{CE} = U_{CE} + u_{ce}, \quad i_B = I_B + i_b, \quad i_C = I_C + i_c, \ \ldots$$

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL



Obrázek 15.14: Linearizace charakteristik bipolárního NPN tranzistoru v pracovním bodě P_0.



Obrázek 15.15: Linearizace převodní charakteristiky bipolárního tranzistoru v pracovním bodě P_0.

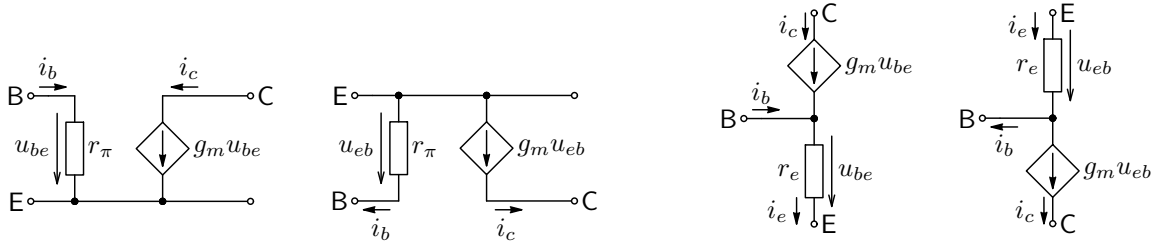
Pokud tranzistor pracuje v aktivní oblasti lze využít vztahu (13.4), což je převodní charakteristika jako $i_C = f(u_{BE})$, tj. podobně jako u FETu. Její linearizací v pracovním bodě P_0 dle obrázku 15.15 dostaneme výpočtem vztah pro transkonduktanci g_m a vzhledem k (13.7) i pro vstupní vodivost g_π:

$$\boxed{g_m} = \left.\frac{i_c}{u_{be}}\right|_{P_0} = \left.\frac{\partial i_C}{\partial u_{BE}}\right|_{P_0:\ (u_{BE}=U_{BE})} = \left.\frac{\partial i_C}{\partial u_{BE}}\right|_{P_0} = \frac{I_S\, e^{\frac{U_{BE}}{N_F U_T}}}{N_F U_T} \boxed{\doteq \frac{I_C}{N_F U_T} \doteq 40 I_C}. \quad (15.7)$$

$$\boxed{g_\pi = \frac{1}{r_\pi}} = \left.\frac{\partial i_B}{\partial u_{BE}}\right|_{P_0} = \left.\frac{\partial \frac{i_C}{\beta_F}}{\partial u_{BE}}\right|_{P_0} = \frac{1}{\beta}\left.\frac{\partial i_C}{\partial u_{BE}}\right|_{P_0} \boxed{= \frac{g_m}{\beta}}, \quad (15.8)$$

kde $\beta = \frac{i_c}{i_b} = \frac{\Delta i_C}{\Delta i_B}$ je linearizovaný parametr – směrnice převodní charakteristiky $i_C = f(u_{BE})$ v P_0. Vzhledem k linearitě této charakteristiky však můžeme psát $\beta \doteq \beta_F = \frac{i_C}{i_B}$ a tím předpokládat, že α_F i β_F *jsou konstanty nezávislé na* u_{BE}.

Model bipolárního tranzistoru lze sestavit podobně modelu unipolárnío tranzistoru s tím rozdílem, že do $i_b \neq 0$, tj. existuje nenulová vstupní vodivost $g_\pi = 1/r_\pi$, viz obrázek 15.10 (a).



(a) NPN – Π (b) PNP – Π (c) NPN – T (d) PNP – T

Obrázek 15.16: Elementární linearizované Π a T modely bipolárního tranzistoru.

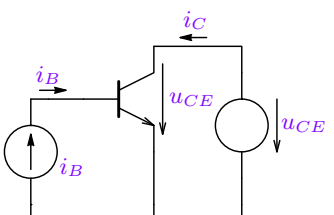
Mimo Π-modelu lze s výhodou použít i model T a pokud mají být oba modely ekvivalentní, musí platit:

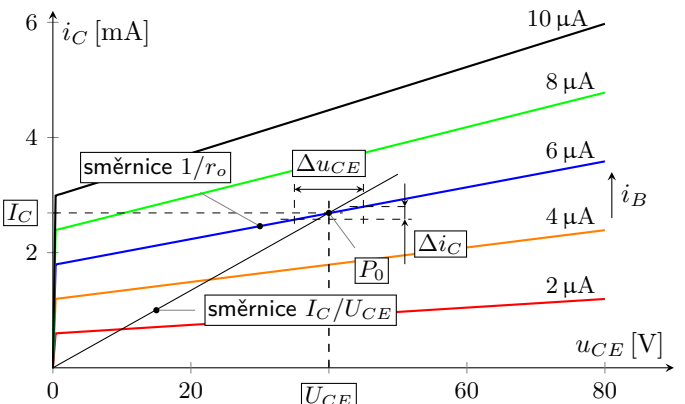
$$\boxed{\frac{1}{r_e} = g_e} = \frac{i_e}{u_{be}} = \frac{i_c}{\alpha u_{be}} \boxed{= \frac{g_m}{\alpha} = \frac{\beta}{r_\pi \alpha} = \frac{\beta+1}{r_\pi}}, \tag{15.9}$$

jelikož $i_e = i_c + i_b = i_b(\beta+1) = i_c/\alpha$, $r_\pi = u_{be}/i_b$ a $\alpha = \frac{i_c}{i_e} = \frac{\beta}{1+\beta}$, viz (13.8). Adekvátně pak lze sestavit i modely PNP tranzistoru, který je modelován jako proudový zdroj řízený napětím u_{eb}, viz. (13.9). Pokud tedy stejně jako u FETu obrátíme řídící napětí z u_{eb} na $u_{be} = -u_{eb}$, obrátí se tím i směr proudu i_c a **modely jsou identické**.

Linearizací jsme přešli od statických parametrů α_F a β_F k diferenciálním (linearizovaným) α a β, viz stranu XV-18. To dobře ilustruje i obrázek 15.17 objasňující linearizaci výstupního odporu. Statický odpor je podíl absolutních hodnot $\frac{U_{CE}}{I_C}$, zatímco diferenciální parametr r_o je podílem změn $\frac{\Delta u_{CE}}{\Delta i_C}$ v P_0, resp. derivací vztahu (13.10) podle u_{CE}, případně (13.11) podle u_{EC} v pracovním bodě P_0:

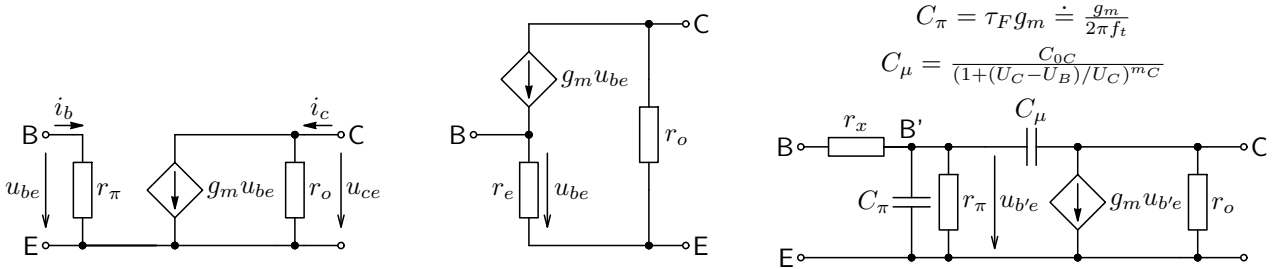
$$\frac{1}{r_o} = g_o = \left.\frac{\Delta i_C}{\Delta u_{CE}}\right|_{P_0} = \left.\frac{i_c}{u_{ce}}\right|_{P_0} = \left.\frac{\partial i_C}{\partial u_{CE}}\right|_{P_0} = \frac{I_C}{U_A} \qquad (15.10)$$





Obrázek 15.17: Linearizace výstupní charakteristiky (výstupního odporu) bipolárního NPN tranzistoru v P_0.

Analogicky jako u FETů lze linearizované modely obohatit i o výstupní odpor, modelující sklon výstupních charakteristik, jehož hodnota je v P_0 určena vztahem (15.10). Statické modely jsou uvedeny na obrázku 15.18 (a) a (b). Na obrázku 15.18 (c) je dynamický model, který navíc obsahuje parazitní kapacity přechodů a sériový odpor oblasti báze. Ten je je nezbytný uvažovat právě při simulacích pro vyšší kmitočty (viz podkapitolu 15.6.4).

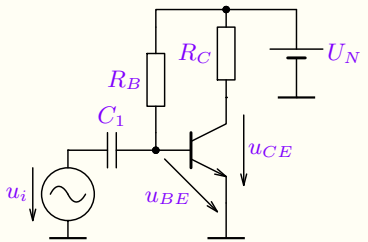


(a) Π-model (b) T-model (c)

Obrázek 15.18: Linearizované odporové modely bipolárních tranzistorů včetně výstupního odporu (a) a (b) a linearizovaný model bipolárního tranzistoru pro vyšší kmitočty (c), kde f_t je tranzitní kmitočet tranzistoru.

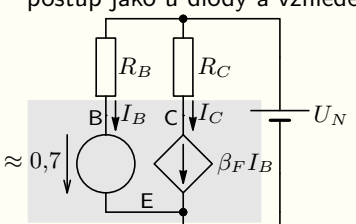
Dále již nebudeme rozlišovat linearizované modely tranzistorů NPN a PNP, resp. N- a P-kanálu unipolárních tranzistorů a budeme jednotně používat modely 15.16 (a), (b), resp. 15.10 (a), (b), případně modely s výstupním odporem.

Příklad 15.4



Zadání: Vypočítejte střídavou složku napětí u_{ce} obvodu dle schématu, pokud je zadáno: $U_N = 10\,\mathrm{V}$, $u_i = 10\,\mathrm{mV}$, $R_B = 1{,}55\,\mathrm{M\Omega}$, $R_C = 2{,}1\,\mathrm{k\Omega}$, $C_1 \to \infty$ a proudový zesilovací činitel tranzistoru $\beta_F = 300$. Jaký je rozdíl mezi napětím u_{ce} a u_{CE}? Jak se změní výsledek, pokud budeme pro výpočet střídavé složky uvažovat Earlyho napětí tranzistoru $U_A = 80\,\mathrm{V}$?

Řešení: Předpokládáme malé buzení v okolí P_0, kde lze výpočet provést pomocí linearizace. Nejprve je však nutné vypočítat pracovní bod P_0 a parametry linearizovaného modelu. Pro výpočet P_0 požijeme stejný postup jako u diody a vzhledem k exponenciální závislosti i_B na u_{BE}.



Dále předpokládejme, že tranzistor pracuje v aktivní oblasti, tj. platí $i_C = \beta_F i_B$ a pro výpočet P_0 lze použít náhradní obvod dle schématu vlevo. Pak:

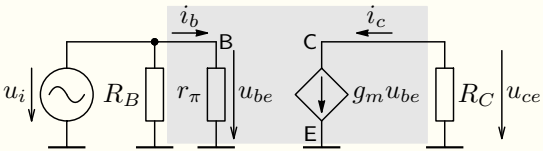
$$I_B \doteq \frac{U_N - 0{,}7}{R_B} = 6\,\mu\mathrm{A}, \quad I_C = \beta_F I_B \doteq 1{,}8\,\mathrm{mA}. \tag{15.11}$$

Předpoklad aktivního režimu je nutné ověřit: $U_{CE} = U_N - R_C I_C \doteq 6{,}2\,\mathrm{V} > 0{,}3\,\mathrm{V} \Rightarrow$ předpoklad **platí** i s rezervou na střídavou složku.

Pak už lze dle (15.7) a (15.8) určit g_m a r_π:

$$g_m \doteq 40 \cdot I_C \doteq 72\,\mathrm{mS}, \quad r_\pi = \frac{\beta}{g_m} \doteq 4{,}2\,\mathrm{k\Omega}$$

a sestavit náhradní obvod pro změny obvodových veličin (střídavé parametry), přičemž tranzistor nahradíme např. náhradním zapojením 15.16.



Vzhledem k zadání ($C_1 \to \infty$) lze kapacitor pro střídavé veličiny prakticky jakéhokoli kmitočtu nahradit zkratem, což platí i pro stejnosměrný zdroj U_N jako v příkladě 15.3. Z náhradního obvodu evidentně platí:

$$u_{be} = u_i, \quad i_c = g_m u_{be} \;\Rightarrow\; u_{ce} = -i_c R_C \doteq -g_m u_i R_C \doteq -1{,}5\,\mathrm{V}. \tag{15.12}$$

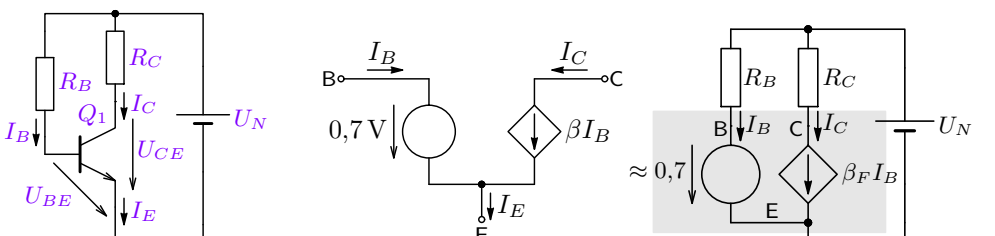
Napětí u_{CE} je složeno ze stejnosměrné složky $U_{CE} \doteq 6{,}2\,\mathrm{V}$ a superponované střídavé složky s amplitudou u_{ce}, která má obrácenou fázi oproti budicímu napětí u_i. Výsledky odpovídají grafickému řešení linearizace na obrázku 15.14, viz také analýzu. Numerické nepřesnosti jsou dané zejména velkou úrovní buzení.

Při uvažování Earlyho napětí se model tranzistoru obohatí o výstupní odpor tranzistoru, dle obrázku 15.18 (a), jehož hodnotu určíme dle (15.10): $r_o = U_A/I_C \doteq 44\,\mathrm{k\Omega}$ a v náhradním obvodu bude zapojen paralelně k R_C. Vzhledem k relaci $R_C \ll r_o$ se však změní napětí u_{ce} nevýznamně na $-1{,}44\,\mathrm{V}$.

15.3. Nastavení a stabilizace pracovního bodu tranzistorů

Tranzistor ve funkci lineárního zesilovače musí operovat v lineární části charakteristik a to v aktivní oblasti pro tranzistor bipolární, resp. v saturační oblasti pro tranzistor unipolární. V této oblasti musí ležet i pracovní bod P_0, který lze nastavit několika různými způsoby/obvody.

15.3.1. Nastavení pracovního bodu bipolárních tranzistorů



(a) (b) (c)

$$I_C \doteq \beta_F \frac{U_N - 0{,}7}{R_B}$$
pro $U_N > 0{,}7\,\mathrm{V}$
a $U_{CE} > 0{,}3\,\mathrm{V}$ (15.13)

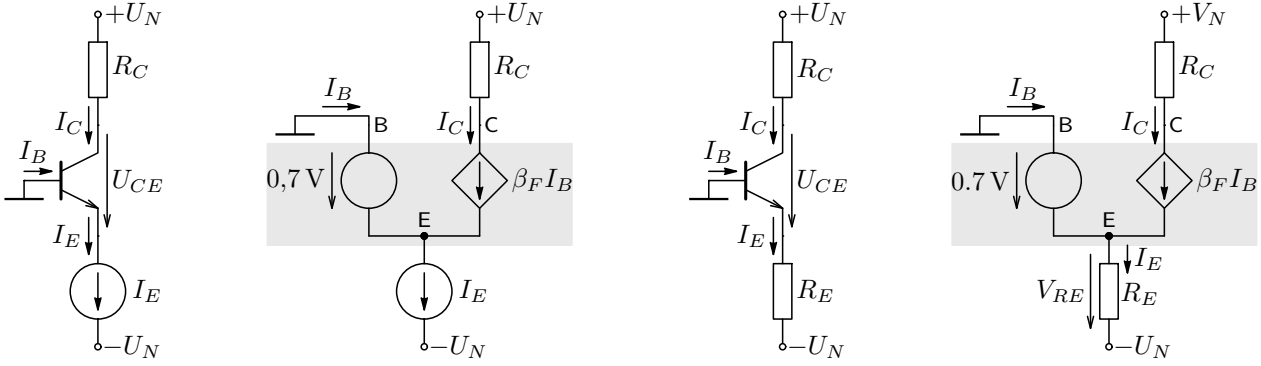
Obrázek 15.19: Obvod pro nastavení pracovního bodu P_0 (a), zjednodušený lineární model bipolárního tranzistoru v aktivní oblasti pro určení P_0 (b) a náhradní zapojení pro výpočet P_0 (c).

Jedná o jednoduché nastavení pracovního bodu P_0 pomocí R_B z příkladu 15.4 a pro proud I_C dle (15.11) evidentně platí vztah (15.13). Z něho je zřejmé, že proud I_C přímo úměrně závisí na proudovém zesilovacím činiteli β_F, jehož hodnota má velký rozptyl (min. desítky %). To je velmi nevhodné, jelikož **proud I_C je nutné stabilizovat**.

Pokud má mít zesilovač definované/stabilní parametry, musejí být definované/stabilní hodnoty prvky náhradního lineárního schématu. Vzhledem k tomu, že parametry linearizovaného schématu závisí přímo na hodnotě proudu kolektoru, resp. drainu (viz kapitolu 15.2.4, resp. 15.2.3) je nutné tento proud nastavit na definovanou/stabilní hodnotu.

Např. tolerance hodnoty parametru β_F je velmi vysoká (min. desítky %). Pokud se tedy změní výrazně parametr β_F tranzistoru, změní se ve výše uvedeném obvodu výrazně i velikost proudu I_C, a tím i pracovního bodu P_0. Navíc při větším nárůstu I_C může tranzistor přejít do saturace a celý zesilovač přestane zesilovat. Proud I_C je vhodné/nutné stabilizovat i na změny teploty a dalších parametrů obvodu.

Z výše uvedených důvodů se pro nastavení P_0 používají většinou jiná zapojení, kde se nastavuje místo proudu I_B proud I_E (proud I_C nelze nastavovat přímo, jelikož se jedná o řízený proud, ale lze ho řídit proudem I_E). To lze jak pomocí proudového zdroje, tak rezistorem v emitorovém obvodu, jak ukazují následující zapojení. Pokud je stabilně (nezávisle na β_F, teplotě, ...) nastaven proud I_E, bude stabilní i proud I_C vzhledem k tomu, že v aktivní oblasti platí $I_C = \alpha_F I_E = \frac{\beta_F}{1+\beta_F} I_E \doteq I_E$.



Obrázek 15.20: Nastavení pracovního bodu bipolárního tranzistoru pomocí proudového zdroje, resp. rezistoru v emitorovém obvodu (a), (c) a jejich náhradní zapojení pro výpočet pracovního bodu (b), (d).

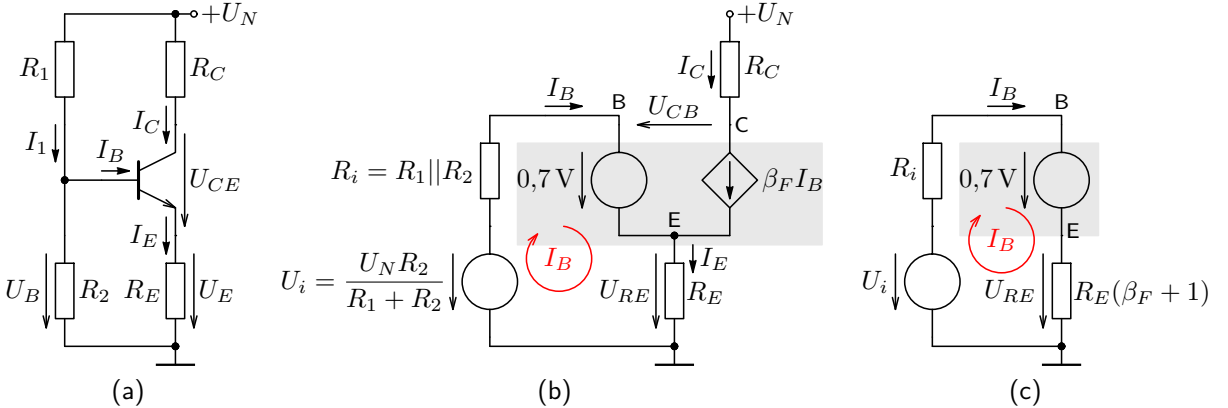
Pokud tranzistory pracují v aktivní oblasti ($U_{CE} > 0{,}3\,\mathrm{V}$), pak pro kolektorové proudy jednotlivých zapojení platí:

$$I_C = \alpha_F I_E = \frac{\beta_F}{1+\beta_F} I_E = \beta_F I_B \doteq I_E, \qquad (15.14)$$

$$I_C = \alpha_F I_E \doteq \alpha_F \frac{U_N - 0{,}7}{R_E} \doteq \frac{U_N - 0{,}7}{R_E}. \qquad (15.15)$$

Zapojení (a) se používá zejména ve strukturách IO, zapojení (c) vyžaduje symetrické napájecí napětí, což lze řešit např. následujícím můstkovým zapojením.

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL



Obrázek 15.21: Můstkové zapojení pro nastavení pracovního bodu bipolárního tranzistoru (a), a náhradní zapojení pro výpočet pracovního bodu (b) a ekvivalentní zapojení smyčky I_B (c).

Pro smyčku proudu I_B pak lze psát následující rovnici, kterou lze vyjádřit obvodem (c) tak, aby se napětí U_{RE} nezměnilo. Z něho je zřejmé, že v aktivním režimu tranzistoru ($U_{CE} > 0{,}3\,\mathrm{V}$) se rezistor R_E jeví v obvodu báze jako $\beta + 1$ krát větší. I_B, resp. I_C lze pak vyjádřit vztahem, který pro $R_i \ll R_E(\beta_F + 1)$ vede na (15.15), a tudíž $I_C \neq f(\beta_F)$!

$$U_i - 0{,}7 = I_B R_i + I_E R_E = I_B R_i + I_B(\beta_F + 1)R_E \Rightarrow I_C = \beta_F I_B = \frac{(U_i - 0{,}7)\beta_F}{R_i + R_E(\beta_F + 1)} \doteq \frac{U_i - 0{,}7}{R_E} \quad (15.16)$$

Příklad 15.5

Zadání: Určete proud kolektoru tranzistoru v zapojení 15.21 (a), jestliže $U_N = 12\,\mathrm{V}$, $R_1 = 330\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 100\,\mathrm{k\Omega}$, $R_C = 6{,}8\,\mathrm{k\Omega}$, $R_E = 1{,}5\,\mathrm{k\Omega}$ a $\beta_F = 300$.

Řešení: Předpokládejme, že tranzistor je v aktivním režimu. Pro hodnoty náhradního Theveninova schématu podle obrázku 15.21 (b) dostaneme:

$$U_i = \frac{U_N R_2}{R_1 + R_2} \doteq 2{,}8\,\mathrm{V}, \qquad R_i \doteq 77\,\mathrm{k\Omega}.$$

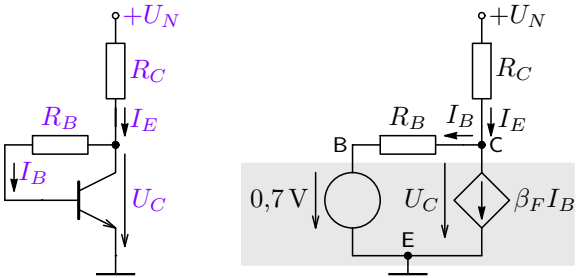
Pro proud kolektoru pak ze vztahu 15.16 vyplývá

$$I_C = \frac{\beta_F(U_i - 0{,}7)}{R_i + R_E(\beta_F + 1)} = \frac{U_i - 0{,}7}{R_i/\beta_F + R_E/\alpha_F} \doteq 1{,}2\,\mathrm{mA}. \tag{15.17}$$

Zbývá ověřit předpoklad aktivního režimu tranzistoru, tj. pro napětí U_{CE} platí:

$$U_{CE} = \big(U_N - I_C(R_C + R_E/\alpha_F)\big) \doteq 2 > 0{,}4\,\mathrm{V}.$$

Správnost předpokladu je ověřena, výsledky lze ověřit simulací včetně komentáře. Viz také dodatek G.



$$U_C = 0{,}7 + R_B I_B, \tag{15.18}$$

$$I_E = (\beta_F + 1) I_B = \frac{U_N - U_C}{R_C}, \tag{15.19}$$

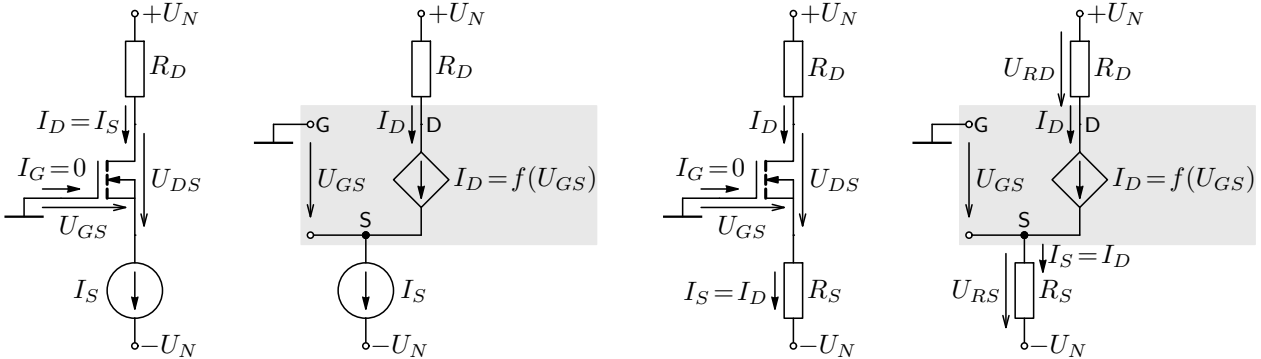
$$I_C = \beta_F I_B = \frac{\beta_F (U_N - 0.7)}{R_B + (\beta_F + 1) R_C}. \tag{15.20}$$

Obrázek 15.22: Nastavení pracovního bodu bipolárního tranzistoru pomocí zpětnovazebního odporu R_B (a) a náhradní zapojení pro výpočet pracovního bodu (b).

Vzhledem k (15.18) je pro otevřený tranzistor vždy splněna podmínka $U_C > U_B$ a je tedy splněna podmínka aktivního režimu. Stabilizace P_0 je založena na napěťové ZV, ale na rozdíl od (15.16) není v tomto případě většinou splněna podmínka $R_B \ll R_C(\beta_F + 1)$, což znamená větší vliv činitele β_F na I_C. Uvedené zapojení má velkou výhodu v přímo uzemněném emitoru, pro což se používá zejména ve vf technice. Více viz přednáška.

Nepřesnost uvedených výpočtů je dána především nepřesností odhadu napětí U_{BE}, které mimo proudu I_B, resp. I_C závisí na technologických parametrech tranzistoru a teplotě, viz (13.4). Vzhledem k exponenciální závislosti je změna U_{BE} malá a uplatní se zejména při malých hodnotách U_N, při kterých vychází větší chybovost rozdílu $U_N - 0{,}7\,\mathrm{V}$. Způsobená chyba bývá do 10%. Viz také analýzu a její komentář.

15.3.2. Nastavení pracovního bodu unipolárních tranzistorů

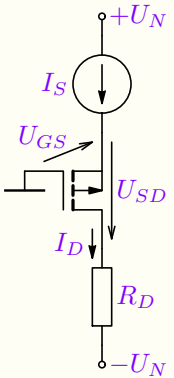


Obrázek 15.23: Nastavení pracovního bodu unipolárního tranzistoru pomocí proudového zdroje, resp. rezistoru v obvodu source (a), (c) a jejich náhradní zapojení pro výpočet pracovního bodu (b), (d).

Zde nelze U_{GS} považovat za konstantu (jako u BJT). Pokud tranzistory pracují v sarurační oblasti, pak pro proudy drainů platí vztah (13.12) a výpočet v případě zapojení (c) vede na kvadratickou rovnici, jelikož $U_{GS} = U_N - R_S I_D$.

$$I_D = \frac{1}{2} K_P \frac{W}{L} (U_N - R_S I_D - U_{TO})^2 \quad \text{pro} \quad U_{DS} > U_{GS} - U_{TO} \tag{15.21}$$

Příklad 15.6



Zadání: Určete pracovní bod tranzistoru v zapojení na obrázku vlevo, pokud je zadáno $U_N = 10\,\mathrm{V}$, $I_S = 1\,\mathrm{mA}$, $R_D = 5\,\mathrm{k\Omega}$, $K_p = 1{,}6\,\mathrm{mA/V^2}$, $W = 160\,\mu\mathrm{m}$, $L = 10\,\mu\mathrm{m}$ a $U_{TO} = -1{,}9\,\mathrm{V}$.

Řešení: Vzhledem k nulovému proudu gatem, musí platit $I_S = I_D = 1\,\mathrm{mA}$, přičemž proudový zdroj nastaví odpovídající U_{GS}. Předpokládejme, že tranzistor pracuje v saturační oblasti, tj. platí vztah (13.12). Vyjádřením a dosazením numerických hodnot dostaneme pro napětí U_{GS} vztah:

$$U_{GS} = \pm\sqrt{\frac{2I_S L}{K_p W}} + U_{TO} = \begin{cases} U_{GS_1} \doteq -2.18\,\mathrm{V}, \\ U_{GS_2} \doteq -1.62\,\mathrm{V}. \end{cases}$$

Jelikož $U_{GS_2} > U_{TO}$, tak toto řešení nevyhovuje podmínce – tranzistor by byl zavřený.

Dále je nutné ověřit podmínku saturační oblasti, tj. $U_{DS} = -U_{SD} = -U_N + R_D I_D - U_{GS_1} \doteq -7{,}18\,\mathrm{V} < U_{GS_1} - U_{TO} \doteq -0{,}28\,\mathrm{V}$, která platí. Tím je řešení $U_{GS} = U_{GS_1}$ správné a tranzistor pracuje v saturační oblasti.

Příklad 15.7

Zadání: Určete proud drainu tranzistoru v zapojení 15.23 (c), jestliže $U_N = 5\,V$, $R_D = 5\,\mathrm{k\Omega}$, $R_S = 4\,\mathrm{k\Omega}$, $K_p = 1{,}6\,\mathrm{mA/V^2}$, $W = 160\,\mu\mathrm{m}$, $L = 10\,\mu\mathrm{m}$ a $U_{TO} = 1{,}9\,\mathrm{V}$.

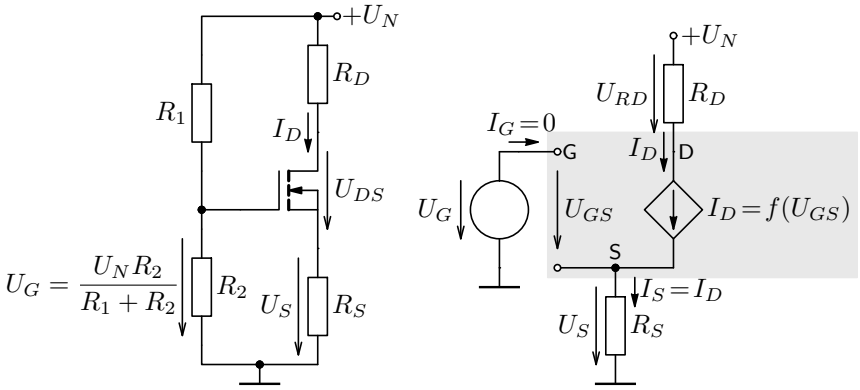
Řešení: Předpokládejme, že tranzistor pracuje v saturační oblasti. Pak platí rovnice (15.21). Dosazením numerických hodnot a jejím řešením dostaneme pro proud I_D dvě hodnoty (jedná se o kvadratickou rovnici) a k nim příslušející velikosti napětí U_{GS}:

$$I_D = \begin{cases} I_{D_1} = 0{,}716\,\mathrm{mA} & \text{a} \quad U_{GS_1} = 2{,}14\,\mathrm{V}, \\ I_{D_2} = 0{,}84\,\mathrm{mA}, & \text{a} \quad U_{GS_2} = 1{,}64\,\mathrm{V}. \end{cases}$$

Je zřejmé, že $U_{GS_2} < U_{TO}$ a tudíž je toto řešení nevyhovuje podmínce – tranzistor by byl zavřený.

Dále je nutné ověřit předpoklad. $U_{GS_1} - U_{TO} = 0{,}24 < U_{DS} = 2U_N - I_{D1}(R_D + R_S) = 3{,}56\,\mathrm{V}$, což potvrzuje předpoklad, že tranzistor pracuje v saturační oblasti. Potvrzení výsledků – viz simulaci.

Obdobně jako v případě bipolárního tranzistoru i zde lze použít stejnou variantu pro nesymetrické napájecí napětí – viz následující obvod 15.19.



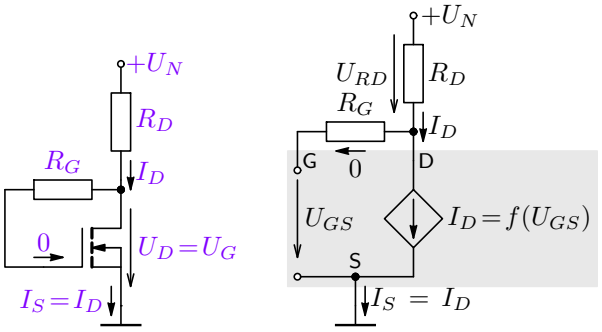
Postup výpočtu je obdobný jako v předchozím případě. Opět předpokládáme saturační režim tranzistoru a platnost vztahu (13.12) pro I_D. Výpočet samozřejmě vede na řešení kvadratické rovnice, kde

$$U_{GS} = U_G - R_S I_D.$$

Pokud bychom nepoužili rezistor R_S (source by byl přímo uzemněn), jednalo by se o elementární nastavení P_0, analogii k zapojení 15.19.

Obrázek 15.24: Můstkové zapojení pro nastavení pracovního bodu unipolárního tranzistoru (a) a náhradní zapojení pro výpočet pracovního bodu (b).

Rezistor R_S, podobně jako R_E u zapojení s bipolárním tranzistorem zavádí proudovou sériovou ZZV. Pokud by se proud I_D měl zvětšit např. vlivem teploty či změny parametrů tranzistoru, zvětšilo by se i napětí U_S a vzhledem ke stabilnímu napětí U_G by se zmenšilo napětí U_{GS}, což by bránilo zvětšení proudu I_D. To ve svém důsledku vede k jeho stabilizaci. Tento efekt je tím větší, čím je větší U_S, což však vede na požadavek velkého U_N.



Jelikož $U_{DS} = U_{GS}$ a $U_{TO} > 0$, platí relace $U_{DS} > U_{GS} - U_{TO}$. Pokud se tranzistor otevře ($U_{GS} > U_{TO}$), **bude pracovat v saturační oblasti**. Potom platí:

$$U_{GS} = U_N - R_D I_D,$$

$$I_D = \frac{1}{2} K_P \frac{W}{L} \left(U_N - R_D I_D - U_{TO}\right)^2, \qquad (15.22)$$

což vede opět na řešení kvadratické rovnice.

Obrázek 15.25: Nastavení pracovního bodu unipolárního tranzistoru pomocí zpětnovazebního odporu R_G (a) a náhradní zapojení pro výpočet pracovního bodu (b).

Stabilizace pracovního bodu je opět zajištěna ZZV (napěťovou, paralelní), podobně jako v případě zapojení 15.22. Pokud by se proud I_D měl v tomto zapojení zvětšit např. vlivem teploty či změny parametrů tranzistoru, zmenšilo by se napětí $U_D = U_G$, což by bránilo zvětšení proudu I_D. To ve svém důsledku vedle k jeho stabilizaci.

Příklad 15.8

Zadání: Určete proud drainu tranzistoru v zapojení 15.25 (a), jestliže $U_N = 10\,\mathrm{V}$, $R_D = 5\,\mathrm{k\Omega}$, $R_G = 1\,\mathrm{M\Omega}$, $K_p = 1{,}6\,\mathrm{mA/V^2}$, $W = 160\,\mu\mathrm{m}$, $L = 10\,\mu\mathrm{m}$ a $U_{TO} = 1{,}9\,\mathrm{V}$.

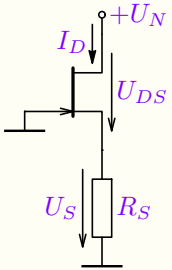
Řešení: Vzhledem k tomu, že $U_N > U_{TO}$ bude tranzistor otevřen a navíc vzhledem k výše uvedenému bude v saturační oblasti. Pak platí rovnice (15.22). Dosazením numerických hodnot a jejím řešením dostaneme pro proud I_D opět dvě hodnoty a k nim příslušející velikosti napětí U_{GS}:

$$I_D = \begin{cases} I_{D_1} = 1{,}55\,\mathrm{mA} & \text{a} \quad U_{GS_1} = 2{,}25\,\mathrm{V}, \\ I_{D_2} = 1{,}69\,\mathrm{mA}, & \text{a} \quad U_{GS_2} = 1{,}54\,\mathrm{V}. \end{cases}$$

Je zřejmé, že $U_{GS_2} < U_{TO}$, tj. druhé řeší nevyhovuje podmínce otevřeného tranzistoru. Pro první řešení je $U_{GS_1} - U_{TO} = 0.35 < U_{DS} = U_D = U_{GS_1} = 2{,}25\,\mathrm{V}$, což potvrzuje předpoklad, že tranzistor pracuje v saturační oblasti a I_{D_1}, U_{GS_1} je správný výsledek.

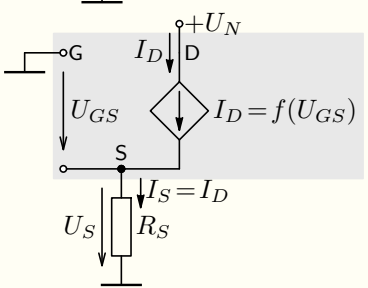
Výsledky lze ověřit simulací včetně komentáře. Viz také dodatek H.

Příklad 15.9



Zadání: Určete proud drainu tranzistoru v uvedeném zapojení s tranzistorem JFET, jestliže $U_N = 7\,\mathrm{V}$, $R_S = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $K_\beta = 1{,}5\,\mathrm{mA/V^2}$, a $U_{TO} = -2{,}3\,\mathrm{V}$.

Řešení: Obvod překreslíme s náhradním nelineárním modelem tranzistoru dle obrázku 13.30 (a). Dále předpokládejme, že je tranzistor v saturační oblasti. Pak platí rovnice (13.16), kde $U_{GS} = -U_s = -R_S I_D$. Dosazením numerických hodnot a jejím řešením dostaneme pro proud I_D dvě hodnoty a k nim příslušející velikosti napětí U_{GS}:



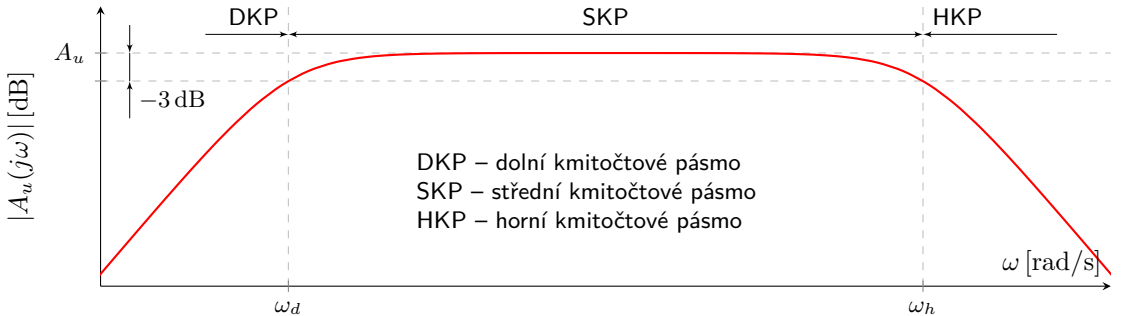
$$I_D = \begin{cases} I_{D_1} \doteq 1{,}35\,\mathrm{mA} & \text{a} \quad U_{GS_1} \doteq -1{,}35\,\mathrm{V}, \\ I_{D_2} \doteq 3{,}9\,\mathrm{mA} & \text{a} \quad U_{GS_2} \doteq -3{,}9\,\mathrm{V}. \end{cases}$$

Je zřejmé, že $U_{GS_2} < U_{TO}$, tj. tranzistor se neotevře a toto řešení není správné. Možné řešení je tedy $I_D = I_{D_1} \doteq 1{,}35\,\mathrm{mA}$, pro které je však ještě nutné ověřit předpoklad:

$$U_{GS_1} - U_{TO} \doteq 0{,}95 < U_{DS} = U_N - I_D R_S \doteq 5{,}65\,\mathrm{V}$$

Předpoklad platí a první řešení je správné.

15.4. Signálové parametry tranzistorových zesilovačů



Obrázek 15.26: Typický příklad amplitudové charakteristiky napěťového zesílení $A_u(j\omega)$ širokopásmového zesilovače s dolním (ω_d) a horním (ω_h) mezním kmitočtem.

Následující podkapitoly prezentují signálové vlastnosti základních zesilovacích stupňů ve středním kmitočtovém pásmu (SKP, tj. $\omega_d \leq \omega \geq \omega_h$), kde jsou jednotlivé parametry kmitočtově nezávislé, tj. např. $A_u = A_u(j\omega)$ pro $\omega \in \langle \omega_d, \omega_h \rangle$. Lze ukázat, že v SKP se neuplatní parazitní kapacitory aktivních prvků (tranzistorů), které lze nahradit odporovými modely. Dále lze všechny oddělovací a blokovací kapacitory nahradit zkratem, jelikož mají zanedbatelnou impedanci vůči velikostem příslušných odporových složek obvodu (např. vstupnímu odporu). Všechny stejnosměrné napájecí zdroje mají nulovou střídavou složku, proto se pro střídavé veličiny chovají jako zkrat (napěťové zdroje), resp. jako rozpojený obvod (proudové zdroje).

15.5. Základní vlastnosti jednostupňových zesilovačů

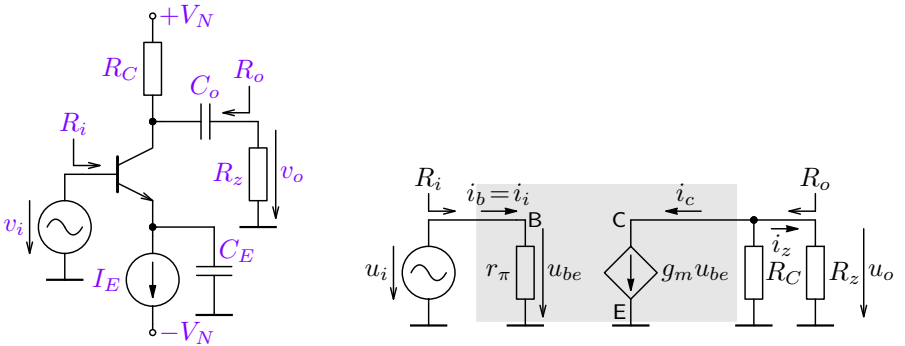
Pokud má tranzistor pracovat jako lineární zesilovač je nutné nastavit jeho pracovní bod P_0 do lineární části V-A charakteristik a vstupním budicím signálem ho měnit pouze v této části (okolí P_0). S tím souvisí otázka, kam zapojit tento budicí signál a kde odebírat signál výstupní. Vzhledem k tomu, že tranzistor je vlastně řízený zdroj proudu, je nutné budícím signálem ovlivňovat tuto řídící veličinu, tj. u_{BE}, i_B, i_E nebo u_{GS}. Výstupem je pak tento řízený proud, tj. i_C, i_E nebo i_D, i_S, který lze převést na napěťový výstup např. pomocí zatěžovacího odporu.

Z uvedeného tedy vyplývá, že budicí zdroj lze připojit buď na bázi (gate) nebo emitor (source) a výstup lze odebírat z kolektoru (drainu) nebo emitoru (source), přičemž zbývající svorka se nazývá společnou. Ta je vztažena ke společné signálové (zemní) svorce – je na ni přímo nebo nepřímo (většinou přes rezistor/kapacitor) připojena. Podle toho jsou pak pojmenovaná jednotlivá zapojení jako zapojení se společným emitorem (sourcem), kolektorem (drainem) či bází (gatem). Tato zapojení se neliší pouze názvy, ale zejména charakteristickými vlastnostmi. Jejich klasifikací se zabývá právě tato podkapitola.

Odvození je obecně ukázáno pro každé zapojení se základní konfigurací nastavení pracovního bodu s nulovým signálovým napětím společné svorky. V příkladech jsou pak ukázány různé modifikace daného zapojení.

15.5.1. Zesilovač se společným emitorem (SE)

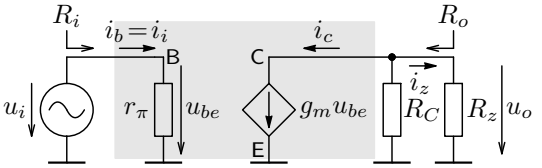
Na obrázku 15.27 (a) je základní zapojení se společným emitorem, tj. kdy vstupní signál je přiveden na bázi tranzistoru a výstup je odebírán v jeho kolektoru, přičemž emitor je pro střídavé signály připojen na zemní potenciál. Pro tuto skutečnost předpokládáme, že kmitočet zpracovávaného signálu spadá do středního kmitočtového pásma (SKP), tj. oba oddělovací kapacitory C_E, C_o lze nahradit zkratem.



Stejnosměrné (napájecí) zdroje mají nulovou střídavou složku, proto je pro signálové veličiny nulujeme (U_N nahradíme zkratem a I_E rozpojeným obvodem). Nakonec i tranzistor nahradíme linearizovaným obvodem pro změny obvodových (signálových) veličin v okolí pracovního bodu a získáme tak náhradní zapojení 15.27 (b) pro výpočet signálových veličin.

Obrázek 15.27: Základní zapojení zesilovače se společným emitorem (a) a jeho náhradní zapojení změny obvodových veličin ve SKP (b).

Z linearizovaného náhradního obvodu je evidentní, že $u_{be} = u_i$, $i_c = g_m u_{be}$ a $u_o = -i_c(R_C||R_z)$. Napěťové zesílení naprázdno ($R_z \to \infty$) a vstupní odpor a proudové zesílení nakrátko ($R_z \to 0$) lze vyjádřit následovně:



$$\boxed{A_u} = \frac{u_o}{u_i}\bigg|_{R_z\to\infty} = \frac{-i_c R_C}{u_{be}} = \frac{-g_m u_{be} R_C}{u_{be}} \boxed{= -g_m R_C}, \quad (15.23)$$

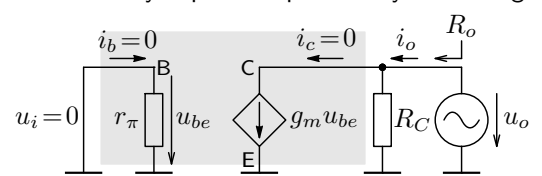
$$\boxed{R_i} = \frac{u_i}{i_i} \boxed{= r_\pi}, \quad (15.24)$$

$$\boxed{A_i} = \frac{i_z}{i_i}\bigg|_{R_z\to 0} = \frac{-i_c}{u_{be}/r_\pi} = \frac{-g_m u_{be}}{u_{be}/r_\pi} = -g_m r_\pi \boxed{= -\beta}. \quad (15.25)$$

Výstupní odpor lze určit z definice a s využitím výše uvedených vztahů, **pozor** na relaci $\frac{u_o}{i_z} = R_z \neq R_o$!

$$R_o = \frac{u_o|_{R_z\to\infty}}{i_z|_{R_z\to 0}} = \frac{A_u}{A_i} R_i|_{R_z\to 0} = R_C, \text{ pro napěťové, resp. } \frac{A_u}{A_i} R_i|_{R_z\to\infty} \text{ pro proudové buzení.} \quad (15.26)$$

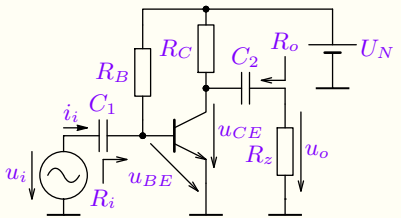
Pro určení výstupního odporu lze využít analogický postup jako pro určení vstupního odporu, tj. budíme do výstupu zdrojem u_o, přičemž vstupní buzení nulujeme ($u_i = 0$) dle níže uvedeného schématu. Pak platí $u_i = 0 = u_{be} \Rightarrow g_m u_{be} = 0$ a výstupní odpor je:



$$\boxed{R_o} = \frac{u_o}{i_o} \boxed{= R_C}. \quad (15.27)$$

Obrázek 15.28: Náhradní linearizovaný obvod pro určení výstupního odporu R_o.

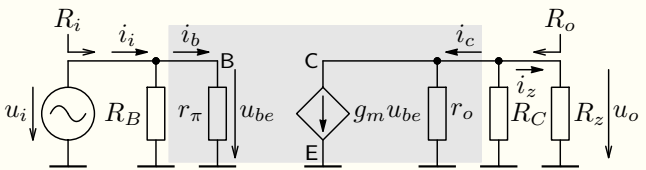
Příklad 15.10



Zadání: Pro střední kmitočtové pásmo (SKP) vypočítejte napěťové zesílení A_u naprázdno a proudové zesílení A_i nakrátko a vstupní i výstupní odpor (R_i, R_o) obvodu dle schématu, pokud je zadáno: $U_N = 10\,\mathrm{V}$, $R_B = 1{,}55\,\mathrm{M\Omega}$, $R_C = 2{,}1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_z = 1\,\mathrm{M\Omega}$ a proudový zesilovací činitel tranzistoru $\beta_F = 300$. Pro výpočet střídavých parametrů dále uvažujte Earlyho napětí tranzistoru $U_A = 80\,\mathrm{V}$.

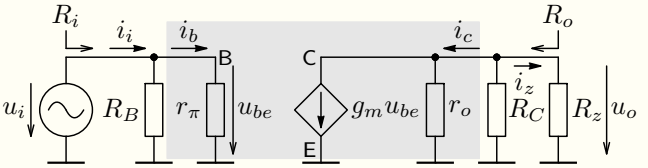
Řešení: Pracovní bod tranzistoru i parametry linearizovaného modelu byly vypočteny v příkladě 15.4, tj. $I_C \doteq 1{,}8\,\mathrm{mA}$, $g_m \doteq 72\,\mathrm{mS}$, $r_\pi \doteq 4{,}2\,\mathrm{k\Omega}$, a $r_o \doteq 44\,\mathrm{k\Omega}$, kde r_o je výstupní odpor tranzistoru, jehož hodnota byla také určena v příkladu 15.4.

Pro změny obvodových veličin ve SKP lze oddělovací kapacitory C_1 a C_2 nahradit zkratem a náhradní obvod pro změny obvodových veličin se bude od uvedeného příkladu lišit pouze přidáním zátěže R_z a výstupního odporu tranzistoru r_o dle modelu 15.18 (a).



Vstupní odpor je evidentně:

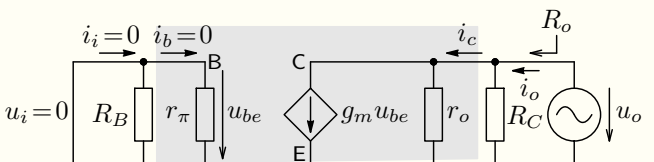
$$R_i = \frac{u_i}{i_i} = \frac{R_B r_\pi}{R_B + r_\pi} \doteq r_\pi \doteq 4{,}2\,\mathrm{k\Omega}. \tag{15.28}$$



Výstupní odpor tranzistoru r_o bude mít vliv na u_o a tím i na A_u, které určíme dle vztahu 15.23, přičemž místo R_C je evidentně třeba uvažovat $R_C||r_o$ a proudové zesílení A_i nakrátko lze vyjádříme z definice:

$$A_u = \frac{u_o}{u_i}\Big|_{R_z\to\infty} = -g_m \frac{R_C r_o}{R_C + r_o} \doteq -144, \quad A_i = \frac{i_z}{i_i}\Big|_{R_z\to 0} = -\beta \frac{i_b}{i_{R_B} + i_b} = -\beta \frac{R_B}{R_B + r_\pi} \doteq -\beta = -300. \tag{15.29}$$

Výstupní odpor lze určit buď dle definice 15.26 nebo dle zapojení 15.28, které v našem případě vede na níže uvedené schéma. Vzhledem k $u_i = 0 = u_{be} \Rightarrow g_m u_{be} = 0$ platí pro výstupní odpor zesilovače evidentně:

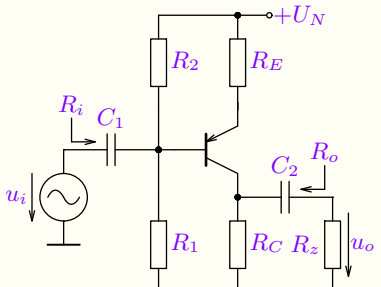


$$\boxed{R_o} = \frac{u_o}{i_o}\boxed{= R_C||r_o} \doteq 2\,\mathrm{k\Omega}. \tag{15.30}$$

Numerické i symbolické výsledky lze ověřit analýzou, viz také komentář k analýze.

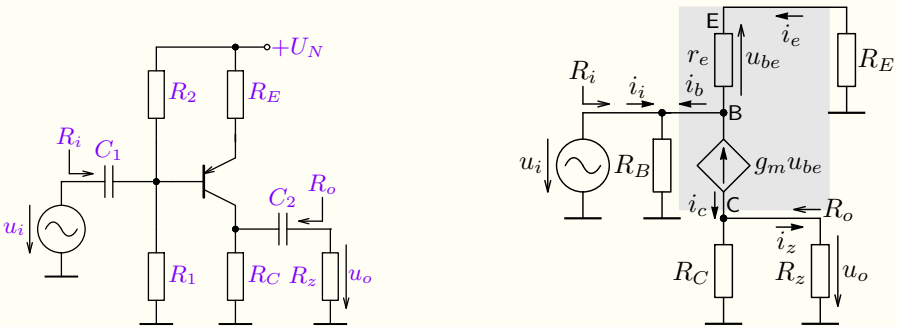
Příklad 15.11

Zadání: Pro SKP vypočítejte napěťové zesílení A_u naprázdno a proudové zesílení A_i nakrátko a vstupní i výstupní odpor (R_i, R_o) obvodu dle níže uvedeného schématu, pokud je zadáno $U_N = 12\,\mathrm{V}$, $R_1 = 330\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 100\,\mathrm{k\Omega}$, $R_C = 6{,}8\,\mathrm{k\Omega}$, $R_E = 1{,}5\,\mathrm{k\Omega}$, $R_z = 1\,\mathrm{M\Omega}$ a proudový zesilovací činitel tranzistoru $\beta_F = 300$. Jak se změní výsledky, pokud rezistor R_E přemostíme kapacitorem C_E (zapojíme paralelně k R_E)?



Řešení: Zapojení pro nastavení pracovního bodu tranzistoru vlastně je identické s příkladem 15.5 až na tranzistor PNP. To znamená, že i výpočet pracovního bodu povede na stejný postup a výsledky jsou také shodné. Proud kolektorem v pracovním bodě je $I_C = 1{,}2\,\mathrm{mA}$ a parametry linearizovaného jsou dle (15.7) až (15.9): $g_m \doteq 48\,\mathrm{mS}$, $r_e \doteq 21\,\Omega$, $r_\pi \doteq 6{,}5\,\mathrm{k\Omega}$.

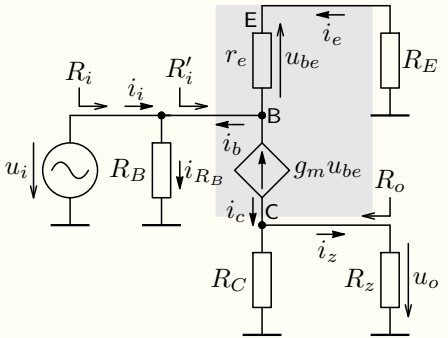
Pro střední kmitočtové pásmo (SKP) lze oddělovací kapacitory C_1 a C_2 nahradit zkratem a celý obvod překreslit pro změny obvodových veličin, přičemž tranzistor nahradíme např. T-modelem dle 15.16 (d), kde $u_{eb} = -u_{be}$. Náhradní linearizovaný obvod je uveden na obrázku, kde $R_B = R_1 || R_2 \doteq 77\,\mathrm{k\Omega}$.



(a) (b)

Obrázek 15.29: Zapojení zesilovače s PNP tranzistorem v SE konfiguraci a jeho linearizované náhradní schéma pro změny obvodových veličin ve SKP.

Proud $i_c = -g_m u_{be}$ (pozor na orientace obvodových veličin) lze určit buď z napětí u_{be} (dělič r_e, R_E) nebo z proudu emitoru $i_c = \alpha i_e$ a z něho pak výstupní napětí a napěťové zesílení. Výsledky lze zjednodušit vzhledem k $r_e \ll R_E$ a $\alpha = \frac{\beta}{\beta+1} \doteq 1$:



$$i_e = -\frac{u_i}{r_e + R_E} = \frac{i_c}{\alpha}, \quad u_o = i_c(R_C||Rz) \tag{15.31}$$

$$\boxed{A_u} = \frac{u_o}{u_i}\bigg|_{R_z\to\infty} = -\frac{\alpha R_c}{r_e + R_E} \boxed{\doteq -\frac{R_C}{R_E}} \doteq -4{,}5. \tag{15.32}$$

Vstupní odpor a proudové zesílení určíme ze vstupního proudu:

$$i_i = i_{R_B} - i_b = i_{R_B} - \frac{i_e}{\beta+1} = \frac{u_i}{R_B} + \frac{u_i}{(\beta+1)(r_e+R_E)}$$

$$\boxed{R_i} = \frac{u_i}{i_i} = R_B||\underbrace{((\beta+1)(r_e+R_E))}_{R'_i} \boxed{\doteq R_B||(\beta R_E)} \doteq 66\,\mathrm{k\Omega}, \quad \text{kde} \quad R'_i = \frac{u_i}{-i_b} \tag{15.33}$$

$$A_i = \frac{i_z}{i_i}\bigg|_{R_z\to 0} = \frac{i_c}{i_{R_B} - i_b} = \frac{-\beta}{\frac{1}{i_b}\frac{u_i}{R_B} + 1} = \frac{-\beta}{\frac{(\beta+1)(r_e+R_E)}{R_B} + 1} \doteq \frac{-\beta R_B}{\beta R_E + R_B} \doteq -44, \tag{15.34}$$

což lze odvodit i jednodušeji vzhledem ke vstupnímu proudovému děliči: $A_i = \frac{i_c}{i_i} = \frac{\beta i_b}{i_i} = -\beta\frac{R_B}{R_B + R'_i}$.

Výstupní odpor lze určit stejně jako v předchozím případě (náhradní obvod není překreslen), což opět vede i na analogický výsledek vzhledem k $u_i = 0 = u_{be} \Rightarrow g_m u_{be} = 0$. Viz také příklad A.6.

$$R_o = \frac{u_o}{i_o} = R_C = 6{,}8\,\mathrm{k\Omega}. \tag{15.35}$$

Pokud bude rezistor R_E přemostěn kapacitorem C_E, je zřejmé, že se tento rezistor pro změny obvodových veličin v SKP neuplatní (je „zkratován“ kapacitorem C_E a tím je emitor „střídavě uzemněn“). Výsledky se pak změní dle příkladu 15.10. Numerické i symbolické výsledky lze ověřit analýzou s krátkým komentářem.

$$A_u = -\frac{\alpha R_C}{r_e} = -g_m R_C \doteq -310, \qquad R_i = R_B \big|\big| \big((\beta+1) r_e\big) = R_B || r_\pi \doteq 6\,\mathrm{k\Omega},$$

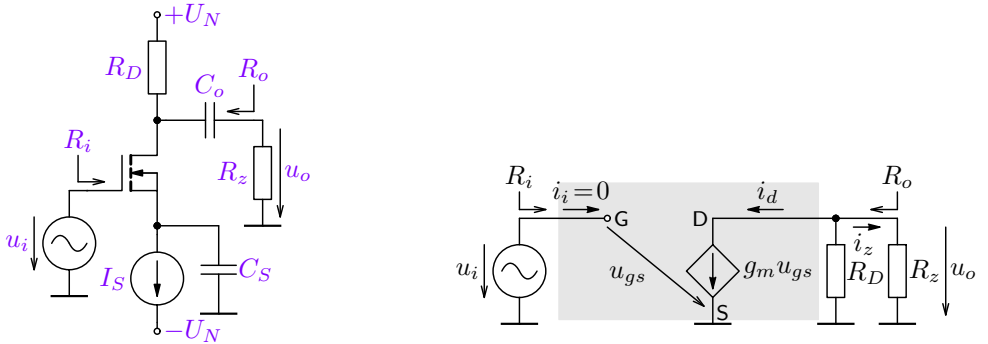
$$A_i = -\beta \frac{R_B}{R_B + r_\pi} \doteq -276, \qquad R_o = R_C.$$

Zapojení se společným emitorem se vyznačuje poměrně velkým jak napěťovým, tak proudovým zesílením, které je záporné, tj. zapojení obrací fázi. Vzhledem k proudovému výstupu je výstupní odpor relativně velký (daný kolektorovým odporem a výstupním odporem tranzistoru). Jedná se o nejuniverzálnější, velmi rozšířené zapojení analogových integrovaných obvodů.

Analogický postup výpočtu i obdobné výsledky si může čtenář ověřit na dalších modifikacích tohoto zapojení, viz např. zapojení 3, 11 a SE_RBC, jehož pracovní bod byl určen na straně XV-29. Viz také dodatek G.

15.5.2. Zesilovač se společným sourcem (SS)

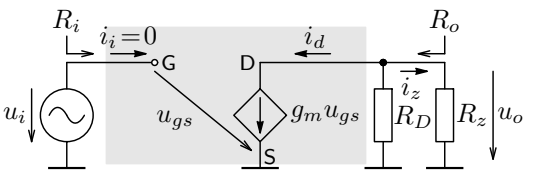
Analogické zapojení s podobnými vlastnostmi je zapojení s unipolárním tranzistorem, tj. zapojení se společným sourcem (SS), jehož základní uspořádání je na obrázku 15.30 (a). Vstupní signál je analogicky k zapojení SE přiveden na gate tranzistoru a výstup je odebírán v jeho drainu, přičemž source je pro střídavé signály připojen na zemní potenciál. Opět předpokládáme, že kmitočet zpracovávaného signálu spadá do středního kmitočtového pásma (SKP), tj. oba oddělovací kapacitory C_S, C_o lze nahradit zkratem, což platí samozřejmě i o stejnosměrných zdrojích. Náhradní linearizovaným obvod zesilovače je na obrázku 15.27 (b).



(a) (b)

Obrázek 15.30: Základní zapojení zesilovače se společným sourcem (a) a jeho náhradní linearizované zapojení pro změny obvodových veličin ve SKP (b).

Z linearizovaného náhradního obvodu je evidentní, že $u_{gs} = u_i$, $i_d = g_m u_{gs}$ a $u_o = -i_d(R_C||R_z)$. Analogicky jako v zapojení SE pak určíme základní parametry zesilovače, přičemž $R_i \to \infty$ i $A_i \to \infty$, vzhledem k $i_i = 0$.

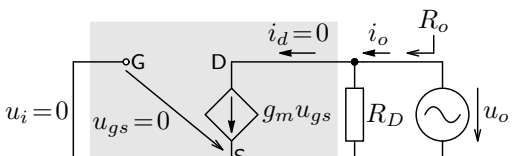


$$\boxed{A_u} = \left.\frac{u_o}{u_i}\right|_{R_z\to\infty} = \frac{-i_d R_D}{u_{gs}} = \frac{-g_m u_{gs} R_D}{u_{gs}} \boxed{= -g_m R_D}, \tag{15.36}$$

$$R_i = \frac{u_i}{i_i} \to \infty, \tag{15.37}$$

$$A_i = \left.\frac{i_z}{i_i}\right|_{R_z\to 0} \to -\infty. \tag{15.38}$$

Výstupní odpor lze určit z přímo definice $R_o = \frac{u_o|_{R_z\to\infty}}{i_z|_{R_z\to 0}}$, přičemž však zde nelze využít relace 15.26 s R_i a A_i. Nicméně dle postupu s buzením do výstupní svorky dostáváme analogický výsledek:

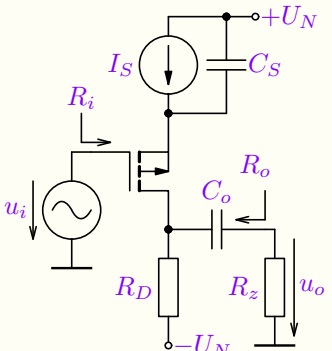


$$R_o = \frac{u_o}{i_o} = R_D \tag{15.39}$$

Obrázek 15.31: Náhradní linearizovaný obvod pro určení výstupního odporu R_o.

Příklad 15.12

Zadání: Pro střední kmitočtové pásmo (SKP) vypočítejte napěťové zesílení A_u naprázdno a výstupní odpor R_o obvodu dle schématu, pokud je zadáno: $U_N = 10\,\mathrm{V}$, $R_D = 2{,}1\,\mathrm{k\Omega}$, $I_S = 1{,}8\,\mathrm{mA}$, $K_p = 1{,}6\,\mathrm{mA/V^2}$, $W = 160\,\mu\mathrm{m}$, $L = 10\,\mu\mathrm{m}$, $U_{TO} = -1{,}9\,\mathrm{V}$ a stejnosměrná složka budicího zdroje je $U_I = 0$. Pro výpočet střídavých parametrů dále uvažujte parametr tranzistoru $\lambda = 1/80\,\mathrm{V}^{-1}$.



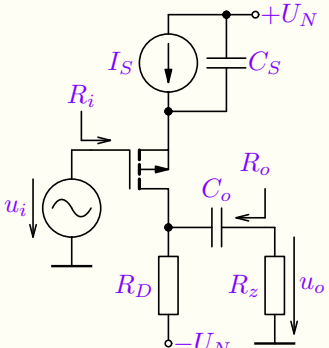
Řešení: Nejprve je třeba určit pracovní bod tranzistoru a z něho hodnoty prvků linearizovaného modelu, tj. g_m. Zdroj I_S nastaví U_{GS} tak, aby $I_S = I_D = 1{,}8\,\mathrm{mA}$. Pak analogicky k příkladu 15.6 platí:

$$U_{GS} = \pm\sqrt{\frac{2I_D L}{K_p W}} + U_{TO} \doteq \begin{cases} -1{,}52\,\mathrm{V}, \\ -2{,}27\,\mathrm{V}. \end{cases}$$

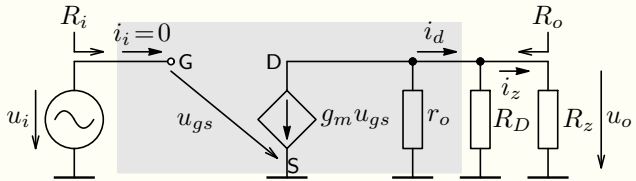
Je zřejmé, že možné řešení je $U_{GS} \doteq -2{,}27 < U_{TO}$ a vzhledem k $U_{DS} = -U_N + U_{GS} + R_D I_D \doteq -8{,}5\,\mathrm{V} < U_{GS} - U_{TO} \doteq -0{,}37\,\mathrm{V}$ je správné.

Dle 15.4 pak dostáváme pro převodní vodivost $g_m \doteq 10\,\mathrm{mS}$ a výstupní odpor tranzistoru určíme dle vztahu (15.6), tj. $r_o \doteq 44\,\mathrm{k\Omega}$.

Nyní lze určit požadované parametry zesilovače.



Nejprve vytvoříme náhradní linearizované schéma zapojení pro změny obvodových veličin ve SKP, přičemž tranzistor nahradíme linearizovaným modelem dle 15.10 (d), kde je opačně orientována řídící veličina:



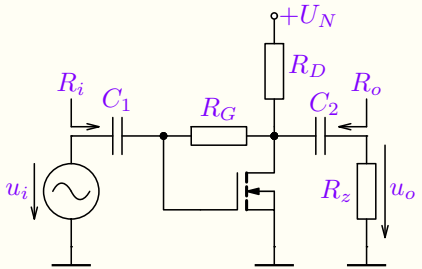
Pro napěťové zesílení naprázdno a výstupní odpor lze z linearizovaného schématu odvodit níže uvedené vztahy dle (15.60) a (15.39). Platí:

$$A_u = \left.\frac{u_o}{u_i}\right|_{R_z\to\infty} = \frac{i_d(R_D||r_o)}{u_{gs}} = -g_m(R_D||r_o) \doteq -20, \qquad R_o = R_D||r_o \doteq 2\,\mathrm{k\Omega}.$$

Všimněme si, že napěťové zesílení je výrazně menší než v příkladě 15.10, i když oba zesilovače mají stejné zapojení (pro změny obvodových veličin) a stejné parametry: U_N, $I_C = I_D$ i $R_C = R_D$. Důležitý je typ tranzistoru. Bipolární tranzistor má při stejné velikosti I_C podstatně větší převodní vodivost g_m, než je tomu u tranzistoru unipolárního. Je to dáno typem převodní charakteristiky tranzistoru: exponenciální vs. kvadratická závislost výstupního proudu na řídícím napětí. Pak je jeho derivace, tj. g_m pro BJT přímo úměrná I_C, kdežto pro FET je $g_m \approx \sqrt{I_D}$.

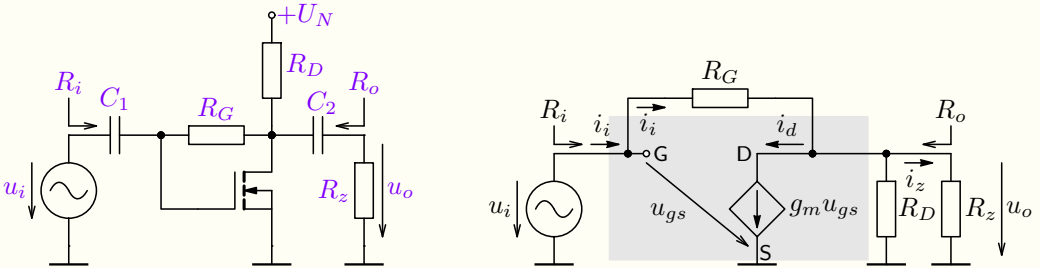
Příklad 15.13

Zadání: Pro střední kmitočtové pásmo (SKP) vypočítejte napěťové zesílení A_u naprázdno a proudové zesílení A_i nakrátko a vstupní i výstupní odpor (R_i, R_o) obvodu dle schématu, pokud je zadáno: $U_N = 10\,\mathrm{V}$, $R_D = 5\,\mathrm{k\Omega}$, $R_G = 1\,\mathrm{M\Omega}$, $K_p = 1{,}6\,\mathrm{mA/V^2}$, $W = 160\,\mu\mathrm{m}$, $L = 10\,\mu\mathrm{m}$ a $U_{TO} = 1{,}9\,\mathrm{V}$.



Řešení: Pracovní bod tranzistoru byl vypočten v příkladě 15.8, tj. $I_D \doteq 1{,}55\,\mathrm{mA}$, $U_{GS} \doteq 2{,}25\,\mathrm{V}$. Nyní lze určit převodní vodivost g_m linearizovaného modelu unipolárního tranzistoru. Dle 15.4 dostáváme $g_m \doteq 8{,}9\,\mathrm{mS}$.

Pro střední kmitočtové pásmo (SKP) lze oddělovací kapacitory C_1 a C_2 nahradit zkratem a celý obvod překreslit pro změny obvodových veličin, přičemž tranzistor nahradíme např. Π-modelem dle 15.10 (a). Náhradní linearizovaný obvod je uveden na následujícím obrázku.

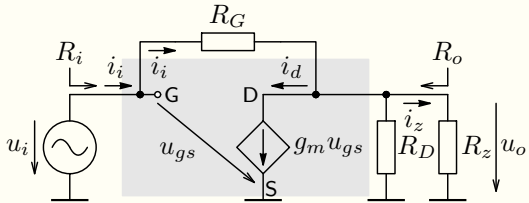


Vztah pro napěťové zesílení odvodíme z rovnice pro uzlové napětí u_o, kde $u_{gs} = u_i$ a $R'_z = R_D||R_z$:

$$\frac{u_o - u_i}{R_G} + g_m u_i + \frac{u_o}{R'_z} = 0 \quad \Longrightarrow \quad u_i \left(g_m - \frac{1}{R_G} \right) = -u_o \left(\frac{1}{R'_z} + \frac{1}{R_G} \right),$$

$$A_u = \left. \frac{u_o}{u_i} \right|_{R_z \to \infty} = -\frac{g_m - \frac{1}{R_G}}{\frac{1}{R_G} + \frac{1}{R_D}} \doteq -g_m (R_G||R_D) \doteq -g_m R_D \doteq -44, \text{ pro } R_G \gg \frac{1}{g_m},\ R_G \gg R_D. \tag{15.40}$$

Vstupní odpor je zde konečný, daný proudem i_i, při $i_g = 0$. Evidentně platí:



$$\boxed{R_i} = \frac{u_i}{i_i} = \frac{u_i}{\frac{u_i - u_o}{R_G}} \boxed{= \frac{R_G}{1 - A_u}} \doteq \frac{R_G}{1 + g_m R_D} \doteq 22\,\mathrm{k\Omega}, \quad \text{pro } R_G \gg \frac{1}{g_m},\ R_G \gg R'_z. \tag{15.41}$$

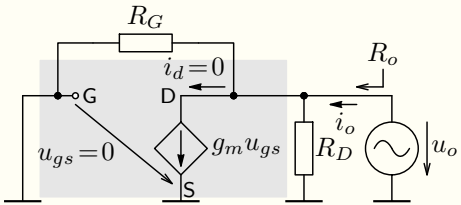
Pozor, vstupní odpor je $(|A_u|+1)$-krát ($A_u < 0$) výrazně menší než hodnota rezistoru R_G! Je to způsobeno paralelní zpětnou vazbou, kterou tento rezistor zavádí (více viz Millerův teorém 15.6.3).

Proudový přenos nakrátko pro $R_z \to 0$, tj. $u_o = 0$ a $i_i = u_i/R_G$, $i_z = i_i - g_m u_{gs}$ je:

$$A_i = \left.\frac{i_z}{i_i}\right|_{R_z \to 0} = \frac{u_i \left(\frac{1}{R_G} - g_m\right)}{\frac{u_i}{R_G}} = 1 - g_m R_G \doteq -g_m R_G \doteq -8900, \quad \text{pro } R_G \gg \frac{1}{g_m}, \tag{15.42}$$

což je očekávaný výsledek – vstupní proud je $i_i = u_i/R_G$, a pokud jeho velikost zanedbáme vůči proudu řízeného zdroje je $i_z \doteq -g_m u_i$, tak proudový přenos nakrátko je dán právě poměrem vodivostí g_m a $1/R_G$ (pro $u_o = 0$ je obvod bez zpětné vazby a tudíž je vstupní odpor roven R_G).

Výstupní odpor určíme stejně jako v předchozím případě z níže uvedeného náhradního schématu. Pro výstupní odpor evidentně platí:



$$R_o = \frac{u_o}{i_o} = R_D || R_G \doteq R_D = 5\,\mathrm{k\Omega}.$$

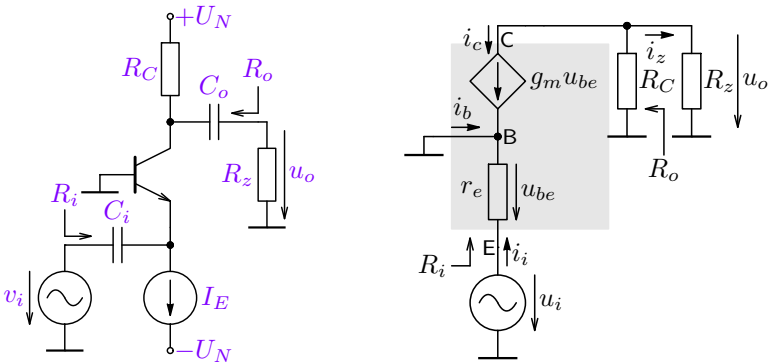
Výsledky lze ověřit analýzou. Viz také dodatek H.

Čtenář si může uvedené postupy prověřit také na dalších příkladech tohoto zapojení, viz např. zapojení 21 a 33 (jak s blokovacím kapacitorem C_S, tak i bez něho).

Pro zapojení se společným sourcem (SS) platí analogické závěry jako pro zapojení SE až na vstupní odpor a tím i proudové zesílení. Vstupní odpor je v ideálním případě nekonečný nebo je dán dán vnějším zapojením. Napěťové zesílení je však nižší díky nižší převodní vodivosti, jak bylo komentováno v závěru předchozího příkladu.

15.5.3. Zesilovač se společnou bází (SB)

V této konfiguraci je přiveden vstupní signál do emitoru tranzistoru (místo báze) a výstup je opět odebírán z kolektoru při stejném nastavení pracovního bodu P_0 tranzistoru pomocí zdroje proudu I_E, viz schéma níže.



Obrázek 15.32: Základní zapojení zesilovače se společnou bází (a) a jeho náhradní linearizované zapojení pro změny obvodových veličin ve SKP (b).

Je zřejmé, že $u_{be} = -u_i$, $i_c = -g_m u_i$ a z výstupního napětí $u_o = -i_c(R_C||R_z)$ dostáváme pro napěťové zesílení až na znaménko stejný vztah jako (15.23) pro zapojení SE:

$$\boxed{A_u} = \frac{u_o}{u_i}\bigg|_{R_z\to\infty} = \frac{g_m u_{be} R_C}{u_{be}} \boxed{= g_m R_C}. \tag{15.43}$$

Vstupní odpor je evidentní z náhradního zapojení. $i_i = -i_e$ a jak bylo uvedeno výše $u_{be} = -u_1$, tudíž

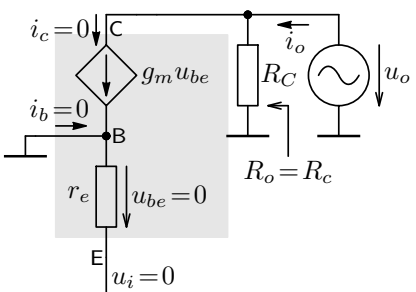
$$\boxed{R_i} = \frac{u_i}{i_i} \boxed{= r_e} = \frac{\alpha}{g_m} = \frac{r_\pi}{\beta+1}, \tag{15.44}$$

což je oproti vztahu (15.24) pro zapojení SE prakticky β krát menší hodnota.

Proudové zesílení nakrátko určíme z náhradního schématu 15.34 (b). Vzhledem k tomu, že $i_i = -i_e$ a $i_z = -i_c|_{R_z \to 0}$, je vztah zřejmý:

$$\boxed{A_i} = \frac{i_z}{i_i}\bigg|_{R_z \to 0} = \frac{-i_c}{-i_e} = \frac{\beta}{\beta+1} \boxed{= \alpha} \doteq 1. \tag{15.45}$$

Výstupní odpor určíme stejně jako v případě zapojení SE, tj. z náhradního schématu pro jeho určení uvedeného níže. Opět je $i_c = 0$ a výstupní odpor vychází stejně jako v případě zapojení SE (jedná se opět o výstup z kolektoru). Pokud není uvažován výstupní odpor tranzistoru, platí:

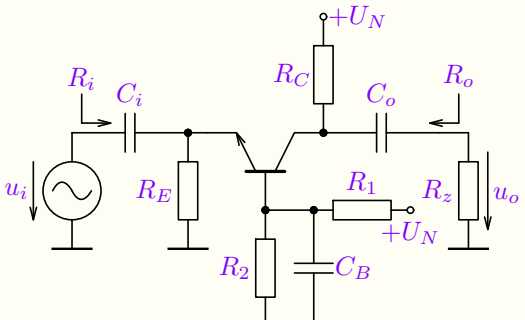


$$\boxed{R_o} = \frac{u_o}{i_o} \boxed{= R_C}. \tag{15.46}$$

Obrázek 15.33: Náhradní linearizované zapojení pro změny obvodových veličin ve SKP pro určení výstupního odporu v zapojení SB.

Příklad 15.14

Zadání: Pro střední kmitočtové pásmo (SKP) vypočítejte napěťové zesílení A_u naprázdno a proudové zesílení A_i nakrátko a vstupní i výstupní odpor (R_i, R_o) obvodu dle schématu, pokud je zadáno: $U_N = 12\,V$, $R_1 = 330\,\text{k}\Omega$, $R_2 = 100\,\text{k}\Omega$, $R_C = 6{,}8\,\text{k}\Omega$, $R_E = 1{,}5\,\text{k}\Omega$, $R_z = 13\,\text{k}\Omega$ a $\beta_F = 300$.



Řešení: Pracovní bod tranzistoru byl vypočten v příkladě 15.5, tj. $I_C \doteq 1.2\,\text{mA}$ (jedná se o tzv. můstkové zapojení). Hodnoty náhradního linearizovaného schématu tranzistoru byly určeny v příkladu 15.11 – jedná se o shodné zapojení s jinou společnou elektrodou, $g_m \doteq 48\,\text{mS}$ a $r_e \doteq 21\,\Omega$.

Je zřejmé, že náhradní obvod pro střídavé veličiny odpovídá obvodu z obrázku 15.32 (b) s tím, že ke vstupní svorce je navíc paralelně řazen rezistor R_E. Ten však nemá vliv na velikost napěťového přenosu, pro který platí vztah (15.43). Obdobně se nemění ani výstupní odpor, který určuje vztah (15.46).

Vstupní odpor je v tomto případě zmenšen rezistorem R_E oproti vztahu (15.44), tj. $R_i = r_e || R_E$.

Rezistor R_E změní také hodnotu proudového zesílení, oproti teoretické hodnotě dané vztahem (15.45). Ta je v tomto případě menší, jelikož se vstupní proud rozdělí na proud emitoru i_e, který se přenáší na výstup a proud rezistorem R_E, který bude proudové zesílení zmenšovat dělicím poměrem obou proudů. Proudové zesílení nakrátko je tedy dáno vztahem

$$A_i = \left.\frac{i_z}{i_i}\right|_{R_z \to 0} = \frac{\alpha i_e}{i_i} = \frac{\alpha i_i \frac{R_E}{r_e + R_E}}{i_i} = \alpha \frac{R_E}{r_e + R_E} \doteq \alpha \doteq 1 \quad \text{pro } r_e \ll R_E.$$

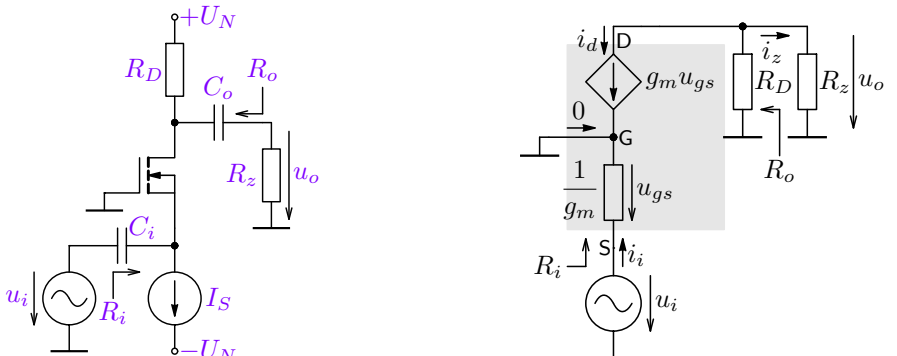
Dosazením numerických hodnot dostaneme požadované číselné parametry. Viz i dodatek G.

$$A_u \doteq 326, \quad R_i \doteq 21\,\Omega, \quad A_i \doteq 1, \quad R_o = 6{,}8\,\mathrm{k}\Omega.$$

Zapojení se společnou bází (SB) se vyznačuje stejnou velikostí napěťového zisku jako vykazuje zapojení SE (s blokovacím kapacitorem C_E). To platí i o výstupním odporu. Zapojení SB však oproti zapojení SE neobrací fázi a má výrazně menší proudový zisk, který je cca 1. To je dané jeho malým vstupním odporem, což je výhodné pro bloky s proudovým buzením. Zapojení je vhodné i pro oblast vysokých kmitočtů (více viz další materiál).

15.5.4. Zesilovač se společným gatem (SG)

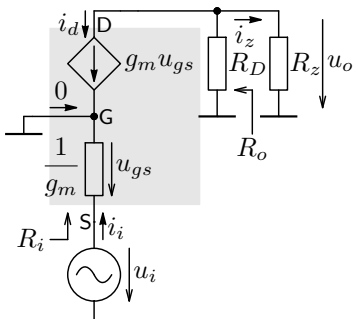
Opět se jedná o analogické zapojení s podobnými vlastnostmi jako zapojení SB, tj. vstupní signál je na source tranzistoru a výstup je odebírán v jeho drainu, přičemž gate je připojen na zemní potenciál. Náhradní linearizovaným obvod zesilovače je na obrázku 15.27 (b), kde je tranzistor nahrazen linearizovaným modelem a pro SKP lze oddělovací kapacitory C_S, C_o nahradit zkratem.



(a) (b)

Obrázek 15.34: Základní zapojení zesilovače se společným gatem (a) a jeho náhradní linearizované zapojení pro změny obvodových veličin ve SKP (b).

Z linearizovaného náhradního obvodu je evidentní, že $u_{gs} = -u_i$, $i_d = g_m u_{gs} = i_s = -i_i$ a $u_o = -i_d(R_D||R_z)$. Analogicky jako v zapojení SB pak určíme základní parametry zesilovače. I když zde také platí $i_g = 0$, vstupní odpor evidentně není nekonečný, ale odpovídá zapojení SB. To platí i o výstupním odporu, který určíme obdobně jako v předchozím zapojení pro $u_1 = 0$ z analogického schématu jako 15.33. Pro výstupní odpor platí shodný vztah jako pro zapojení SE, SS a SB.



$$\boxed{A_u} = \left.\frac{u_o}{u_i}\right|_{R_z\to\infty} = \frac{-i_d R_D}{-u_{gs}} = \frac{g_m u_{gs} R_D}{u_{gs}} \boxed{= g_m R_D}, \quad (15.47)$$

$$\boxed{R_i} = \frac{u_i}{i_i} \boxed{= \frac{1}{g_m}}, \quad (15.48)$$

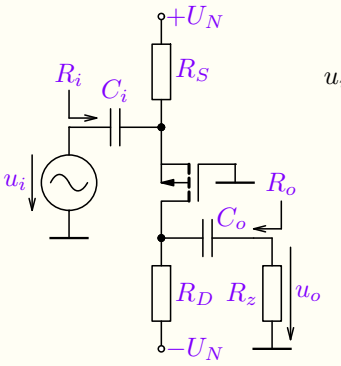
$$\boxed{A_i} = \left.\frac{i_z}{i_i}\right|_{R_z\to 0} = \frac{-i_d}{-i_s} \boxed{= 1}, \quad (15.49)$$

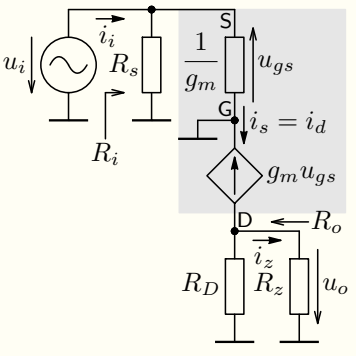
$$\boxed{R_o} = \frac{u_o}{i_o} \boxed{= R_D}. \quad (15.50)$$

Pro toto zapojení platí i obdobné závěry jako pro zapojení SB, tj. používá se zejména v analogových obvodech s proudovým buzením (v proudovém módu, kdy je signál vyjádřen velikostí proudu, nikoli napětí) a pro výhodné vlastnosti v oblasti vysokých kmitočtů. Dále následuje příklad výpočtu konkrétního zapojení.

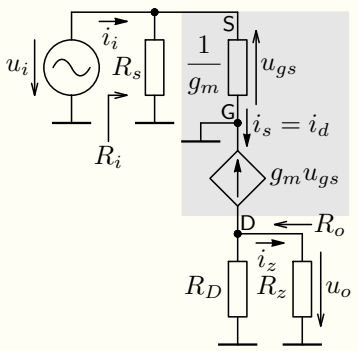
Příklad 15.15

Zadání: Pro střední kmitočtové pásmo (SKP) vypočítejte napěťové zesílení A_u naprázdno a proudové zesílení A_i nakrátko a vstupní i výstupní odpor (R_i, R_o) obvodu dle schématu, pokud je zadáno: $U_N = 5\,V$, $R_D = 5\,\mathrm{k\Omega}$, $R_S = 4\,\mathrm{k\Omega}$, $K_p = 1{,}6\,\mathrm{mA/V^2}$, $W = 160\,\mu\mathrm{m}$, $L = 10\,\mu\mathrm{m}$ a $U_{TO} = -1{,}9\,\mathrm{V}$.





Řešení: Nejprve je třeba určit pracovní bod tranzistoru a z něho hodnoty prvků linearizovaného modelu, tj. převodní vodivost g_m. Předpokládejme, že tranzistor pracuje v saturační oblasti. Pak platí: $I_D = \frac{1}{2} K_P \frac{W}{L} (R_S I_D - U_N - U_{TO})^2$, jelikož $U_{GS} = R_S I_D - U_N$. Vzhledem k tomu, že se jedná o stejné zapojení jako v příkladě 15.7 a liší se pouze typ kanálu, tak i výsledky jsou až na znaménka napětí stejné, tj. $I_D \doteq 0{,}716\,\mathrm{mA}$, $U_{GS} \doteq -2{,}14\,\mathrm{V}$ a $U_{GS} - U_{TO} \doteq -0{,}24\,\mathrm{V} > U_{DS} \doteq -3{,}56\,\mathrm{V}$ a lze nakreslit náhradní linearizovaný obvod pro změny obvodových veličin ve SKP, kde převodní vodivost je dle (15.4) $g_m \doteq 6\,\mathrm{mS}$.



Z náhradního linearizovaného obvodu pro změny obvodových veličin ve SKP lze pak určit požadované parametry. Pro napěťové zesílení a výstupní odpor platí evidentně prímo vztahy (15.47) a (15.50). Pro vstupní odpor a proudový zisk pak upravené vztahy (15.48) a (15.49) díky rezistoru R_S, který snižuje tyto hodnoty (vytváří na vstupu proudový dělič $R_S||1/g_m$).

$$A_u = \left.\frac{u_o}{u_i}\right|_{R_z\to\infty} = \frac{i_d R_D}{-u_{gs}} = \frac{-g_m u_{gs} R_D}{-u_{gs}} = g_m R_D \doteq 24, \tag{15.51}$$

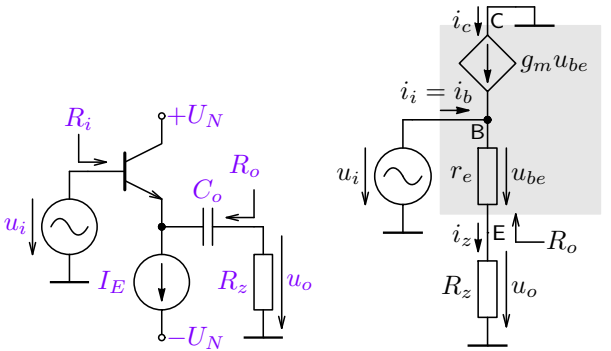
$$R_i = \frac{u_i}{i_i} = \frac{1}{g_m}\Big|\Big|R_S = \frac{R_S}{1+g_m R_S} \doteq 160\,\Omega, \tag{15.52}$$

$$A_i = \left.\frac{i_z}{i_i}\right|_{R_z\to 0} = \frac{i_s}{i_i} = \frac{R_S}{1/g_m + R_S} \doteq 0{,}96, \tag{15.53}$$

$$R_o = \frac{u_o}{i_o} = R_D = 5\,\mathrm{k\Omega}. \tag{15.54}$$

15.5.5. Zesilovač se společným kolektorem (SC)

V této konfiguraci je přiveden vstupní signál opět do báze tranzistoru, ale výstup je zde odebírán z emitoru tranzistoru, viz schéma níže spolu s náhradním linearizovaným schématem pro změny obvodových veličin ve SKP.



(a) (b)

Obrázek 15.35: Základní zapojení zesilovače se společným kolektorem (a) a jeho náhradní linearizované zapojení pro změny obvodových veličin ve SKP (b).

Z obrázku (b) je evidentní, že $u_i = u_{be} + u_o$. K budicímu zdroji je paralelně zapojen $r_e + R_E$, ale $i_i = i_b \neq u_i/(r_e + R_z) = i_z = i_e$! Proudové poměry jsou značně ovlivněny řízeným zdrojem. Pro napěťový zisk naprázdno platí:

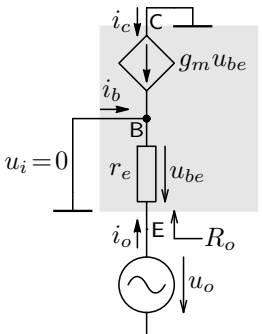
$$\boxed{A_u} = \left.\frac{u_o}{u_i}\right|_{R_z\to\infty} = \left.\frac{R_z}{r_e + R_z}\right|_{R_z\to\infty} \boxed{= 1}. \qquad (15.55)$$

Proudové zesílení nakrátko vyplývá z relací $i_i = i_b$, $i_z = i_e$ a vztah pro vstupní odpor je obdobou (15.33):

$$\boxed{A_i} = \left.\frac{i_z}{i_i}\right|_{R_z\to 0} = \frac{i_e}{i_b} \boxed{= (\beta + 1)} \doteq \beta \quad \forall\ \beta \gg 1, \qquad (15.56)$$

$$\boxed{R_i} = \frac{u_i}{i_i} = \frac{u_i}{i_b} = \frac{u_i}{\frac{i_e}{\beta+1}} = \frac{u_i}{\frac{u_i}{(\beta+1)(r_e+R_z)}} =$$

$$\boxed{= (\beta + 1)(r_e + R_z) \doteq \beta R_z} \quad \forall\ r_e \ll R_z,\ \beta \gg 1. \qquad (15.57)$$



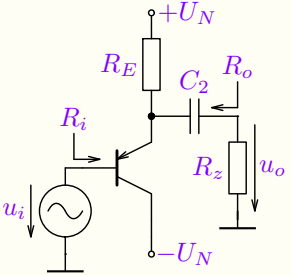
Výstupní odpor zapojení SC určíme opět z náhradního schématu pro jeho určení uvedeného vpravo, kde budíme do výstupu při nulování vstupního zdroje. Toto však odpovídá konfiguraci zapojení SB (porovnej schéma 15.32 (b) s 15.36) a tudíž výstupní odpor konfigurace SC odpovídá vstupnímu odporu konfigurace SB, viz 15.36.

$$\boxed{R_o} = \frac{u_o}{i_o} \boxed{= r_e}. \qquad (15.58)$$

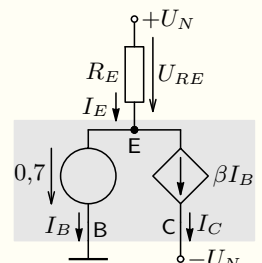
Obrázek 15.36: Náhradní linearizované zapojení pro změny obvodových veličin ve SKP pro určení výstupního odporu v zapojení SC.

Zapojení se společným kolektorem se vyznačuje velkým proudovým zesílením, které je dáno velkým vstupním a naopak malým výstupním odporem (napěťový výstup). Napěťové zesílení je přibližně 1. Z tohoto důvodu se toto zapojení používá v obvodech, kde je nutné zesílit proud (výkon), tj. v koncovém stupni zesilovacího řetězce nebo pro impedanční oddělení (velký vstupní a malý výstupní odpor). Více viz. přednáška.

Příklad 15.16



Zadání: Vypočítejte napěťové zesílení A_u naprázdno a proudové zesílení A_i nakrátko a vstupní i výstupní odpor (R_i, R_o) obvodu dle schématu, pokud je zadáno: $U_N = 7\,\mathrm{V}$, $R_E = 8{,}2\,\mathrm{k\Omega}$, $R_z = 10\,\mathrm{k\Omega}$, $C_2 = 1\,\mu\mathrm{F}$, proudový zesilovací činitel tranzistoru $\beta_F = 200$ a stejnosměrnou složka budicího zdroje je $U_I = 0$.

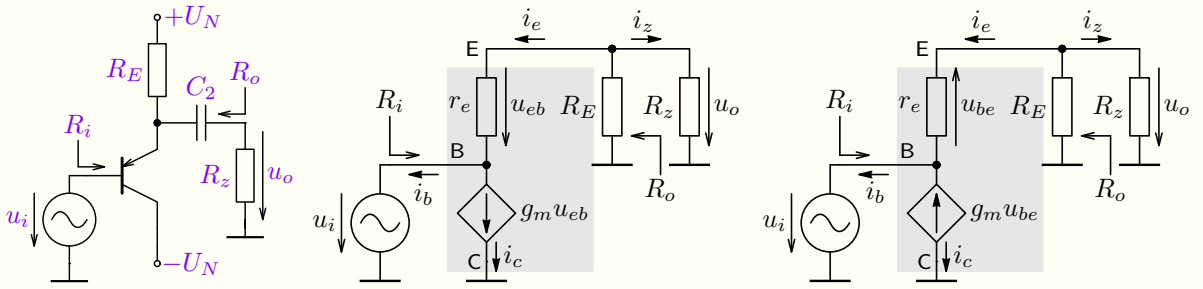


Řešení: Nejprve je nutné vypočítat pracovní bod P_0 a parametry linearizovaného modelu. Pro výpočet P_0 použijeme stejný postup jako v příkladu 15.10, tj. předpokládejme, že tranzistor pracuje v aktivní oblasti, tj. platí $i_C = \beta_F i_B$ a pro výpočet P_0 lze použít náhradní obvod dle schématu vlevo. Pak platí:

$$I_C = \beta_F I_B = \alpha_F I_E = \frac{\beta_F}{\beta_F + 1}\frac{U_{RE}}{R_E} = \frac{\beta_F}{\beta_F + 1}\frac{U_N - 0{,}7}{R_E} \doteq 0{,}76\,\mathrm{mA}.$$

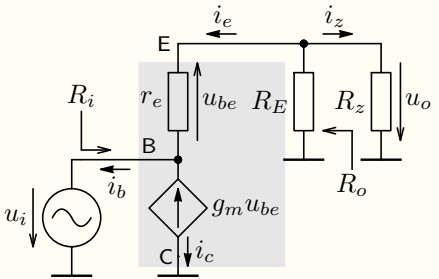
Předpoklad aktivní oblasti je nutné ověřit. Napájecí napětí U_N je větší než $0{,}7\,\mathrm{V}$, přechod báze-emitor se jistě otevře. Dále evidentně platí $U_{BC} = U_N > -0{,}3\,\mathrm{V} \Rightarrow$ předpoklad **platí**.

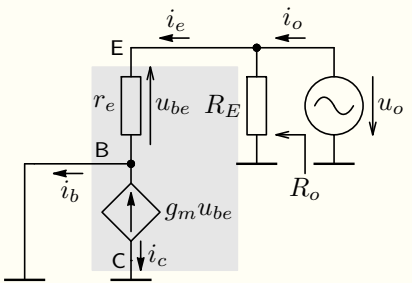
Nyní lze tranzistor nahradit linearizovaným modelem a dostaneme linearizované schéma zesilovače pro malé změny obvodových veličin ve SKP, které je uvedeno na obrázku 15.37. Hodnoty prvků náhradního linearizovaného modelu tranzistoru určíme opět dle (15.7) a (15.9): $g_m \doteq 40 I_C \doteq 30\,\mathrm{mS}$, $r_e = \frac{\alpha}{g_m} \doteq 33\,\Omega$.



(a) (b) (c)

Obrázek 15.37: Zesilovač v zapojení SC s tranzistorem PNP (a) a jeho identické náhradní linearizované obvody pro změny obvodových veličin v SKP (b) a (c), které liší se pouze orientací obvodových veličin tranzistoru, viz stranu XV-19.





Nyní již určíme požadované parametry. Je zřejmé, že vstupní proud je $i_i = -i_b$. Dále označme $R'_z = R_E||R_z$, Napěťové a proudové zesílení a vstupní odpor je evidentně:

$$A_u = \frac{u_o}{u_i}\Big|_{R_z\to\infty} = \frac{R_E}{r_e + R_E} \doteq 0{,}99,$$

$$A_i = \frac{i_z}{i_i}\Big|_{R_z\to 0} = \frac{-i_e}{-i_b} = (\beta+1) \doteq \beta = 200,$$

$$R_i = \frac{u_i}{i_i} = \frac{u_i}{\frac{-i_e}{\beta+1}} = \frac{u_i(\beta+1)}{\frac{u_i}{(r_e+R'_z)}} = (\beta+1)(r_e + R'_z) \doteq 912\,\mathrm{k\Omega}.$$

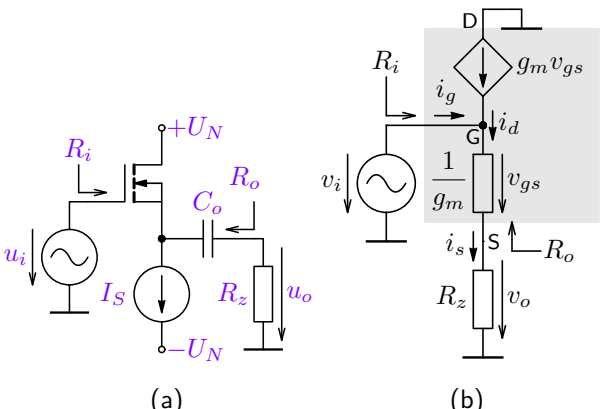
Pro výstupní odpor zesilovače využijeme opět schématu s buzením do výstupu zdrojem u_o, přičemž vstupní zdroj nulujeme ($u_i = 0$) dle vlevo uvedeného schématu. Výstupní odpor je:

$$R_o = \frac{u_o}{i_o} = r_e||R_E \doteq 33\,\Omega$$

Výsledky lze opět ověřit analýzou. Pro procvičení si čtenář může analyzovat uvedené zapojení, kde místo místo T modelu požije Π model tranzistoru.

15.5.6. Zesilovač se společným drainem (SD)

Tato konfigurace s tranzistorem FET je analogická k zapojení SC, čemuž odpovídají i podobné vlastnosti.



(a) (b)

Obrázek 15.38: Základní zapojení zesilovače se společným drainem (a) a jeho náhradní linearizované zapojení pro změny obvodových veličin ve SKP (b).

Parametry lze vyjádřit podobně jako v případě zapojení SC, tj. $u_i = u_{gs} + u_o$, nicméně $i_i = 0$, vzhledem k tomu, že $i_d = g_m u_{gs} = i_s = i_z$, platí:

$$R_i = \frac{u_i}{i_i} \to \infty, \qquad A_i = \left.\frac{i_z}{i_i}\right|_{R_z \to 0} \to \infty, \tag{15.59}$$

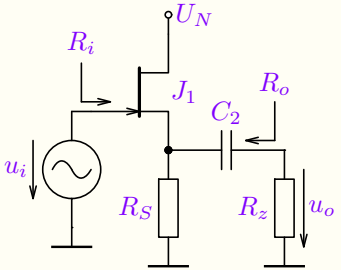
Napěťový zisk naprázdno a výstupní odpor je pak obdobou vztahů (15.55) a (15.57):

$$\boxed{A_u} = \left.\frac{u_o}{u_i}\right|_{R_z\to\infty} = \left.\frac{R_z}{1/g_m + R_z}\right|_{R_z\to\infty} \boxed{= 1}, \tag{15.60}$$

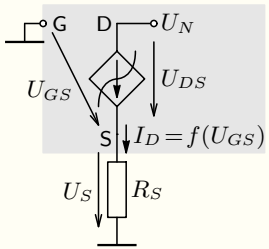
$$\boxed{R_o} = \frac{u_o}{i_o} \boxed{= \frac{1}{g_m}}, \tag{15.61}$$

což obdržíme, pokud ve vztahu (15.57) pro zapojení SC budeme uvažovat $\beta \to \infty$. Pak $\alpha = \frac{\beta}{\beta+1} \to 1$, tj. $i_c = i_e$, $i_b \to 0$ a $r_e = \alpha/g_m \to 1/g_m$, což je případ unipolárních tranzistorů.

Příklad 15.17



Zadání: Vypočítejte v SKP napěťové zesílení A_u naprázdno a proudové zesílení A_i nakrátko a vstupní i výstupní odpor (R_i, R_o) obvodu dle schématu, pokud je zadáno: $U_N = 7\,\mathrm{V}$, $R_S = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $C_2 \to \infty$, $K_\beta = 1{,}5\,\mathrm{mA/V^2}$ a $U_{TO} = -2{,}3\,\mathrm{V}$.



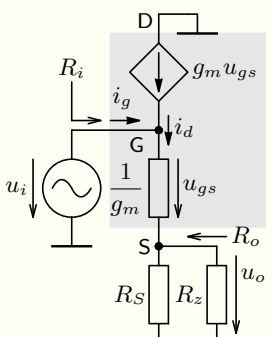
Řešení: Nejprve je nutné určit pracovní bod P_0 a parametry linearizovaného modelu. Pro výpočet P_0 použijeme stejný postup jako v příkladu 15.3, tj. nahradíme tranzistor modelem (obr. 13.30 (a)) pro výpočet pracovního bodu, přičemž budeme předpokládat, že přechod G-S je uzavřen a tranzistor pracuje v saturační oblasti, tj. platí vztah 13.16. Pak platí:

$$U_S = I_D R_S = -U_{GS} \Rightarrow I_D = K_\beta(-I_D R_S - U_{TO})^2$$

Řešení vede evidentně na řešení kvadratické rovnice, tj. dva kořeny.

$$I_D = \begin{cases} I_{D_1} \doteq 3{,}9\,\mathrm{mA} & \text{a} \quad U_{GS_1} \doteq -3{,}9\,\mathrm{V}, \\ I_{D_2} \doteq 1{,}35\,\mathrm{mA} & \text{a} \quad U_{GS_2} \doteq -1{,}35\,\mathrm{V}. \end{cases}$$

Je zřejmé, že přechod G-S je uzavřen, jelikož $U_{GS} < 0$. První řešení je evidentně nevyhovující, jelikož $U_{GS_1} < U_{TO}$ a tranzistor by byl uzavřen. Naopak pro druhé řešení $I_D = I_{D2} \doteq 1{,}35\,\mathrm{mA}$ vychází $U_{GS_2} > U_{TO}$ a $U_{GS_2} - U_{TO} \doteq 0{,}95\,\mathrm{V} < U_{DS} = U_N - I_D R_S \doteq 5{,}65\,\mathrm{V}$, čímž je ověřen předpoklad, že tranzistor je v saturační oblasti. Z proudu I_D určíme dle (15.5) hodnotu převodní vodivosti $g_m \doteq 2{,}85\,\mathrm{mS}$.



Náhradní obvod pro střídavé veličiny je prakticky shodný s obvodem z minulého příkladu. Tranzistor byl opět nahrazen linearizovaným modelem T s tím rozdílem, že místo rezistoru r_e je nyní $1/g_m \doteq 351\,\Omega$, což vede právě na $i_g = 0$, viz vysvětlení na straně XV-10. Výpočet je je uveden níže, ověření viz analýza.

$$A_u = \frac{u_o}{u_i}\bigg|_{R_z \to \infty} = \frac{R_S}{\frac{1}{g_m} + R_S} \doteq 0{,}74,$$

$$A_i = \frac{i_z}{i_i}\bigg|_{R_z \to 0} \to \infty, \quad R_i = \frac{u_i}{i_i} \to \infty, \quad \text{jelikož} \quad i_i = i_g = 0,$$

$$R_o = \frac{u_o}{i_o} = \frac{1}{g_m} \Big|\Big| R_S \doteq 260\,\Omega.$$

Čtenář si může příkladů ověřit i pomocí Π-modelů dle obr. 15.16 (a), 15.10 (a).

Výše odvozené parametry základních konfigurací jednostupňových zesilovačů jsou souhrnně uvedeny v následující tabulce, viz také komentář.

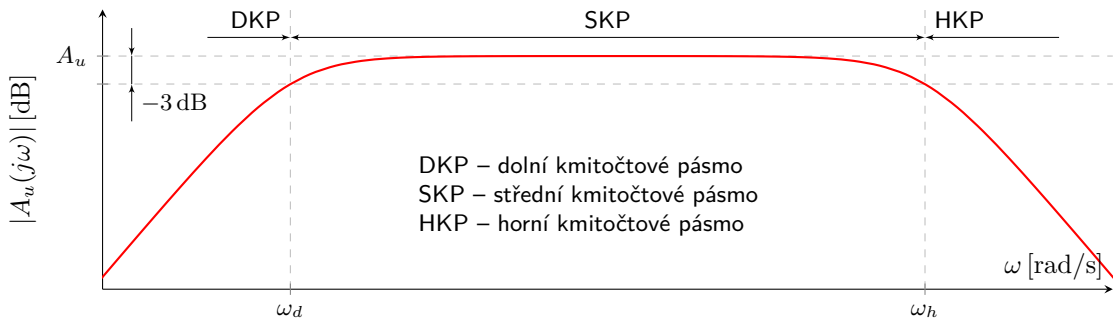
Parametry jednostupňových zesilovačů

zapojení	parametr			
	$A_u\|_{R_z\to\infty}$	$A_i\|_{R_z\to 0}$	R_i	R_o
SE	$-g_m R_C$ bez R_E	$-\beta$	r_π bez R_E	R_C
	$-\frac{R_C}{r_e+R_E}$ s R_E		$r_\pi+\beta R_E$ s R_E	
SB	$g_m R_C$	α	r_e	R_C
SC	<1	$\beta+1$	βR_z	r_e
SS	$-g_m R_D$ bez R_S	$\to -\infty$	$\to\infty$	R_D
	$-\frac{R_D}{1/g_m+R_S}$ s R_S			
SG	$g_m R_D$	1	$1/g_m$	R_D
SD	<1	$\to\infty$	$\to\infty$	$1/g_m$

Tabulka 15.1: Zjednodušené výrazy pro parametry základních zapojení jednostupňových zesilovačů.

15.6. Kmitočtové závislosti jednostupňových zesilovačů

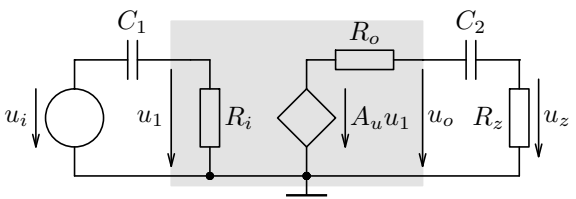
V předchozím výkladu jsme se zabývali vlastnostmi jednostupňových zesilovačů, které jsme vyšetřovali v tzv. středním kmitočtovém pásmu. Jednalo se o zesilovače širokopásmové, střídavě vázané, což znamená, že byla oddělena kapacitorem stejnosměrná složka jak na výstupu, tak i v mnoha případech na vstupu zesilovače a někdy byl využit další tzv. blokovací kapacitor (viz C_E příkladu 15.11). Jak bylo řečeno tyto nad jistým (dolním mezním) kmitočtem f_d se tyto kapacitory chovají pro signál jako zkrat. Pokud je kmitočet menší než f_d, dochází k poklesu zesílení, což se ale děje vlivem parazitních kapacit (nejenom tranzistoru) i v případě vysokého kmitočtu nad hranicí horního mezního kmitočtu f_h, jak ukazuje obrázek 15.39. V této podkapitole ukážeme na čem velikosti obou uvedených kmitočtů závisí a představíme způsob, jak jejich velikost určit.



Obrázek 15.39: Typický příklad amplitudové charakteristiky napěťového zesílení $A_u(j\omega)$ širokopásmového zesilovače s dolním ($\omega_d = 2\pi f_d$) a horním ($\omega_h = 2\pi f_h$) mezním kmitočtem.

15.6.1. Dolní mezní kmitočet

Zesilovač lze modelovat náhradním obvodem např. dle 15.3. Pokud jsou oddělovací kapacitory oddělující budící zdroj a zátěž pouze na vstupu nebo výstupu zesilovače, lze jeho náhradní obvod nakreslit dle obrázku 15.40. Jeho kmitočtová charakteristika vykazuje evidentně dva zlomové kmitočty f_{d1} a f_{d1}. Pokud jsou tyto kmitočty dostatečně odlišné, pak celkový dolní mezní kmitočet je větší z uvedených.



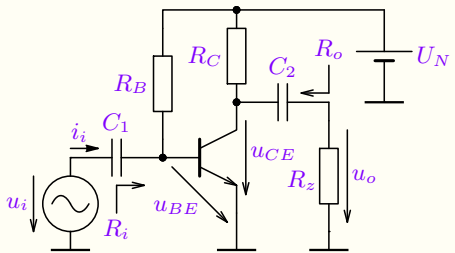
$$f_{d1} = \frac{1}{2\pi R_i C_1}, \qquad f_{d2} = \frac{1}{2\pi (R_o + R_z) C_2},$$

$$f_d \cong \begin{cases} f_{d1} & \text{pro } f_{d1} \gg f_{d2}, \\ f_{d2} & \text{pro } f_{d1} \ll f_{d2}. \end{cases} \tag{15.62}$$

Obrázek 15.40: Zapojení zesilovače se vstupním a výstupním oddělovacím kapacitorem.

Příklad 15.18

Zadání: Určete dolní mezní kmitočet zesilovače z příkladu 15.10, pokud je zadána hodnota oddělovacích kapacitorů $C_1 = C_2 = 1\,\mu\text{F}$.

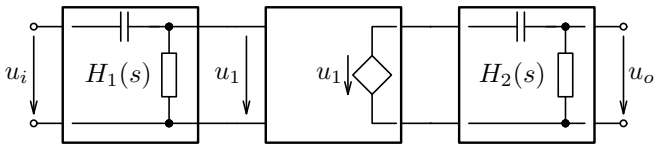


Řešení: Parametry zesilovače byly vypočítány v uvedeném příkladu 15.10, přičemž vstupní odpor je dle (15.28). Kmitočtové pásmo je pro nízké kmitočty omezeno jak na vstupní tak výstupní straně, tj. kmitočty f_{d1} a f_{d2}. Ty jsou evidentně dány níže uvedenými relacemi a dolní mezní kmitočet je pak vyšší z obou určených:

$$f_{d1} = \frac{1}{2\pi R_i C_1} \doteq 38\,\text{Hz}, \quad f_{d2} = \frac{1}{2\pi (R_o + R_z) C_2} \doteq 0{,}2\,\text{Hz} \;\Rightarrow\; f_d = f_{d1} \doteq 38\,\text{Hz}. \tag{15.63}$$

Metoda časových konstant pro určení f_d

Pokud je obvod složitější – obsahuje více oddělovacích, resp. blokovacích kapacitorů je přesné určení dolního mezního kmitočtu „ručním výpočtem“ obtížné. V těchto případech lze použít přibližného výpočtu, který založen na časových konstantách daných jednotlivými kapacitory [7].



Obrázek 15.41: Lineární systém 2. řádu s kaskádně řazenými přenosy $H_1(s)$ a $H_2(s)$.

Předpokládáme nejprve nejjednodušší případ, který je ilustrován obrázkem 15.40, tj. lineární systém (LS) typu horní propusti 2. řádu, složený ze dvou oddělených, kaskádně řazených částí 1. řádu s přenosy $H_1(s) = \frac{s\tau_1}{1+s\tau_1}$ a $H_2(s) = \frac{s\tau_2}{1+s\tau_2}$ – viz obrázek 15.41, kde $\tau_1 = 1/\omega_1$, $\tau_2 = 1/\omega_2$ jsou časové konstanty, resp. zlomové kmitočty jednotlivých sekcí a pro jeho kmitočtovou charakteristiku platí:

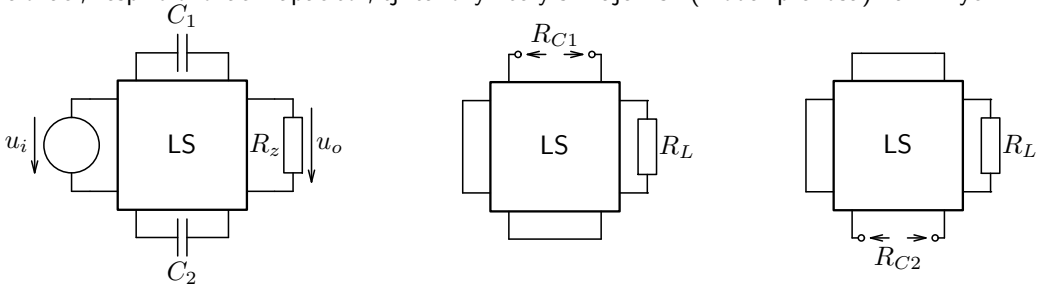
$$H(j\omega) = H_1(j\omega)H_2(j\omega) = \frac{(j\omega)^2\tau_1\tau_2}{(1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_1)} = \frac{1}{1-\frac{j\omega_2}{\omega}-\frac{j\omega_1}{\omega}-\frac{\omega_1\omega_2}{\omega^2}} \tag{15.64}$$

Pokud je mezní kmitočet definován jako ω_d pro jejž platí $|H(j\omega_d)| = 1/\sqrt{2}$, pak lze pro vztah 15.64 určit

$$\omega_d \approx \omega_1 + \omega_2 = 1/\tau_1 + 1/\tau_2, \tag{15.65}$$

což je přibližná relace, která dobře platí pokud $\omega_1 \neq \omega_2$. Pro $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$ je chyba největší $\omega_d \doteq 1{,}55\omega_0 \neq 2\omega_0$.

Uvedenou aproximaci dolního mezního kmitočtu lze využít i pro vyšší řády přenosových funkcí, kde také dává velmi dobrý odhad zlomového kmitočtu. Zbývá určit jednotlivé zlomové kmitočty, resp. časové konstanty. Ty se určí pro každý oddělovací, resp. blokovací kapacitor, tj. takový který snižuje zisk (modul přenosu) na nízkých kmitočtech[2].



Obrázek 15.42: Lineární systém (LS) se dvěma oddělovacími, resp. blokovacími kapacitory (a), určení časové konstanty pro C_1 (b) a pro C_2 (c).

Časové konstanty $\tau_i = C_i R_{C_i}$ určíme z R_{C_i}, tj. vnitřního odporu LS z „pohledu“ daného C_i, přičemž ostatní kapacitory bereme jako zkrat. Přenos lze aproximovat vztahem $H(s) \approx \Pi_i \frac{s\tau_i}{1+s\tau_i}$ a ω_d lze analogicky k (15.65):

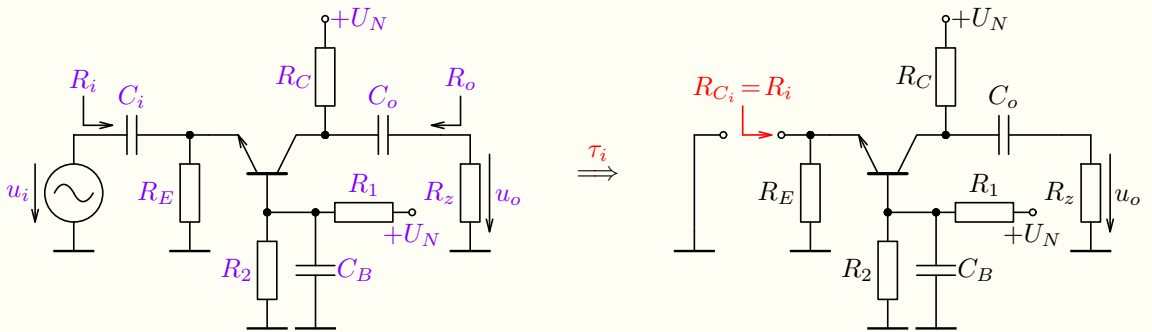
$$\omega_d \approx \frac{1}{R_{C_1} C_1} + \frac{1}{R_{C_2} C_2} + \cdots = \omega_1 + \omega_2 + \cdots , \qquad \boxed{\omega_d = 2\pi f_d \approx \sum_i \omega_i} \tag{15.66}$$

[2]Parazitní kapacitory se uplatňují až na vysokých kmitočtech, tj. ty budou nezapojeny.

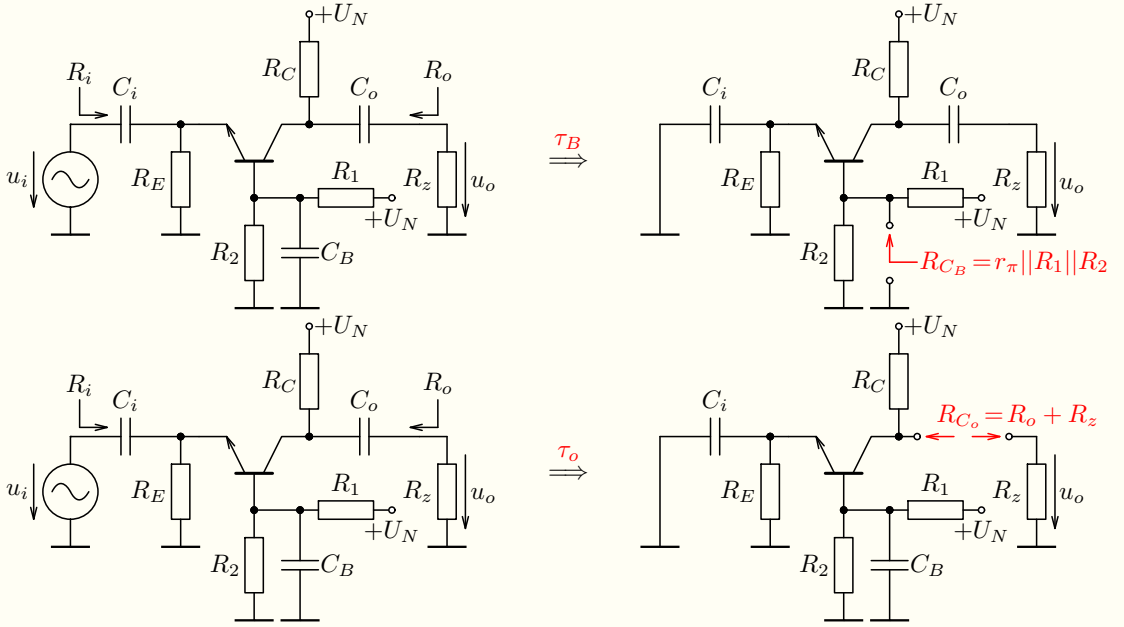
Příklad 15.19

Zadání: Určete dolní mezní kmitočet f_d zesilovače z příkladu 15.14, pokud jsou hodnoty oddělovacích kapacitorů $C_i = 10\,\mu\text{F}$, $C_o = 100\,\text{nF}$, blokovacího kapacitoru $C_B = 1\,\mu\text{F}$ a rezistoru $R_z = 1\,\text{M}\Omega$.

Řešení: Základní parametry zesilovače byly vypočítány v uvedeném příkladu 15.14, přičemž vstupní a výstupní odpor byl určen na $R_i = 21\,\Omega$ $R_o = 6{,}8\,\text{k}\Omega$. Dle výše uvedeného postupu určíme jednotlivé časové konstanty. Pro časovou konstantu danou kapacitorem C_i platí evidentně $\tau_i = C_i R_i$:



Dále určíme odpory pro časové konstanty $\tau_B = R_{C_B} C_B$ a $\tau_o = R_{C_o} C_o$.


+U_N
R_i
C_i
R_C
C_o
R_o
u_i
R_E
R_1
R_z
u_o
+U_N
R_2
C_B
τ_B
R_{C_B} = r_π || R_1 || R_2
τ_o
R_{C_o} = R_o + R_z

Nyní lze vyčíslit jednotlivé časové konstanty a z nich přibližný dolní mezní kmitočet f_d.

Odpor z hlediska kapacitoru C_B je vlastně vstupním odporem zapojení SE. Vzhledem k tomu,že nebylo uvedeno Earliho napětí, neuvažujeme výstupní odpor tranzistoru a dle vztahů ve schématech platí níže uvedené, přičemž $r_\pi = r_e(\beta+1) \doteq 6{,}5\,\mathrm{k\Omega}$, viz příklad 15.11 se stejným pracovním bodem:

$$f_i = \frac{1}{2\pi R_i C_i} \doteq 758\,\mathrm{Hz}, \quad f_B = \frac{1}{2\pi(r_\pi||R_1||R_2)C_B} \doteq 27\,\mathrm{Hz}, \quad f_o = \frac{1}{2\pi(R_o+R_z)C_o} \doteq 1{,}6\,\mathrm{Hz}.$$

Pro dolní mezní kmitočet tedy platí:

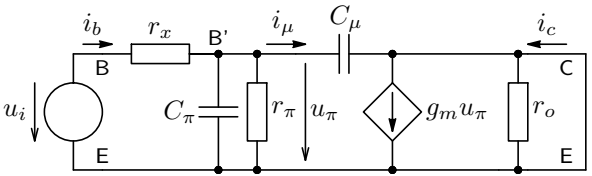
$$f_d \approx f_i + f_B + f_o \doteq f_i \doteq 758\,\mathrm{Hz}.$$

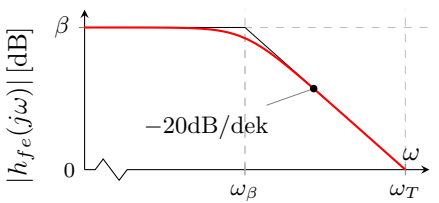
Výsledek lze ověřit analýzou.

Z uvedeného příkladu je zřejmá zásadní výhoda této metody: lze velmi dobře odhadnout vliv jednotlivých kapacitorů na dolní mezní kmitočet. Pokud bychom v daném příkladě chtěli snížit jeho hodnotu, je zřejmé, že je nutné zvýšit hodnotu kapacitoru C_i. Je to zřejmé z relace $R_B \doteq r_\pi = r_e(\beta+1) \gg R_i \doteq r_e$. Pokud je kapacitor umístěn v bázi oproti emitoru, teče jím střídavý proud i_b oproti $i_e = i_b(\beta+1)$, tj. pokud by měly mít oba kapacitory stejný vliv na f_d (způsobovat stejný úbytek signálového napětí), pak musí platit $C_E = C_i \doteq \beta C_B$. Čtenář si může uvedený závěr jednoduše ověřit analýzou.

15.6.2. Kmitočtové vlastnosti lineárního modelu BJT

Horní mezní kmitočet tranzistorových zesilovačů je dán vlastnostmi tranzistoru při vysokých kmitočtech, tj. jeho parazitními kapacitami a dále parazitními kapacitami vlastní realizace. Model tranzistoru s parazitními kapacitami byl uveden na obrázku 15.18 (c), resp. 15.11 (c). U bipolárního tranzistoru je navíc ještě zahrnut odpor r_x bázového polovodiče a kontaktu. Hodnoty jednotlivých kapacit se zjišťují měřením proudového zesilovacího činitele na kmitočtu $h_{fe}(j\omega) = \frac{i_c(j\omega)}{i_b(j\omega)}\big|_{u_{ce}=0}$ při různém nastavení pracovního bodu I_C, přičemž $h_{fe}(0) = \beta$.





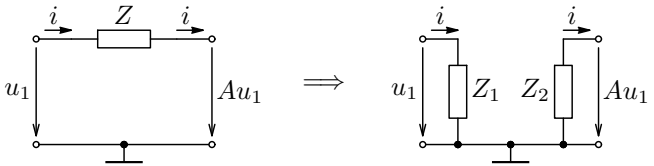
Obrázek 15.43: Obvod pro určení kmitočtové závislosti proudového zesilovacího činitele bipolárního tranzistoru nakrátko v zapojení SE $h_{fe}(j\omega)$ a její vykreslení.

$$h_{fe}(j\omega) = \frac{i_c(j\omega)}{i_b(j\omega)} = \frac{u_\pi(g_m - j\omega C_\mu)}{u_\pi\big(1/r_\pi + j\omega(C_\pi + C_\mu)\big)} \approx \frac{g_m r_\pi}{1 + j\omega r_\pi(C_\pi + C_\mu)} = \frac{\beta}{1 + j\omega r_\pi(C_\pi + C_\mu)}, \text{ pro } g_m \gg \omega C_\mu, \quad (15.67)$$

$$\omega_\beta = \frac{1}{r_\pi(C_\pi + C_\mu)}, \qquad \omega_T = \beta_{\omega_\beta} = \frac{g_m}{C_\pi + C_\mu}. \quad (15.68)$$

15.6.3. Millerův teorém

Výpočet horního mezního kmitočtu lze zjednodušit, pokud použijeme tzv. Millerův teorém, který umožňuje příčnou kapacitu C_μ, v tomto případě reprezentovanou obecnou impedancí Z rozdělit tak, aby oba uzly, mezi nimiž je zapojena zůstaly zatíženy stejně (impedancemi Z_1 a Z_2), přičemž je původní impedance Z odpojená, viz obrázek níže.



Obrázek 15.44: Rozdělení příčné impedance pomocí Millerova teorému.

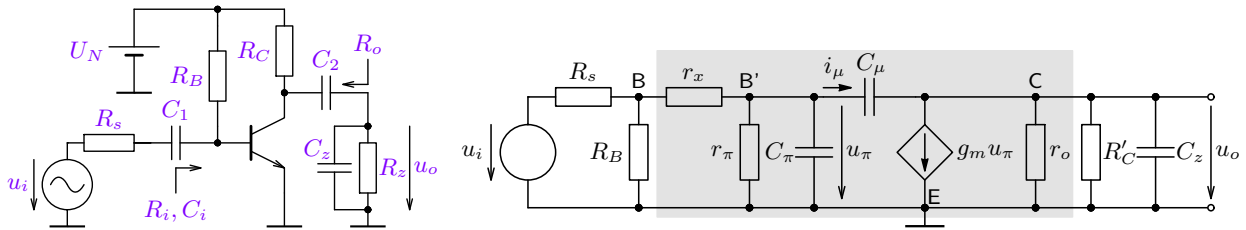
Aby proudy impedancemi Z_1 a Z_2 byly rovny proudu i impedancí Z, tj. před rozdělením musí platit:

$$i = \frac{u_1 - Au_1}{Z} = u_1 \frac{1-A}{Z} \quad \Rightarrow \quad Z_1 = \frac{u_1}{i} = \frac{Z}{1-A}, \qquad Z_2 = \frac{Au_1}{-i} = \frac{Z}{1-\frac{1}{A}} \tag{15.69}$$

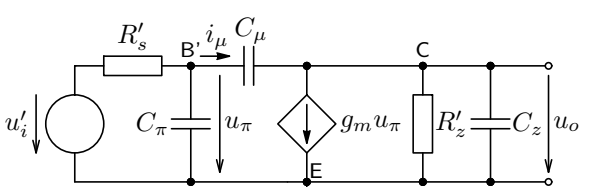
Tento postup odpovídá již uvedenému řešení vstupního odporu zesilovače v příkladu 15.41, viz vztah 15.41. Použití Milerova teorému pro výpočet horního mezního kmitočtu bude ukázáno dále.

15.6.4. Horní mezní kmitočet

Dle výše uvedeného postupu určíme horní mezní kmitočet zesilovače v zapojení SE v základní konfiguraci a s vnitřním odporem R_s budicího zdroje u_i na níže uvedeném obrázku.



Obrázek 15.45: Schéma základní konfigurace zesilovače SE (a) a jeho linearizovaný model pro určení horního mezního kmitočtu f_h (b), kde $R'_C = R_C || R_z$.

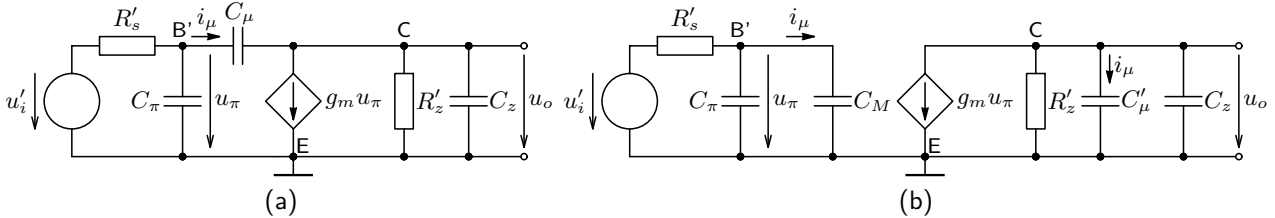


Linearizovaný model dále zjednodušíme použitím Theveninova teorému (schéma vlevo), přičemž platí:

$$R'_z = r_o || R'_C, \qquad Rs' = r_\pi || \big(r_x + R_s || R_B\big), \qquad (15.70)$$

$$u'_i = u_i \frac{R_B}{R_s + R_B} \frac{r_\pi}{r_\pi + r_x + R_s || R_B}.$$

Použitím Millerova teorému dostaneme překreslený náhradní obvod na obrázku 15.46 (b). Pro kapacity dle (15.69) a vzhledem k $A = u_o/u_\pi = -g_m R'_C$ platí pro tzv. Millerovu kapacitu C_M:



Obrázek 15.46: Linearizovaný model zesilovače SE pro určení f_h (a), a jeho překreslení pomocí Millerova teorému.

$$C_M = C_\mu(1 + g_m R'_z) \quad \text{pro } i_\mu \ll g_m u_\pi, \qquad C'_\mu = C_\mu \frac{g_m R'_z - 1}{g_m R'_z} \doteq C_z + C_\mu \quad \text{pro } g_m R'_z \gg 1. \tag{15.71}$$

Vstupní kapacita zesilovače $C_i = C_\pi + C_M$ je značně ovlivněna napěťovým zesílením a ve spojení s R_s je většinou pro f_h kritická. To neplatí pro výstupní kapacitu zesilovače C'_μ, pokud není R'_z vysoké (případ dynamické zátěže, viz dále), ale kritická může být zatěžovací kapacita (např. kabel), která pak vytváří $C'_z = C_z + C'_\mu$. Je zřejmé, že existují dva zlomové kmitočty f_{h1} a f_{h2} a pokud jsou dostatečně odlišné platí podobně k (15.62) pro f_h relace:

$$f_{h1} = \frac{1}{2\pi R'_S C_{in}}, \qquad f_{h2} = \frac{1}{2\pi R'_z C'_z}, \qquad f_h \approx \begin{cases} f_{h1} & \text{pro } f_{h1} < f_{h2}, \\ f_{h2} & \text{pro } f_{h1} > f_{h2}. \end{cases} \tag{15.72}$$

Pozor, přenosové vlastnosti obou zapojení (a) a (b) nejsou stejné, i když je zakončení obou uzlů totožné. Kapacita C_μ přidává mimo pólu přenosu i nulu v pravé polorovině s nad f_h, proto lze tento postup pro jeho výpočet použít.

Příklad 15.20

Zadání: Vyčíslete horní mezní kmitočet f_h zesilovače z příkladu 15.10, pokud je $C_{BC} = C_\mu = 2\,\mathrm{pF}$ v daném pracovním bodě a dále je zadáno: $C_z = 1\,\mathrm{pF}$, $r_x = 0{,}6\,\Omega$, $U_A = 80\,\mathrm{V}$ a tranzitní kmitočet $f_T = \frac{\omega_T}{2\pi} \doteq 520\,\mathrm{MHz}$. Dále uvažujte, že budicí zdroj signálu u_i má nenulový vnitřní odpor $R_s = 100\,\Omega$.

Řešení: Je zřejmé, že oddělovací kapacitory C_i, C_o a blokovací C_B se pro střídavé signály s kmitočtem $f \approx f_h$ budou jevit jistě jako zkrat. Pro výpočet použijeme výše uvedené odvození, přičemž využijeme již vypočtené hodnoty náhradního modelu tranzistoru $g_m \doteq 72\,\mathrm{mS}$, $r_\pi \doteq 4{,}2\,\mathrm{k\Omega}$ a $r_o \doteq 44\,\mathrm{k\Omega}$. Z (15.68) určíme $C_{BE} = C_\pi \doteq 20\,\mathrm{pF}$ a dosazením numerických hodnot do uvedených výrazů dostáváme:

$$f_{h1} \doteq 5\,\mathrm{MHz}, \qquad f_{h2} \doteq 26\,\mathrm{MHz}, \quad \Rightarrow \quad f_h \approx 5\,\mathrm{MHz}$$

Výsledky lze ověřit analýzou[a] s komentářem. Odchylky ve výsledcích jsou malé a jsou zapříčiněné zejména posunem pracovního bodu (I_C) vlivem Earliho napětí U_A (výstupního odporu tranzistoru).

Poznámka: Z výsledků je zřejmé, že dominantní vliv má právě tzv. **Millerova kapacita** $C_M \doteq |A_u| C_\mu \doteq 144 C_\mu$, která díky napěťovému zesílení výrazně zvyšuje vstupní kapacitu zesilovače a spolu s rezistorem R_s tvoří integrační RC článek se zlomovým kmitočtem na modulové charakteristice odpovídajícímu f_h.

---

[a] Vliv jednotlivých částí na f_h lze zjistit porovnáním kmitočtových charakteristik do uzlu B' a C jednak pro $C_z = 0$, resp. $-2\,\mathrm{pF}$, kdy se prakticky nuluje vliv C_μ na výstupu a pak $R_s = 0$, kdy se neuplatní vliv $C_M + C_\pi$ na vstupu.

Metoda časových konstant pro určení f_h

Analogicky jako v případě dolního mezního kmitočtu lze pro složitější obvody odvodit a použít použít přibližný výpočet, který založen na časových konstantách daných jednotlivými kapacitory [7].

Pro ukázku odvození předpokládáme opět nejjednodušší případ lineárního systému (LS) typu dolní propusti 2. řádu, složený ze dvou oddělených, kaskádně řazených částí 1. řádu s přenosy $H_1(s) = \frac{1}{1+s\tau_1}$ a $H_2(s) = \frac{1}{1+s\tau_2}$, kde $\tau_1 = 1/\omega_1$, $\tau_2 = 1/\omega_2$ jsou časové konstanty, resp. zlomové kmitočty jednotlivých sekcí a pro jeho kmitočtovou charakteristiku platí:

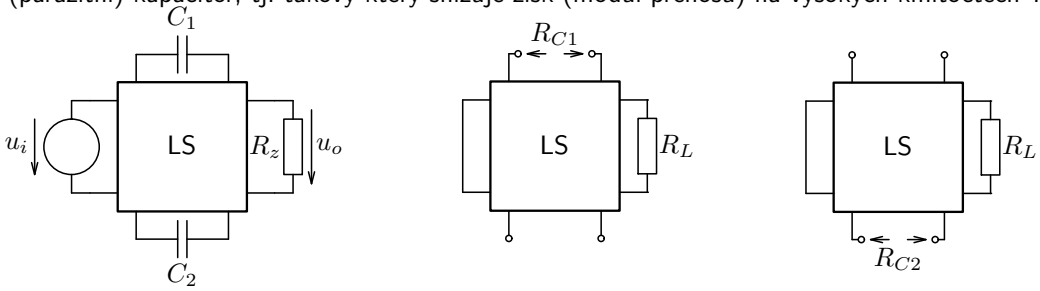
$$H(j\omega) = H_1(j\omega)H_2(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_1)} = \frac{1}{1+\frac{j\omega}{\omega_1}+\frac{j\omega}{\omega_2}-\frac{\omega^2}{\omega_1\omega_2}} \tag{15.73}$$

Pokud je mezní kmitočet definován jako ω_h pro jejž platí $|H(j\omega_h)| = 1/\sqrt{2}$, pak lze pro vztah 15.73 určit

$$\omega_h \approx \frac{1}{\tau_1+\tau_2} = \frac{\omega_1\omega_2}{\omega_1+\omega_2}, \tag{15.74}$$

což je přibližná relace, která velmi dobře platí pokud $\omega_1 \neq \omega_2$. Pro $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$ je chyba největší $\omega_d \doteq 0{,}64\omega_0 \neq \omega_0/2$, ale nikterak zásadní.

Uvedenou aproximaci pro výpočet horního mezního kmitočtu lze stejně jako v případě výpočtu f_d využít i pro vyšší řády přenosových funkcí. Podobně lze určit i jednotlivé zlomové kmitočty, resp. časové konstanty. Ty se určí opět pro každý (parazitní) kapacitor, tj. takový který snižuje zisk (modul přenosu) na vysokých kmitočtech[3].



Obrázek 15.47: Lineární systém (LS) se dvěma oddělovacími, resp. blokovacími kapacitory (a), určení časové konstanty pro C_1 (b) a pro C_2 (c).

Časové konstanty $\tau_i = C_i R_{C_i}$ určíme z R_{C_i}, tj. vnitřního odporu z „pohledu“ daného C_i, přičemž ostatní kapacitory bereme jako rozpojené. Přenos lze aproximovat vztahem $H(s) \approx \Pi_i \frac{1}{1+s\tau_i}$ a ω_h určit analogicky k (15.74):

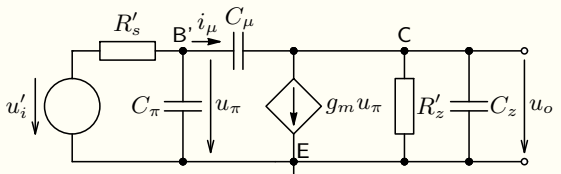
$$\omega_h \approx \frac{1}{R_{C_1}C_1 + R_{C_2}C_2 + \cdots} = \frac{1}{\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} + \cdots}, \qquad \boxed{\omega_h = 2\pi f_h \approx \frac{1}{\sum_i \tau_i}} \tag{15.75}$$

[3] Oddělovací a blokovací kapacitory se v oblasti vysokých kmitočtů jeví jako zkrat.

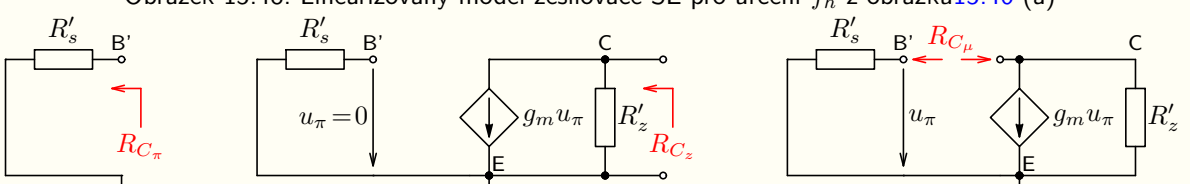
Příklad 15.21

Zadání: Určete horní mezní kmitočet f_d zesilovače z předešlého příkladu 15.20 metodu časových konstant.

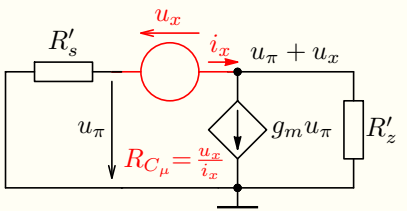
Řešení: Aplikací výše uvedeného postupu na obvod dle obrázku 15.46 (a) dostaneme náhradní schémata pro výpočet jednotlivých časových konstant, resp. vnitřních odporů, přičemž evidentně platí: $R_{C_\pi} = R'_s$ a $R_{C_z} = R'_z$.



Obrázek 15.48: Linearizovaný model zesilovače SE pro určení f_h z obrázku15.46 (a)



Obrázek 15.49: Náhradní obvody pro určení jednotlivých časových konstant pro určení f_h.



Vztah pro R_{C_μ} získáme z rovnice pro uzlové napětí $u_x + u_\pi$:

$$g_m u_\pi + \frac{u_x + u_\pi}{R'_z} = i_x, \quad u_\pi = -R'_s i_x$$

$$\frac{u_x}{R'_z} = i_x \left(1 + g_m R'_s + \frac{R'_s}{R'_z}\right) \Rightarrow R_{C_\mu} = \frac{u_x}{i_x} = R'_z + g_m R'_s R'_z + R'_s$$

Dosazením numerických hodnot z příkladu 15.20, resp. 15.10 a výrazů 15.70, 15.71 dostaneme pro jednotlivé časové konstanty a horní mezní kmitočet následující numerické hodnoty:

$$R_{C_\pi} C_\pi \doteq 2\,\mathrm{ns}, \qquad R_{C_\mu} C_\mu \doteq 33\,\mathrm{ns}, \qquad R_{C_z} C_z \doteq 2\,\mathrm{ns},$$

$$f_h \approx \frac{1}{2\pi(R_{C_\pi} C_\pi + R_{C_\mu} C_\mu + R_{C_z} C_z)} \doteq 4.3\,\mathrm{MHz}.$$

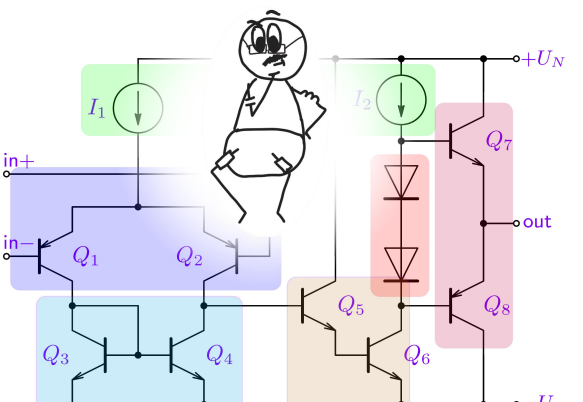
Opět se potvrdil výrazný vliv kapacity C_μ, jelikož časová konstanta $R_{C_\mu} C_\mu$ je více jako o řád vyšší než ostatní. Uvedený výsledek velmi dobře koresponduje s provedenou analýzou.

Poznámky XV

Kapitola 16

Struktury tranzistorových zesilovačů

Tato kapitola bezprostředně navazuje na předchozí kapitolu a zabývá zapojením vícestupňových tranzistorových struktur zejména pro zesilování signálu. Začíná implementací zdrojů proudu a proudových zrcadel. Uživatel se dále seznámí s vícestupňovými zapojeními, jako je kaskoda, rozdílový a koncový stupeň, zapojení s dynamickou zátěží a mnoha dalšími. Budou odvozeny jejich vlastnosti a ukázány výhody, pro které se používají. Kapitola se pak uzavírá odvozením základní struktury operačního zesilovače (OZ). Jsou také diskutována vybraná zapojení vyráběných OZ ve spojitosti s jejich parametry.

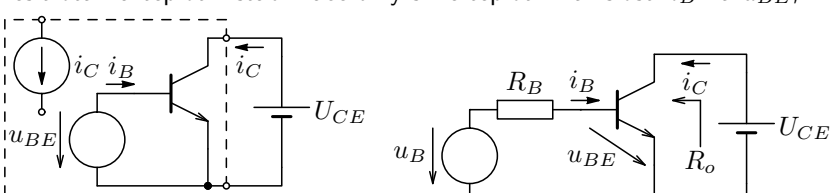


Kombinované tranzistorové struktury se dnes používají zejména v IO. Jsou to jak zesilovače a komparátory, tak další obvodové struktury pro zpracování analogové signálů. Jedním ze základních podpůrných obvodů těchto struktur (nastavení pracovních bodů zesilovacích tranzistorů, ...) jsou proudové zdroje a zrcadla.

16.1. Proudové zdroje a proudová zrcadla

16.1.1. Jednoduchý proudový zdroj s tranzistorem

Základním prvkem pro konstrukci proudového zdroje (i_C) je tranzistor, jelikož sám představuje proudový zdroj řízený proudem, resp. napětím v případě FET. V případě BJT lze řídící proud vytvořit pomocí napěťového zdroje u_B v sérii s omezujícím odporem R_B. Použití samotného zdroje je principiálně možné, ale prakticky je pak nutné řešit otázku teplotní stabilizace díky silné teplotní závislosti i_B na u_{BE}, viz proudová zrcadla dále.

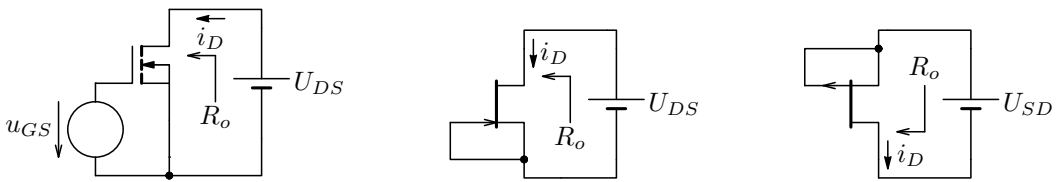


Obrázek 16.1: Ideové uspořádání proudového zdroje s BJT a jeho obvodová realizace.

Pokud zanedbáme Earlyho efekt ($U_A \to \infty$), platí v aktivním režimu tranzistoru pro stejnosměrnou složku výstupního proudu:

$$I_C = \beta_F I_B \doteq \beta_F \frac{U_B - 0{,}7}{R_B}. \tag{16.1}$$

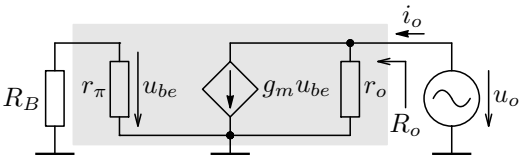
V případě FET je základní realizace proudového zdroje jednodušší – lze použít přímo napěťový zdroj, případně JFET s technologicky nastaveným I_{DSS}, viz (13.16).



Obrázek 16.2: Elementární zapojení proudového zdroje s unipolárními tranzistory.

Jedním ze základních parametrů udávající kvalitu zdroje je jeho vnitřní odpor/impedance. V případě těchto základních realizací je výstupní odpor zdroje evidentně roven výstupnímu odporu tranzistoru, jak je zřejmé z obrázku 16.3. Jeho velikost je pak dána relacemi (15.6) a (15.10).

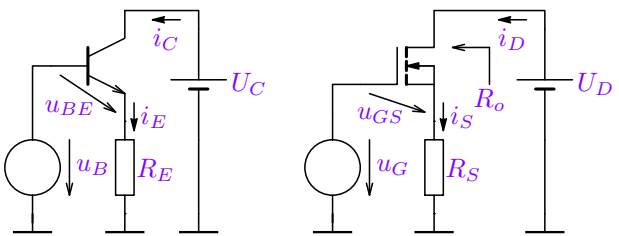
$$R_o = r_o \tag{16.2}$$



Obrázek 16.3: Náhradní linearizované zapojení obvodu 16.1 pro určení výstupního odporu.

16.1.2. Proudový zdroj s tranzistorem a paralelní proudovou ZV

Pro stabilizaci výstupního proudu (např. minimalizaci závislosti na parametrech tranzistoru, tj. i_C na β, ...) a zvýšení výstupního odporu základních zapojení proudového zdroje lze využít zápornou ZV, jak ukazují následující obrázky.



Obrázek 16.4: Zapojení proudového zdroje se ZZV zavedenou pomocí rezistoru R_E, resp. R_S v případě použití bipolárního (a), resp. unipolárního (b) tranzistoru.

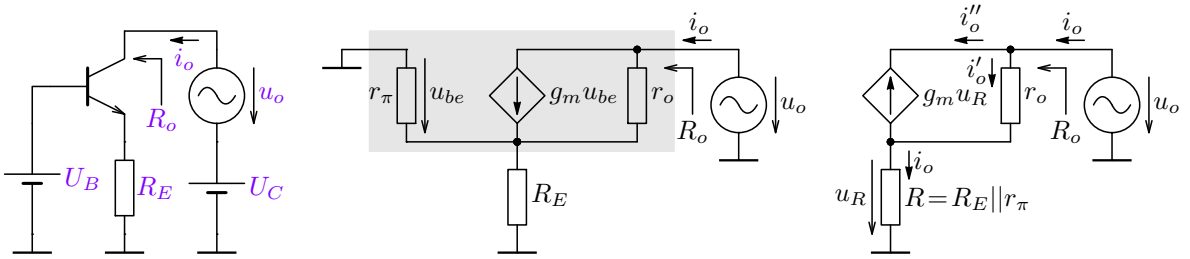
Obecně může mít proudový zdroj (jako i v předchozích případech) stejnosměrnou i střídavou složku $i_C = I_C + i_c$, tj. pro buzení $u_B = U_B + u_b$. Pro stejnosměrnou složku za předpokladu $U_A \to \infty$ a $U_B \gg 0{,}7\,\mathrm{V}$ pro BJT platí:

$$I_C \doteq \alpha_F \frac{U_B - 0{,}7}{R_E} \doteq \frac{U_B - 0{,}7}{R_E}, \tag{16.3}$$

Pro střídavou složku bychom nahradili tranzistor linearizovaným zapojením (např. T-modelem) a zjistili, že

$$i_c = \alpha_F i_e = \alpha_F \frac{u_b}{r_e + R_E}. \tag{16.4}$$

Následuje výpočet výstupního odporu, který je jedním ze základních parametrů proudového zdroje.



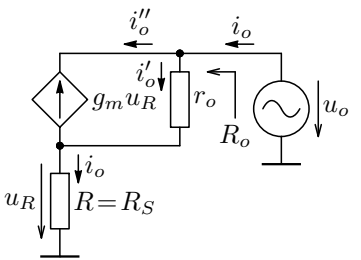
Obrázek 16.5: Zapojení pro určení výstupního odporu proudového zdroje s BJT (a), náhradní linearizované schéma (b) a jeho úprava (c).

Výstupní odpor zapojení určíme jako $R_o = u_o/i_o$ z 16.5 (b), resp. 16.5 (c), kde $u_R = -u_{be}$. Platí:

$$i_o = \frac{u_o - u_R}{r_o} - g_m u_R = \Big|_{u_R = R i_o} = \frac{u_o}{r_o} - i_o \left(\frac{R}{r_o} + g_m R \right) \Rightarrow i_o \left(1 + \frac{R}{r_o} + g_m R \right) r_o = u_o, \quad \text{kde } R = R_E || r_\pi,$$

$$\boxed{R_o = \frac{u_o}{i_o} = r_o \left(1 + \frac{R}{r_o} + g_m R \right)} \doteq \begin{cases} r_o \left(1 + g_m R\right) \text{ pro } R_E \approx \frac{1}{g_m}, & R_o \doteq 2 r_o \text{ pro } R_E = r_e \doteq R \\ r_o g_m R \quad \text{pro } R_E \gg \frac{1}{g_m}, & R_o \doteq r_o g_m r_\pi = \beta r_o \text{ pro } R_E \geq r_o,\ R \doteq r_\pi. \end{cases} \tag{16.5}$$

Náhradní linearizovaný obvod pro určení výstupního odporu v případě FET tranzistoru je téměř shodný s obvodem na obrázku 16.5 (c), s tím rozdílem že, zde je vstupní odpor tranzistoru (r_π) nekonečný, tj. platí $R = R_S$.



Obrázek 16.6: Náhradní schéma pro určení výstupního odporu zapojení dle 16.4 (b).

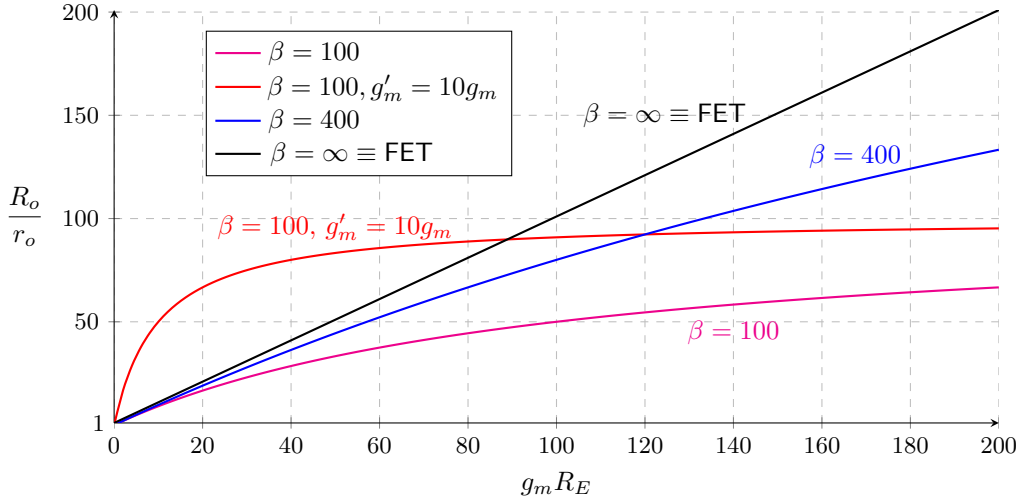
Pro výstupní odpor podle (16.5) psát:

$$R_o = r_o\left(1 + \frac{R_S}{r_o} + g_m R_S\right) \doteq \begin{cases} r_o\,(1 + g_m R_S) \doteq 2r_o & \text{pro } R_S \approx \frac{1}{g_m}, \\ r_o g_m R_S & \text{pro } R_S \gg \frac{1}{g_m}. \end{cases} \tag{16.6}$$

Je zřejmé, že výstupní odpor roste lineárně s odporem R_S, což je výrazná změna oproti zapojení s bipolárním tranzistorem. Zde platí $R_{out} \to \infty$, pokud $R_S \to \infty$, což je v kontrastu se vztahem (16.5), kde maximální hodnota výstupního odporu (pro $R_E \to \infty$) je βr_o.

Zvýšení vstupního odporu je zásadní zejména pro $R_E > r_e$, již pro $R_E = r_e$, resp, $R_S = 1/g_m$ se zvýší odpor o r_o! Je to způsobeno proudovou sériovou zápornou ZV zavedenou právě pomocí R_E, rep. R_S. Tím se část napětí u_o objeví jako u_R (viz náhradní obvod), kterým je řízen proudový zdroj. Vzhledem k orientaci je však jeho proud $g_m u_R = -i_o''$ a tím výrazně zmenšuje proud i_o, tj. zvětšuje R_o. Výsledky lze ověřit analýzou.

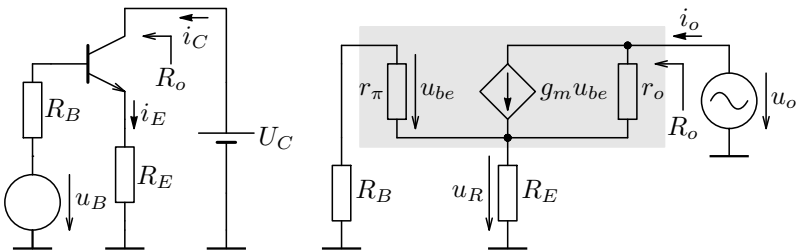
Grafické znázornění průběhu výstupního odporu v závislosti na velikosti odporu R_E, resp. R_S je uvedeno na následujícím obrázku, 16.7. Výstupní odpor je vynášen relativně k hodnotě výstupního odporu tranzistoru r_o. Stejně tak i hodnota odporu R_E, resp. R_S je vynášena relativně v násobcích $1/g_m$.



Obrázek 16.7: Relativní hodnota výstupního odporu proudového zdroje s tranzistorem v závislosti na velikosti odporu R_E, resp. R_S (relativně k $1/g_m$), viz také komentář.

Graf je parametrický pro různé hodnoty proudového zesilovacího činitele β. Pro hodnotu $\beta = 100$ je průběh vynesen navíc i pro desetinásobek transkonduktance g_m, což je vhodné pro porovnání s tranzistorem FET.

Je zřejmé, že v případě implementace s BJT bude výstupní odpor závislý na charakteru buzení, resp. vnitřním odporu budicího zdroje u_B, který označme R_B, jak je uvedeno na obrázku 16.8.



Obrázek 16.8: Zapojení proudového zdroje s BJT a neideálním napěťovým buzením (a) a jeho náhradní linearizované zapojení pro určení výstupního odporu (b).

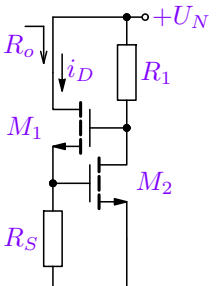
Výstupní odpor lze určit dle zapojení 16.8 (b), které je však obdobou schématu 16.5 (c), kde $R = R_E||(r_\pi + R_B)$ a řízený zdroj není řízen napětím u_R, ale pouze jeho částí $u_{be} = -u_R \frac{r_\pi}{r_\pi + R_B}$. Potom lze podobně jako v předchozím případě pro výstupní odpor odvodit vztah:

$$R_o = r_o \left(1 + \frac{R}{r_o} + g_m R \frac{r_\pi}{r_\pi + R_i}\right) \doteq \begin{cases} r_o \left(1 + \frac{r_\pi}{r_\pi + R_i}\right) & \text{pro } R_E = \frac{1}{g_m}, \\ r_o g_m \frac{(r_\pi + R_i) r_\pi}{r_\pi + R_i} = \beta_F r_o & \text{pro } R_E \geq r_o. \end{cases} \tag{16.7}$$

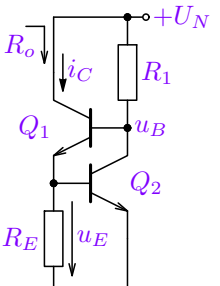
Je zřejmé, že neideální napěťové buzení se projeví zejména pro malé hodnoty emitorového odporu $R_E \approx r_e$, pro které je výstupní odpor menší (např. pro $R_i = r_\pi$ je pak $R_o \doteq 3/2 r_o$ oproti původní hodnotě $2r_o$). Je to dáno tím, že je $|u_{be}| < u_R$, a tím je menší i proud $|i_o''|$ (viz obrázek 16.5 (c)), který se odečítá od proudu i_o. Tím je tento proud větší, tj. výstupní odpor menší oproti zapojení s ideálním napěťovým buzením.

16.1.3. Proudový zdroj s vícenásobnou ZV

Variantou předchozího zapojení je níže uvedené zapojení proudového zdroje, mimo sériové ZV je zavedená i paralelní proudová ZV tvořená dalším tranzistorem M_2, resp. Q_2, čímž se dále stabilizuje proud I_D, resp. I_C proudového zdroje. Tím se dosáhne velkého výstupního odporu R_o zdroje i pro relativně malé hodnoty R_S, resp. R_E, tj. nízké úbytky stejnosměrného napětí. Z níže uvedeného je zřejmé, že proud I_D, resp. I_C závisí minimálně na R_1, který slouží pouze pro otevření tranzistorů a nastavení proudů tranzistorů M_2, resp. Q_2, více viz. přednáška.



(a)



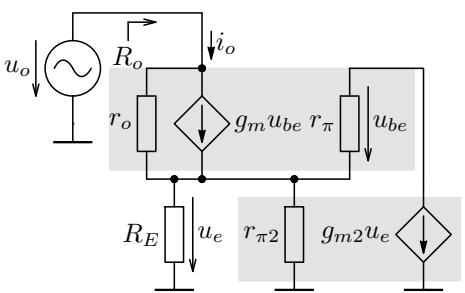
(b)

Pro I_C, resp. I_D platí:

$$I_C \doteq \frac{0{,}7}{R_E},$$

$$I_D(U_{GS}) = \frac{U_{GS2}}{R_S},$$

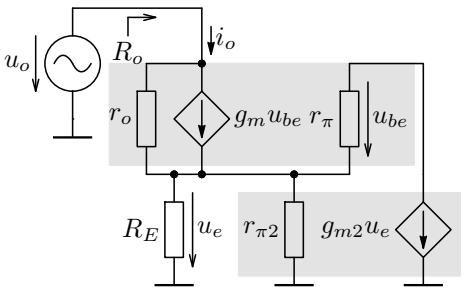
kde I_D získáme s pomocí řešení (13.12), pokud volíme $U_{GS2} < U_{GS1}$, tj. $I_{D2} \ll I_{D1}$, jak bude zřejmé dále.



(c)

Obrázek 16.9: Zapojení proudového zdroje se ZV zavedenou tranzistorem M_2 (a), resp. Q_2 (b) a jeho náhradní linearizované schéma pro výpočet výstupního odporu (c), v případě zanedbání vlivu R_1 (např. proudový zdroj).

Výstupní odpor odvodíme z uvedeného linearizovaného schématu pro změny obvodových veličin v SKP a $R_1 \to \infty$:



$$\frac{u_e - u_o}{r_o} + \frac{u_e}{R} + g_m r_\pi g_{m2} u_e + g_{m2} u_e = 0, \quad \text{kde} \quad R = R_E || r_{\pi 2}$$

$$\Rightarrow \frac{u_o}{r_o} = u_e \left(\frac{1}{r_o} + \frac{1}{R} + \beta g_{m2} + g_{m2} \right) \doteq u_e \left(\frac{1}{R} + \beta g_{m2} \right),$$

$$i_o = \frac{u_e}{R} + g_{m2} u_e = u_e \left(\frac{1}{R} + g_{m2} \right) \Rightarrow \tag{16.8}$$

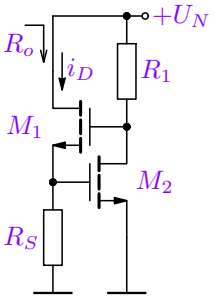
$$\boxed{R_o} = \frac{u_o}{i_o} = r_o \frac{\frac{1}{R} + \beta g_{m2}}{\frac{1}{R} + g_{m2}} \boxed{\doteq \beta r_o}, \quad \text{pro} \quad \frac{1}{R} \ll g_{m2} \tag{16.9}$$

Uvedené zanedbání platí evidentně pro $I_{C2} \approx I_C$, kdy $g_{m2} \gg \frac{1}{R_E}$ a tím $r_{\pi 2} = \frac{\beta}{g_{m2}} \gg R_E \doteq R$, jelikož $R_E \doteq \frac{0{,}7}{I_C} = \frac{0{,}7}{g_m U_T} \doteq \frac{30}{g_m}$.

Pokud je pro nastaveni proudu I_{C2} použit rezistor R_1, je obecný vztah pro výstupní odpor poměrně složitý a zde je uvedena jeho zjednodušená forma pro $R_1 \gg R_E$:

$$R_o \doteq \frac{R_1 R_E \beta \beta_2 g_m g_{m2} + R_1 R_E \beta_2 g_m g_{m2} + R_E \beta \beta_2 g_m}{R_1 R_E \beta_2 g_m g_{m2}} r_o = \left(\beta + 1 + \frac{\beta}{R_1 g_{m2}} \right) r_o \doteq \beta r_o. \tag{16.10}$$

Přesný vztah uvádí analýza. Z něho je patrné, že pro $R_1 \to 0$ dostaneme pro výstupní odpor stejný vztah jako (16.5). Dále je zřejmé, že při buzení proudovým zdrojem je třeba nastavit dostatečnou hodnotu I_{C2}, resp. g_{m2} – v praxi většinou odporem R_1 na $I_{C2} \approx I_C$, viz výsledky analýzy.



Pro zapojení s unipolárními tranzistory je náhradní linearizované schéma analogické zapojení 16.9 (c), kde však vstupní odpory tranzistorů r_π,$r_{\pi 2} \to \infty$. Výsledný vztah pro výstupní odpor R_o i s uvažováním rezistoru R_1 lze odvodit v následujícím tvaru:

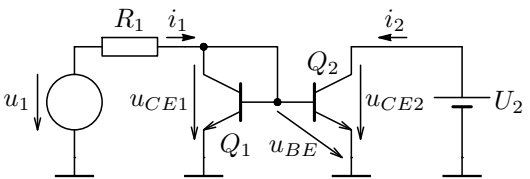
$$\boxed{R_o} = r_o R_1 R_S g_m g_{m2} + r_o R_S g_m + R_S + r_o \boxed{\doteq r_o R_1 R_S g_m g_{m2}}, \qquad (16.11)$$

což znamená, že na rozdíl od implementace s BJT je v případě verze s FET výhodnější proudové buzení, tj. $R_1 \to \infty$, pro něž $R_o \to \infty$. Je to obdoba srovnání verzí zdroje (s BJT vs. FET) z předchozí kapitoly s tím rozdílem, že lze dosáhnout obrovské hodnoty R_o i s relativně nízkou hodnotou R_S. Pro $R_1 \to 0$ vede samozřejmě vztah (16.11) na (16.6). Velká hodnota R_1, pak vede na doporučení uvedené výše, tj. $I_{D2} \ll I_{D1}$.

V praxi lze pro verzi s FET použít na místě R_1 buď jednoduchý proudový zdroj (IO) nebo rezistor v řádu MΩ (diskrétní implementace). Výsledky lze ověřit analýzou, komentář viz. přednáška.

16.1.4. Základní proudové zrcadlo

Velkou nevýhodou základní konstrukce proudového zdroje dle 16.1 a 16.2 je velká závislost výsledného proudu na parametrech tranzistoru (β, K_p, ...). Tento nedostatek lze řešit zápornou zpětnou vazbou dle 16.4, což je však na úkor zvýšení napájecího napětí – pokud má ZZV dobře fungovat, je třeba, aby úbytek na rezistoru R_E, resp. R_S byl nezanedbatelný (např. 1-2 V). Tento nedostatek řeší přidání dalšího tranzistoru a vytvoření tzv. proudového zrcadla, viz obrázek 16.10, kde tranzistor Q_2 je v aktivním režimu pro $U_2 = U_{CE2} > 0{,}2\,\mathrm{V}$.



Pro stejnosměrnou složku I_1 za předpokladu $U_A \to \infty$ a $U_1 \gg 0{,}7\,\mathrm{V}$ pro BJT platí:

$$I_1 = \frac{U_1 - U_{BE}}{R_1} \doteq \frac{U_1 - 0{,}7}{R_1} \doteq I_{C1} \qquad (16.12)$$

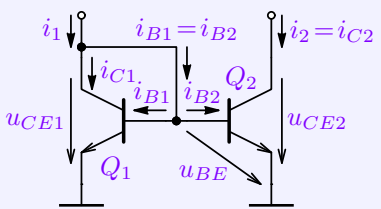
Obrázek 16.10: Zapojení jednoduchého proudového zrcadla s bipolárními tranzistory (a), schéma s označením jednotlivých proudů (b).

Oba tranzistory mají shodné napětí u_{BE} – jsou spojeny jejich báze i emitory. Jestliže zanedbáme vliv Earlyho efektu a dále budeme uvažovat, že **oba tranzistory jsou shodné** a pracují při stejné teplotě, pak platí:

$$u_{BE} = u_{BE1} = u_{BE2} \quad \Rightarrow \quad i_{B1} = i_{B2} = i_B, \quad i_{C1} = i_{C2} = i_C \quad \text{pro} \quad U_A \to \infty. \qquad (16.13)$$

Další výhodou tohoto zapojení je tzv. zrcadlení proudů, tj. poměr proudů I_1 a I_2, který zapojení zachovává. Pokud jsou tranzistory identické, měly by být proudy I_1 a I_2 také stejné, což však platí pro tento případ pouze přibližně:

Proudový přenos jednoduchého proudového zrcadla s BJT



$$i_1 = i_C + 2i_B = i_B(\beta_F + 2), \quad i_2 = i_C = i_B\beta_F$$

Proudový přenos je pak dán vztahem

$$H_I = \frac{i_2}{i_1} = \frac{\beta_F}{\beta_F + 2} = \frac{1}{1 + \frac{2}{\beta_F}} \tag{16.14}$$

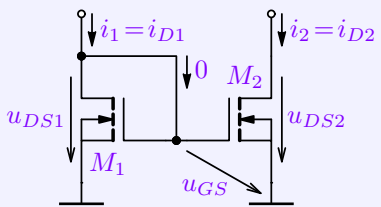
Pro $\beta_F = 100$ je $H_I \doteq 0{,}98$, tj. relativní chyba zrcadlení $\epsilon = 2\,\%$.

Je zřejmé, že výše uvedené odvození předpokládá, že jsou tranzistory samozřejmě v aktivním režimu a je zanedbán Earlyho jev ($U_A \to \infty$). Jeho vliv je však v reálném případě nezanedbatelný, zejména pro $U_{CE2} \gg U_{CE1} = U_{BE} \doteq 0{,}7\,\mathrm{V}$, viz analýza s ukázkou. Jeho vliv je eliminován pouze v případě $U_{CE2} = U_{CE1} \doteq 0{,}7\,\mathrm{V}$, což vede na vylepšené zapojení, tzv. Wilsonovo zrcadlo, viz dále.

Výstupní odpor je evidentně dán pouze výstupním odporem tranzistoru $\boxed{R_o = r_o}$ tak, jako v případě elementárního zapojení 16.1.

Analogicky je pak možné získat zapojení s unipolárními tranzistory, kde poměr však proudů I_1 a I_2 nemůže nezáviset na proudech gate (ty jsou nulové). Pokud jsou tranzistory identické budou i proudy drainů identické.

Proudový přenos jednoduchého proudového zrcadla s FET



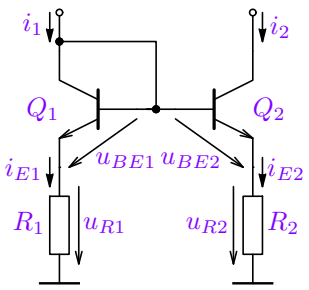
Vzhledem k tomu, že $i_{G1} = i_{G2} = 0$, je proudový přenos H_I dán přímo poměrem drainových proudů, které jsou v případě $\lambda \to 0$ a shodných tranzistroů shodné:

$$H_I = \frac{i_2}{i_1} = 1 \tag{16.15}$$

Uvedené tvrzení opět předpokládá, že jsou tranzistory zde v saturačním režimu a je zanedbán sklon výstupních charakteristik tranzistoru ($\lambda \to 0$). Jeho vliv je však v reálném případě také nezanedbatelný, zejména pro $U_{DS2} \gg U_{DS1} = U_{GS}$, viz analýza. Jeho vliv je eliminován pouze v případě $U_{DS2} = U_{DS1}$, což vede opět vylepšené zapojení, tzv. Wilsonovo zrcadlo, které je uvedeno dále.

I zde je výstupní odpor dán pouze výstupním odporem tranzistoru $\boxed{R_o = r_o}$ tak, jako v případě elementárního zapojení 16.2.

Pokud je požadován jiný proudový přenos než 1, je toho možné dosáhnout několika způsoby. Jedním z možných řešení je použití ZZV jako v případě proudového zdroje v zapojení 16.4, přičemž emitorový odpor lze přidat buď k tranzistoru Q_2 (Widlarovo zrcadlo) nebo k oběma tranzistorům, jak ukazuje zapojení 16.11.



Obrázek 16.11: Zapojení proudového zrcadla s odpory v emitorech tranzistorů.

Pokud je $i_1 \neq i_2$, bude zřejmě i $u_{BE1} \neq u_{BE2}$. Pak označme $u_{BE1} = u_{BE}$ a $u_{BE2} = u_{BE} + \Delta u_{BE}$, přičemž platí:

$$u_{BE} + u_{R1} = u_{BE} + \Delta u_{BE} + u_{R2}$$

Většinou lze zanedbat velikost změny Δu_{BE} oproti napětí na rezistorech, resp. $u_{BE} + u_{R1} \gg \Delta u_{BE}$. Pak je

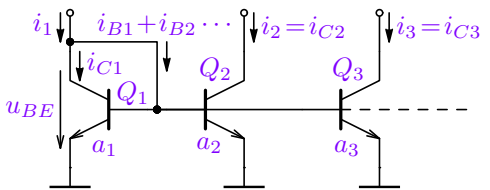
$$u_{R1} = u_{R2} \;\Rightarrow\; i_{E1} R_1 = i_{E2} R_2$$

Zanedbáme-li konečný proudový zesilovací činitel β_F tranzistorů, pak je $i_{E1} \doteq i_1$ a $i_{E2} \doteq i_2$ a pak platí

$$H_I = \frac{i_2}{i_1} \doteq \frac{i_{E2}}{i_{E1}} \doteq \frac{R_1}{R_2} \tag{16.16}$$

I v tomto případě jsme zanedbali vliv Earlyho napětí, nicméně vlivem ZZV bude mít na proudový přenos menší vliv než základní konfiguraci zrcadla díky výraznému zvětšení výstupního odporu, viz analýzu s . Existuje zde však již zmíněná nevýhoda v nutnosti zvýšení napájecího napětí. V integrovaných obvodech je proto častější využití různých velikostí tranzistorů, jak je ukázáno dále.

Proudový přenos (poměr proudů) lze měnit i pomocí velikosti jednotlivých tranzistorů (poměrů ploch jejich emitorových přechodů), jak je ukázáno níže na vícenásobném zrcadle, viz obrázek 16.12.



Obrázek 16.12: Zapojení několikanásobného proudového zrcadla s různými přenosy.

Opět předpokládejme, že $\beta_F \gg 1$, tj. $i_{C1} \doteq i_1$ a $U_A \to \infty$. Pak vzhledem k $u_{BE2} = u_{BE2} = u_{BE}$ platí pro proudový přenos:

$$\boxed{H_{I2}} = \frac{i_2}{i_1} = \frac{i_{C2}}{i_{C1}} = \frac{I_{S2}\left(\mathrm{e}^{\frac{u_{BE}}{N_F U_T}} - 1\right)}{I_{S1}\left(\mathrm{e}^{\frac{u_{BE}}{N_F U_T}} - 1\right)} \boxed{= \frac{I_{S2}}{I_{S1}} = \frac{a_2}{a_1}}, \qquad (16.17)$$

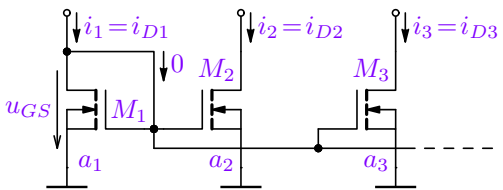
kde a_x jsou plochy (relativní) emitorových přechodů. Pokud budou všechny tranzistory stejné, budou stejné i jejich kolektorové proudy, tj. i_2, i_3, ... A pokud spojíme např. kolektory tranzistorů Q_2 a Q_3, bude jejich celkový proud dvojnásobný.

Pokud vezmeme v úvahu konečné β a označíme $a_1 = 1$, $i_{C1} = i_C$ a $i_{B1} = i_B$, pak $i_1 = i_C + i_B + a_2 i_B + a_3 i_B + \ldots$ a pro přenos H_{I2} platí:

$$H_{I2} = \frac{i_2}{i_1} = \frac{i_B \beta_F a_2}{i_B(\beta_F + 1 + a_2 + a_3 + \ldots)} = \frac{\beta_F a_2}{\beta_F + 1 + a_2 + a_3 + \ldots} = a_2 \quad \text{pro } \beta_F \to \infty \qquad (16.18)$$

V integrovaném obvodu lze místo toho zdvojnásobit velikost emitorového (i kolektorového) přechodu a proud i_2 tím zdvojnásobit. Přidáním dalších tranzistorů lze „rozzrcadlit“ proud i_1 na několik dalších a to v různých násobcích dle poměrů ploch jednotlivých tranzistorů. Výsledky lze ověřit analýzou.

Analogicky jako u zrcadla s bipolárními tranzistory lze konstruovat i zrcadlo s tranzistory unipolárními. Zde jsou z principu proudy řídících elektrod nulové a při zanedbání sklonu výstupních charakteristik tranzistorů ($\lambda = 0$), je přenos dán pouze poměry ploch jednotlivých tranzistorů. V případě MOSFETů je to pro stejné délky kanálů poměr jejich šířek.



Obrázek 16.13: Zapojení několikanásobného MOSFET proudového zrcadla s různými přenosy.

Pro všechny tranzistory předpokládejme $\lambda = 0$ jak bylo uvedeno a dále označme $u_{GS1} = u_{GS2} = u_{GS3} = \cdots = u_{GS}$. Pak pro proudový přenos H_{I2} platí:

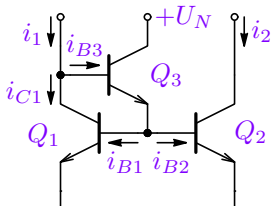
$$\boxed{H_{I2}} = \frac{i_2}{i_1} = \frac{i_{D2}}{i_{D1}} = \frac{\frac{1}{2}K_p\frac{W_2}{L_2}(u_{GS} - U_{TO})^2}{\frac{1}{2}K_p\frac{W_1}{L_1}(u_{GS} - U_{TO})^2} = \boxed{= \frac{W_2 L_1}{W_1 L_2} = \frac{W_2}{W_1}\bigg|_{L_1 = L_2}} \tag{16.19}$$

Ostatní parametry tranzistorů uvažujeme identické, tj. $K_{p1} = K_{p2} = \cdots = K_p$, $U_{TO1} = U_{TO2} = \cdots = U_{TO}$.

Vzhledem k tomu, že poměry geometrických rozměrů lze v integrovaných obvodech realizovat s velkou přesností, lze tak velmi přesně „rozzrcadlit“ vstupní proud na jednotlivé proudy výstupní.

16.1.5. Základní zrcadlo s kompenzací bázových proudů

Nepřesnost zrcadlení základní implementace proudového zrcadla s bipolárními tranzistory lze minimalizovat přidáním dalšího tranzistoru ve funkci zesilovače proudu, jak ukazuje obrázek 16.14.



Obrázek 16.14: Proudové zrcadlo s kompenzací bázových proudů.

Zanedbáme-li Earlyho jev ($U_A \to \infty$) a předpokládáme-li, že všechny tranzistory mají shodný proudový zesilovací činitel β_F, tak platí:

$$i_{B1} = i_{B2} = i_B, \quad i_{C1} = i_{C2} = i_C = \beta_F i_B = i_2, \quad i_{B3} = \frac{2i_B}{\beta_F + 1}, \tag{16.20}$$

$$i_1 = i_C + i_{B3} = i_C + \frac{2i_B}{\beta_F + 1} = i_B \left(\beta_F + \frac{2}{\beta_F + 1} \right),$$

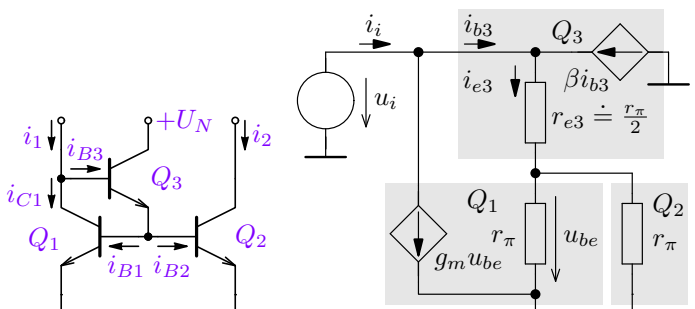
$$H_I = \frac{i_2}{i_1} = \frac{\beta_F}{\beta_F + \dfrac{2}{\beta_F + 1}} = \frac{1}{1 + \dfrac{2}{\beta_F^2 + \beta_F}}. \tag{16.21}$$

Pro $\beta_F = 100$ je $H_I \doteq 0{,}9998$, což znamená relativní chybu zrcadlení $\epsilon \doteq 0{,}02\,\%$, tj. chyba se oproti základní konfiguraci zmenšila β-krát, viz analýzu a komentář.

Výstupní odpor se oproti základní konfiguraci zrcadla nemění – je roven výstupnímu odporu r_o tranzistoru Q_2.

Vstupní odpor zrcadla s kompenzací bázových proudů

V některých případech je důležitý i vstupní odpor R_i – odpor ze strany buzení i_1. Pro proudové buzení je ideální nulový R_i. V základní konfiguraci zrcadla je to evidentně r_e pro implementaci s bipolárními tranzistory, resp. $1/g_m$ pro implementaci s unipolárními tranzistory. V případě zrcadla z obrázku 16.14 je odvození vstupního odporu uvedeno níže.



(a) (b)

Vzhledem k (16.20) je:

$$r_{\pi 1} = r_{\pi 2} = r_\pi,$$

$$I_{C3} = 2I_B\alpha \doteq 2I_B \doteq \frac{2I_C}{\beta} \;\Rightarrow\; r_{e3} = \beta\frac{r_e}{2} \doteq \frac{r_\pi}{2},$$

$$u_{be} = \frac{u_i}{2}, \quad i_{b3} = \frac{u_i}{r_\pi(\beta+1)} \doteq \frac{u_i}{r_\pi\beta} = \frac{g_m u_i}{\beta^2}$$

$$\Rightarrow\; i_{b3} \ll g_m u_{be} = g_m\frac{u_i}{2} \;\Rightarrow i_i \doteq g_m\frac{u_i}{2}$$

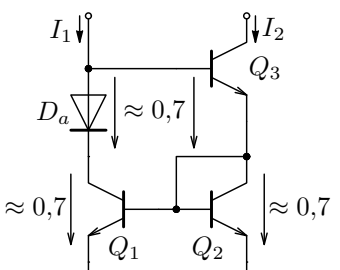
$$R_i \doteq \frac{2}{g_m} \doteq 2r_e. \qquad (16.22)$$

Obrázek 16.15: Zapojení zrcadla s kompenzací bázových proudů (a) a jeho náhradní linearizované schéma pro určení vstupního odporu (b).

Výše uvedená odvození byla provedena při zanedbání Earlyho efektu. Aby platily uvedené vztahy i při konečné velikosti Earlyho napětí U_A, je nutné zajistit shodnost napětí U_{CE}, resp. U_{DS} u zrcadlících tranzistorů. To při výše uvedených uspořádání není zajištěno – velikost napětí $U_{CE} = U_2$ výstupního tranzistoru záleží na velikosti zátěže, resp. na uspořádání výstupního obvodu.

Výrazného omezení závislosti výstupního proudu na U_A a tím i výrazného zvýšení výstupního odporu R_o zrcadel lze dosáhnout oddělením výstupu dalším tranzistorem.

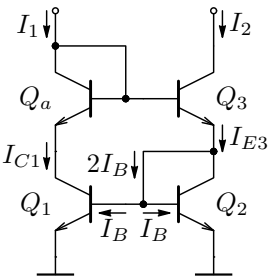
16.1.6. Wilsonovo proudové zrcadlo s bipolárními tranzistory



Obrázek 16.16: Zapojení Wilsonova zrcadla s bipolárními tranzistory (napětí je uvedeno ve [V]).

Přidáním dalšího tranzistoru je odděleno vlastní zrcadlo od zátěže a tím lze minimalizovat závislost výstupního proudu I_2 na výstupním napětí (zátěži), tj. dosáhnout výrazného zvýšení výstupní odporu proudového zdroje/zrcadla jak bude ukázáno dále. Zároveň lze dosáhnout stejného napětí u_{CE} zrcadlících tranzistorů Q_1 a Q_2. Evidentně je $U_{CE2} \doteq 0{,}7\,\mathrm{V}$ a díky tranzistoru Q_3 je vstupní napětí cca $1{,}4\,\mathrm{V}$. Přidáním diody (v reálné implementaci dalšího shodného tranzistoru Q_a) docílíme shodné napětí $U_{CE} \approx 0{,}7\,\mathrm{V}$ na zrcadlících tranzistorech Q_1 a Q_2, čímž je prakticky vyloučen vliv Earlyho jevu tranzistorů Q_1 a Q_2 na zrcadlení proudu I_2/I_1.

Zároveň se zvýšením výstupního odporu zrcadla řeší přidání tranzistoru Q_3 i další nevýhodu bipolární technologie, tj. vliv bázových proudů na proudový přenos zrcadla.



Obrázek 16.17: Zapojení Wilsonova zrcadla s bipolárními tranzistory.

Podobně jako v případě základního proudového zrcadla s kompenzací proudů určíme proudy jednotlivých tranzistorů a z nich pak statický proudový přenos H_I:

$$I_{C1} = I_C, \quad I_{E3} = I_C + 2I_B = I_B(\beta_F + 2), \quad I_{B3} = \frac{I_{E3}}{\beta_F + 1},$$

$$I_1 = I_{C1} + I_{B3} = \beta_F I_B + \frac{I_{E3}}{\beta_F + 1} = \\ = \frac{(\beta_F + 1)\beta_F I_B + (\beta_F + 2)I_B}{\beta_F + 1}, \quad (16.23)$$

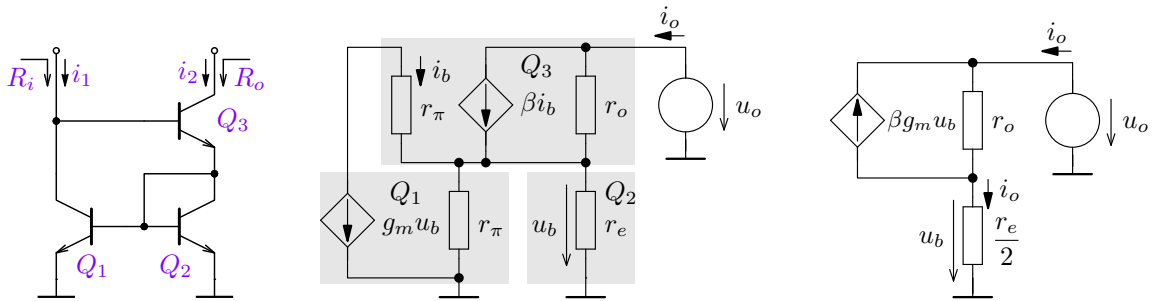
$$I_2 = \beta_F I_{B3} = \frac{\beta_F I_B(\beta_F + 2)}{\beta_F + 1} \quad (16.24)$$

$$H_I = \frac{I_2}{I_1} = \frac{\beta_F I_B(\beta_F + 2)}{(\beta_F + 1)\beta_F I_B + (\beta_F + 2)I_B} = \frac{\beta_F^2 + 2\beta_F}{\beta_F^2 + 2\beta_F + 2} = \frac{1}{1 + \dfrac{2}{\beta_F^2 + 2\beta_F}}. \quad (16.25)$$

Výsledný vztah je v zásadě stejný jako (16.21), proto i číselně dostáváme stejné hodnoty. Pro $\beta_F = 100$ je $H_I \doteq 0{,}9998$, což znamená relativní chybu zrcadlení $\epsilon \doteq 0{,}02\,\%$. Numerické ověření viz analýza.

Výstupní odpor Wilsonova zrcadla s bipolárními tranzistory

Přidání tranzistoru Q_3 výrazně snižuje závislost i_2 na výstupním napětí, tj. dochází k výraznému zvýšením výstupního odporu R_o Wilsonova zrcadla, což ukazuje následující odvození a potvrzuje i analýza s komentářem.



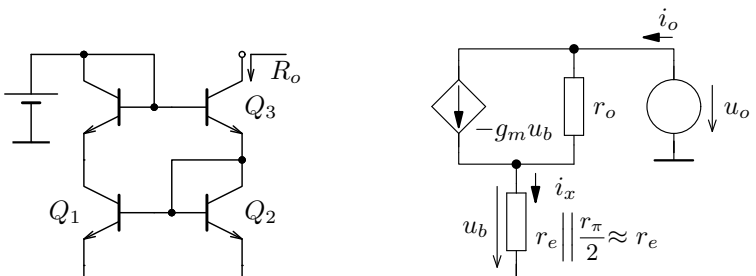
Obrázek 16.18: Wilsonovo zrcadlo s BJT (a), odpovídající linearizované schéma (b) a jeho zjednodušení (c).

$$\frac{u_b}{\frac{r_e}{2}} + \frac{u_b - u_o}{r_o} + \beta g_m u_b = 0 \;\Rightarrow\; u_b = \frac{u_o r_e}{2r_o + r_e + \beta g_m r_e r_o} = \frac{u_o r_e}{2r_o + r_e + \beta\alpha r_o} \doteq \frac{u_o r_e}{\beta r_o}$$

$$\boxed{R_o} = \frac{u_o}{i_o} = \frac{u_o}{\frac{u_b}{r_e/2}} \boxed{\doteq \frac{r_o\beta}{2}} \tag{16.26}$$

Výstupní odpor Wilsonova zrcadla s BJT pro napěťové buzení

V případě, že není zrcadlo buzeno zdrojem proudu je nutné uvažovat i vnitřní odpor budícího zdroje. Pokud by bylo zrcadlo napájeno ze zdroje s velmi malým vnitřním odporem (vstup uzemněn pro střídavé veličiny), jak je ukázáno na obrázku 16.19 (a), jehož náhradní linearizovaný obvod pro změny obvodových veličin je dle 16.18 na obrázku 16.19 (b) (místo rezistoru $r_e/2$ je nyní rezistor s hodnotou $r_e||r_\pi/2 \doteq r_e$). Zapojení je identické se zapojením 16.5 (c), kde $R \doteq r_e$, tudíž pro výstupní odpor dle (16.5) platí (16.27).



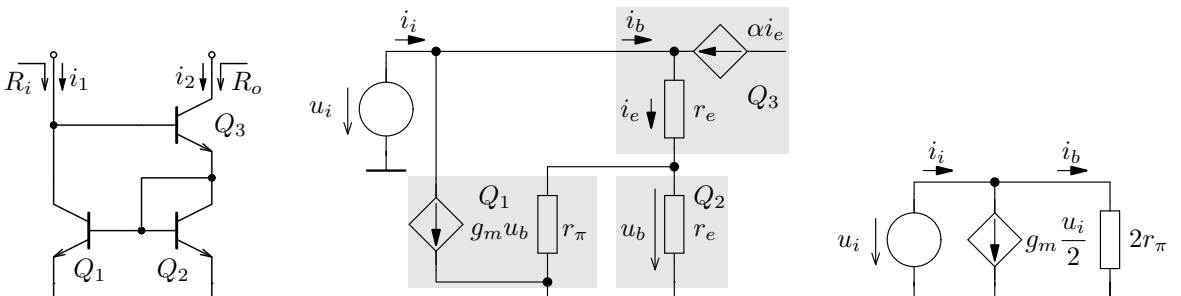
(a) (b)

$$R_o = \frac{u_o}{i_o} \doteq 2r_o. \qquad (16.27)$$

Obrázek 16.19: Zapojení pro určení výstupního odporu Wilsonova proudového zrcadla při napěťovém buzení – (a) principiální schéma, (b) linearizované zapojení.

Vstupní odpor Wilsonova proudového zrcadla s bipolárními tranzistory

Jako v případě základního zrcadla s kompenzací proudů, tak i zde odvodíme vztah pro vstupní odpor.



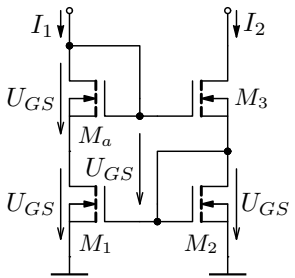
Obrázek 16.20: Wilsonovo zrcadlo s BJT (a), linearizované schéma pro určení vstupního odporu bez zakreslené zátěže (b) a jeho zjednodušení (c).

Předpokládejme, že $\beta \gg 1$, resp. $r_\pi \gg r_e$, pak $u_b \doteq u_i/2$ a $i_b = i_e/(\beta+1) \doteq u_i/(2r_e(\beta+1)) = u_i/(2r_\pi)$ a náhradní schéma obvodu lze zjednodušit na zapojení 16.20 (c). Pro vstupní odpor pak platí:

$$R_i = \frac{u_i}{i_i} \doteq \frac{u_i}{\frac{g_m u_i}{2} + \frac{u_i}{2r_\pi}} = \frac{2r_e}{\alpha} \Big|\Big| 2r_\pi \doteq 2r_e. \tag{16.28}$$

16.1.7. Wilsonovo proudové zrcadlo s unipolárními tranzistory

Podobně jako u implementace s BJT, lze zapojit Wilsonovo zrcadlo i s unipolárními tranzistory, viz obrázek 16.21.



Obrázek 16.21: Zapojení Wilsonova zrcadla s unipolárními tranzistory.

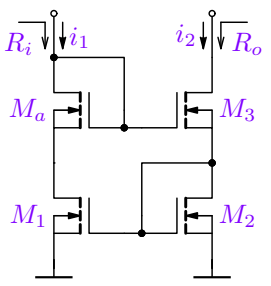
Přidání tranzistoru M_3 k základnímu zrcadlu podstatně zmenší závislost výstupního proudu na výstupním napětí a tím je výrazně zvýšen výstupního odporu, podobně jako u zrcadla s BJT. Použitím tranzistoru M_a je také docíleno shodného napětí u_{DS} na zrcadlících tranzistorech M_1 a M_2, čímž je prakticky vyloučen vliv modulace délky kanálu (nenulový parametr λ) těchto tranzistorů na zrcadlení proudu I_2/I_1. Pro shodné tranzistory pak pro statický proudový přenos H_I prakticky platí:

$$H_I = \frac{I_2}{I_1} = 1 \tag{16.29}$$

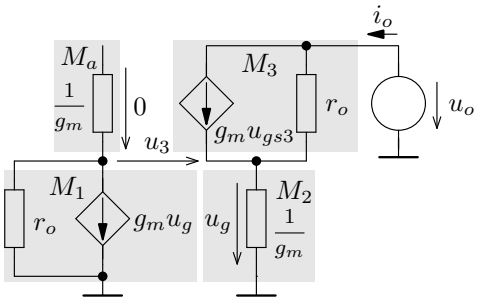
Velikost proudového přenosu H_I (poměru zrcadlení) lze u Wilsonových zrcadel opět měnit poměrem velikostí tranzistorů M_1, M_2, resp. Q_1, Q_2 pro zrcadlo s BJT.

Výstupní odpor Wilsonova zrcadla s unipolárními tranzistory

Jak bylo uvedeno i v případě implementace Wilsonova zrcadla dochází k výraznému zvýšení výstupního odporu oproti zrcadlu základnímu. Předpokládejme $I_{D_1} = I_{D_2} = I_{D_3}$, tj. $g_{m_1} = g_{m_3} = g_{m_3} = g_m$. Pro napětí u_{gs3} platí:



(a)



(b)

$$u_{gs3} = u_3 + 0 = -r_o g_m u_g - u_g = \\ = -u_g(1 + g_m r_o).$$

Pro uzlové napětí u_g lze psát rovnici, kterou lze po dosazení $u_g g_m = i_{D_2} = i_o$ přepsat na tvar vhodný pro určení R_o.

$$g_m u_g(1 + g_m r_o) + g_m u_g + \frac{u_g - u_o}{r_o} = 0$$

$$i_o\left(1 + g_m r_o + 1 + \frac{1}{g_m r_o}\right) = \frac{u_o}{r_o}$$

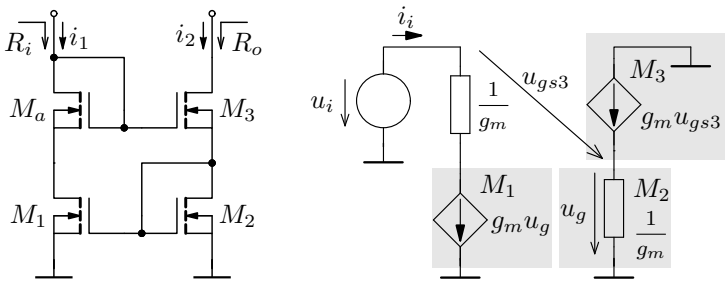
Obrázek 16.22: Zapojení Wilsonova zrcadla s MOSFET a jeho linearizované schéma pro určení výstupního odporu.

$$R_o = \frac{u_o}{i_o} = 2r_o + g_m r_o^2 + \frac{1}{g_m} \doteq g_m r_o^2, \tag{16.30}$$

což je obrovský nárůst oproti základnímu zrcadlu, tj. r_o, jelikož $g_m r_o \gg 1$, viz analýza.

Vstupní odpor Wilsonova proudového zrcadla s unipolárními tranzistory

Stejně jako v předchozích případech i zde určíme vstupní odpor zrcadla, který by měl být pro proudové buzení co možná nejmenší.



Nejprve určíme řídící napětí u_g:

$$u_{gs3} = u_i - u_g \Rightarrow u_g = \frac{u_i}{2}$$

Vhledem k relaci $g_m u_{gs3} = u_g g_m$ platí pro vstupní proud a vstupní odpor:

$$i_i = g_m u_g = g_m \frac{u_i}{2} \Rightarrow$$

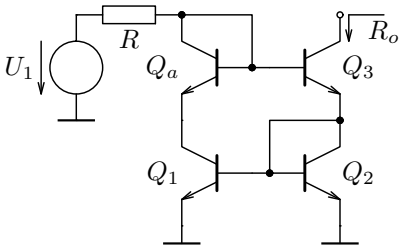
$$R_i = \frac{u_i}{i_i} = \frac{2}{g_m}. \qquad (16.31)$$

Obrázek 16.23: Zapojení Wilsonova zrcadla s unipolárními tranzistory a jeho linearizované schéma pro určení vstupního odporu.

Výsledná hodnota odpovídá hodnotě vstupního odporu pro implementaci Wilsonova zrcadla s BJT, tj. vztahu (16.28).

Výstupní odpor Wilsonova zrcadla při obecném buzení

Pokud není zrcadlo buzeno ideálním zdrojem proudu, je nutné určit výstupní odpor pro buzení obecným zdrojem s vnitřním odporem R.



Přibližný vztah pro obecný typ buzení s vnitřním odporem R lze odvodit jak pro zrcadlo s bipolárními, tak s unipolárními tranzistory:

$$R_o \doteq \frac{r_o\beta(2+g_mR)}{\beta+2g_mR} \quad \text{pro BJT,} \tag{16.32}$$

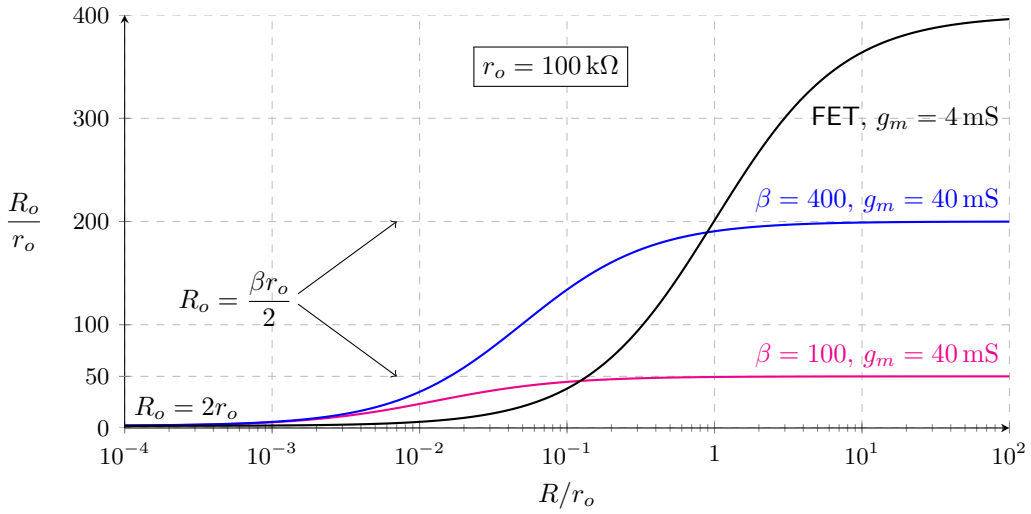
$$R_o \doteq \frac{r_o^2(2+g_mR)}{r_o+R} \quad \text{pro FET.} \tag{16.33}$$

Obrázek 16.24: Zapojení pro určení výstupního odporu Wilsonova proudového zrcadla při obecném buzení.

Je zřejmé, že limitní případy ($R \to \infty$ pro proudové a $R \to 0$ pro napěťové buzení) odpovídají výše uvedeným vztahům (16.26), (16.27) a (16.30). Nebyl odvozen pouze vztah výstupní odpor Wilsonova zrcadla pro napěťové buzení, který dostane z (16.33) limitou pro $R \to 0$:

$$R_o \doteq 2r_o \quad \text{pro FET a } R \to 0, \tag{16.34}$$

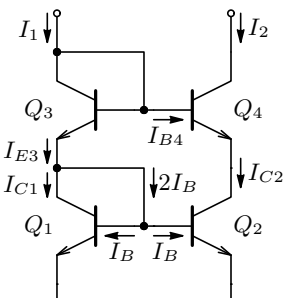
což přesně odpovídá (16.27). Grafické znázornění hodnoty R_o relativně k r_o v závislosti na R je uvedena na obrázku 16.25



Obrázek 16.25: Relativní hodnota výstupního odporu Wilsonova zrcadla v závislosti na vnitřním odporu budicího zdroje. Pro srovnání byla transkonduktance g_m pro MOSFET zvolena desetkrát nižší oproti BJT. Pro shodné g_m je nárůst R_o nesrovnatelně vyšší, viz také komentář.

16.1.8. Dvojité proudové zrcadlo s bipolárními tranzistory

V zapojeních proudových zrcadel se lze setkat i s dvojitým zrcadlem dle obrázku 16.26. Pro statický proudový přenos při zanedbání Earlyho jevu ($U_A \to \infty$) platí:



$$I_{C1} = I_{C2} = I_C, \quad I_{C2} = I_{B4}(\beta_F + 1) = \beta_F I_B \;\Rightarrow\; I_{B4} = I_B \frac{\beta_F}{\beta_F + 1},$$

$$I_2 = I_{C4} = \beta_F I_{B4} = I_B \frac{\beta_F^2}{\beta_F + 1}, \qquad I_{E3} = I_{C1} + 2I_B = I_B(\beta_F + 2),$$

$$I_1 = I_{E3} + I_{B4} = I_B \left(\beta_F + 2 + \frac{\beta_F}{\beta_F + 1}\right) = I_B \frac{\beta_F^2 + 4\beta_F + 2}{\beta_F + 1},$$

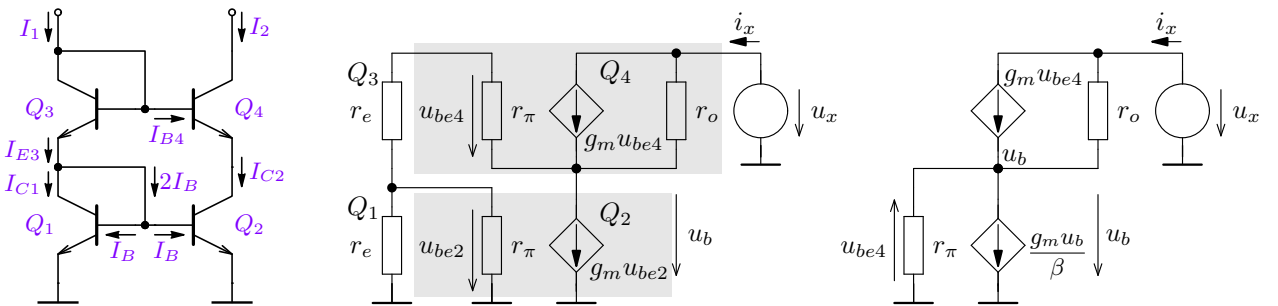
$$H_I = \frac{I_2}{I_1} = \frac{\beta_F^2}{\beta_F^2 + 4\beta_F + 2} = \frac{1}{1 + \frac{4}{\beta_F} + \frac{2}{\beta_F^2}}. \tag{16.35}$$

Obrázek 16.26: Zapojení dvojnásobného proudového zrcadla s BJT tranzistory a označením jednotlivých proudů.

Pro $\beta_F = 100$ je $H_I \doteq 0{,}96$ a relativní chyba zrcadlení $\epsilon \doteq 4\,\%$, což je dvakrát horší výsledek než u základního zrcadla, viz (16.14).

Výstupní odpor dvojitého zrcadla s bipolárními tranzistory

Výstupní odpor dvojitého zrcadla určíme z linearizovaného schématu na obrázku 16.27 (b), který můžeme dále zjednodušit variantou (c).

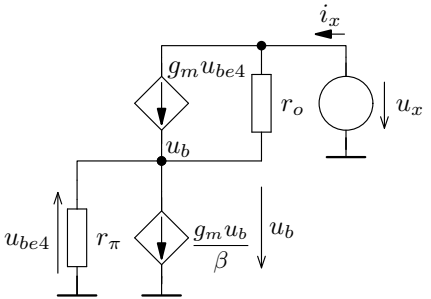


Obrázek 16.27: Zapojení dvojitého zrcadla s bipolárními tranzistory (a), jeho linearizované schéma pro určení výstupního odporu (b) a jeho zjednodušení (c).

Zjednodušení vychází z následující relace:

$$u_{be2} = u_b \frac{r_e || r_\pi}{r_e || r_\pi + r_e + r_\pi} \doteq u_b \frac{r_e}{r_\pi} \doteq \frac{u_b}{\beta} \;\Rightarrow\; u_{be2} \ll u_b \;\Rightarrow\; u_{be4} \doteq -u_b$$

Dle zjednodušeného schématu pak evidentně platí:



$$g_m u_b + \frac{u_b}{r_\pi} + \frac{u_b - u_o}{r_o} + g_m \frac{u_b}{\beta} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_b \doteq \frac{u_o}{r_o g_m}, \quad \text{pro} \quad r_\pi \ll r_o \text{ a } \beta \gg 1,$$

$$i_o = \frac{u_b}{r_\pi} + g_m \frac{u_b}{\beta} \doteq \frac{u_o}{r_\pi g_m r_o} + g_m \frac{u_o}{\beta g_m r_o} = \frac{2u_o}{\beta r_o} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{R_o = \frac{u_o}{i_o} \doteq \frac{r_o \beta}{2}}. \tag{16.36}$$

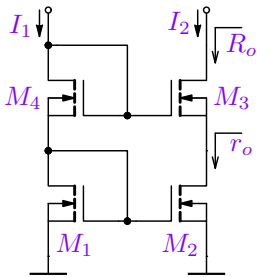
Jedná se prakticky (vzhledem k zanedbání) o stejný výsledek jako u Wilsonova zrcadla, viz 16.26, což lze ověřit numerickou analýzou, viz také komentář.

V případě napěťového buzení lze vyjít z obrázku 16.27 (b), přičemž kolektor tranzistoru Q_3 je nyní „střídavě“ uzemněn a tranzistor Q_2 bude nahrazen pouze výstupním odporem (nebyl na obrázku nakreslen), jelikož $u_{be2} = 0$. To vede na náhradní zapojení shodné s obvodem 16.5 (c), kde $R_E = r_o$, tudíž pro výstupní odpor platí vztah (16.5) pro $R_E \leq r_o$, tj.:

$$R_{out} \doteq r_o g_m r_\pi = \beta r_o,$$

což je naopak lepší výsledek než u proudového buzení a podstatně lepší výsledek, než u Wilsonova zrcadla!

16.1.9. Dvojité proudové zrcadlo s unipolárními tranzistory



Obrázek 16.28: Dvojnásobné proudové zrcadlo s FETy.

Výstupní odpor dvojitého zrcadla s FET lze určit přímo ze vztahu (16.6) pro $R_S \gg \frac{1}{g_m}$, vzhledem k tomu, že gate všech tranzistorů mají nulovou střídavou složku a výstupní odpor tranzistoru M_2 je r_o, tj.:

$$R_{out} = 2r_o + g_m r_o^2 \doteq g_m r_o^2, \tag{16.37}$$

což je stejný výsledek jako u Wilsonova zrcadla s tranzistory FET (16.30).

Tento vztah navíc platí i pro napěťové buzení, protože gate tranzistorů jsou připojeny společný potenciál a opět platí výše uvedené – gate všech tranzistorů mají nulovou střídavou složku. Z tohoto důvodu jsou dvojitá zrcadla výhodná při buzení s relativně malým vnitřním odporem.

Složitější (vícenásobné) struktury[1] proudových zrcadel poskytují výhody v podobě téměř dokonalého zrcadlení a obrovského výstupního odporu. Ten je docílen opět díky ZZV, podobně jako v případě odporové realizace (podkapitola 16.1.2), zde však s menšími nároky na velikost napájecího napětí. Oproti základním, jednoduchým implementacím zrcadel se stále jedná o cca dvojnásobné zvýšení napájecího napětí, což je nevhodné pro nízkonapěťové aplikaci impedance. Dále je třeba uvést kmitočtovou závislost výstupního „odporu"/impedance, která je samozřejmě výraznější. Uvedené výsledky platí analogicky pro zrcadla s tranzistory PNP, resp. P-kanálem.

[1] Včetně dalších modifikací jako např. trojnásobné zrcadlo BiCMOS, dots

Srovnaní jednotlivých typů zrcadel

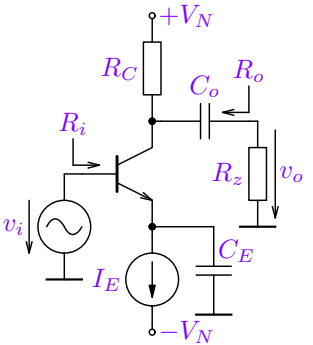
Charakteristické vlastnosti jednotlivých proudových zrcadel (proudový přenos H_I, chyba zrcadlení ϵ pro $\beta = 100$, vstupní R_i a výstupní odpor R_o pro proudové i napěťové buzení udává následující tabulka, viz také komentář.

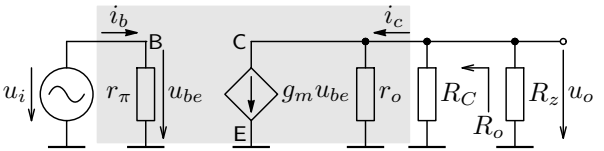
typ	H_I	ϵ [%]$\|_{\beta=100}$	R_i	$R_o\|_{i_1}$	$R_o\|_{u_1}$
2 BJT	$\frac{1}{1+2/\beta_F}\Big\|_{V_A\to\infty}$	2	r_e	r_o	r_o
3 BJT	$\frac{1}{1+\frac{2}{\beta_F^2+\beta_F}}\Big\|_{V_A\to\infty}$	0,02	$2r_e$	r_o	r_o
Wilsonovo s BJT	$\frac{1}{1+\frac{2}{\beta_F^2+2\beta_F}}$	0,02	$2r_e$	$\frac{r_o\beta}{2}$	$2r_o$
Dvojnasobné s BJT	$\frac{1}{1+\frac{4}{\beta_F}+\frac{2}{\beta_F^2}}$	4	$2r_e$	$\frac{r_o\beta}{2}$	$r_o\beta$
2 FET	$\to 1\|_{\lambda=0}$	$\to 0$	$\frac{1}{g_m}$	r_o	r_o
Wilsonovo s FET	$\to 1$	$\to 0$	$\frac{2}{g_m}$	$g_m r_o^2$	$2r_o$
Dvojnasobné s FET	$\to 1$	$\to 0$	$\frac{2}{g_m}$	$g_m r_o^2$	$g_m r_o^2$

Tabulka 16.1: Charakteristické vlastnosti proudových zrcadel pro jednoduchá zrcadla (2 BJT, 2 FET), vylepšené zrcadlo s BJT (3 BJT) a pro Wilsonova a dvojitá zrcadla jak s bipolárními, tak s unipolárními tranzistory.

16.2. Zesilovač s dynamickou zátěží

16.2.1. Motivace – dosažení vysokého napěťového zesílení





Označme $R'_C = R_C||r_o$ a pro napěťové zesílení naprázdno platí dle (15.29):

$$A_u = \left.\frac{u_2}{u_1}\right|_{R_z\to\infty} = -g_m R'_C \doteq -40 I_C R'_C. \tag{16.38}$$

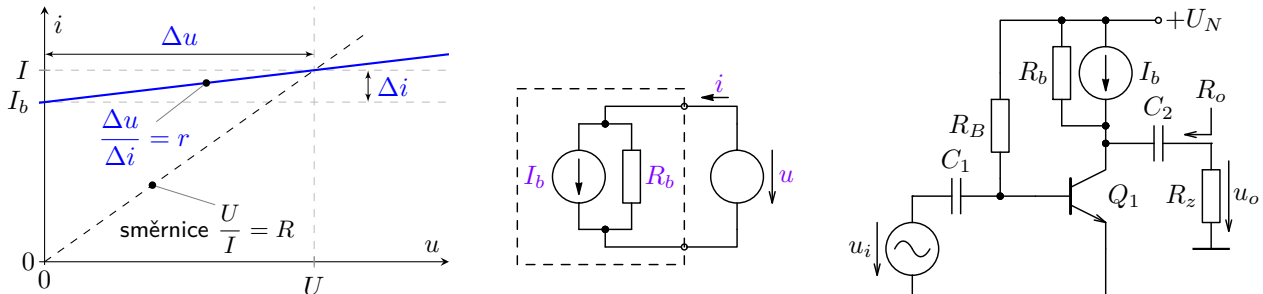
Pro vysoké A_u je nutné zvýšit R_C nebo g_m, což v obou případech vede na vysoké U_N, jelikož je nutné zajistit aktivní režim tranzistoru, tj. $U_{CE} > 0{,}3\,\mathrm{V}$.

Obrázek 16.29: Zesilovače SE a jeho linearizovaný obvod pro změny obvodových veličin v SKP.

Pokud bude navíc amplituda signálu např. $u_{om} = 1\,\mathrm{V}$, je vhodné volit $U_C \approx 2\,\mathrm{V}$ ($U_{CE} \approx 2{,}7\,\mathrm{V}$), pak $U_{R_C} = I_C R_C = U_N - 2\,\mathrm{V}$. Pokud volíme např. $I_C = 1\,\mathrm{mA}$ a $U_N = 10\,\mathrm{V}$, pak maximální hodnota $R_C = 8\,\mathrm{k\Omega}$ a maximální napěťový zisk $A_u = -320$ pro $r_o \ll R_C$. Pokud snížíme dvakrát U_N, musíme snížit $2\times$ i R_C a tím i A_u. Při zvýšení I_C je nutné také snížit R_C, nicméně A_u se nesníží vlivem zvýšení g_m, viz (16.38), viz analýza.

16.2.2. Princip

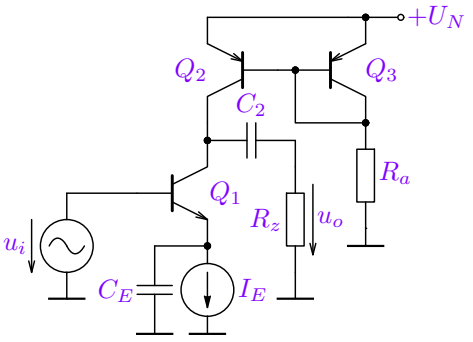
Dynamická zátěž je název pro prvek, jehož dynamický odpor (pro změny obvodových veličin) $r = \Delta u/\Delta i$ je daleko větší, než jaký se jeví dle podílu statických veličin $R = U/I$, tj. $r \neq R$, což ilustruje obrázek 16.30 (a).



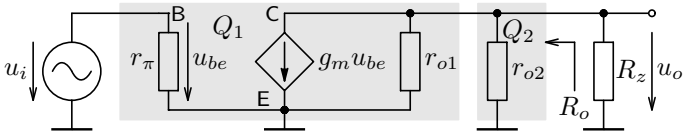
(a) (b) (c)

Obrázek 16.30: Příklad V-A charakteristiky dynamické zátěže (a), její schéma (b) a použití v zesilovači SE (c).

Takový prvek lze realizovat reálným proudovým zdrojem, viz. obrázek (b), kde $r = R_b$ a jeho použití jako „zátěž“ zesilovače (c). Pro změny obvodových veličin je pak $R_b \gg R_C$ a tím $A_u|_{R_z \to \infty} = -g_m(R_b||r_o) \gg -g_m R'_C$! Další techniky jako použití paralelního rezonančního obvodu (selektivní zesilovač) nebo tzv. „Bootstrap“, viz dále kapitolu 16.3.



(a)



(b)

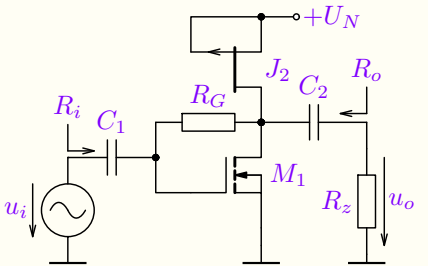
Předpokládejme shodné tranzistory. Pak vzhledem k $I_{C1} = I_{C2}$ bude pro výstupní odpory tranzistorů Q_1 a Q_2 platit $r_{o1} = r_{o2} = r_o$ a napěťové zesílení naprázdno a výstupní odpor jsou dány vztahy:

$$A_u = \left.\frac{u_2}{u_1}\right|_{R_z \to \infty} = -g_m \frac{r_o}{2} \doteq -40 \frac{U_A}{2} = -2000!\big|_{U_A=100}, \quad R_o = \frac{r_o}{2}. \tag{16.39}$$

Obrázek 16.31: Implementace dynamické zátěže v zesilovači SE bez stabilizace (a), její náhradní linearizované schéma pro změny obvodových veličin ve SKP a výpočet napěťového zesílení (b).

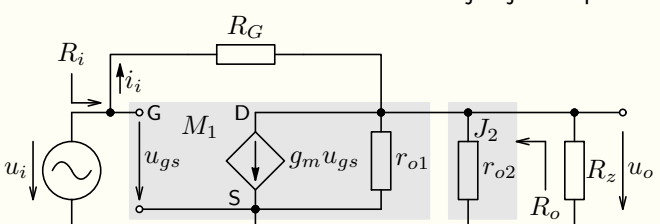
Principiální zapojení z 16.30 (c) lze implementovat např. s použitím proudového zrcadla, viz 16.31 (a), jehož zesílení je uvedeno na obr. (b). Je zřejmé, že zesílení je v případě BJT nezávislé na I_C a závisí pouze na U_A a převrácené hodnotě teplotního napětí $\frac{1}{N_F U_T} \doteq 40$, viz. (15.7) a (15.10). Navíc uvedené zapojení může fungovat i s poměrně malým $U_N \approx 2\,\mathrm{V}$, viz analýza. Pro správnou funkci je však třeba zajistit stabilizaci P_0, což lze lokálně provést např. zrcadlením proudu I_E jak je uvedeno v této analýze nebo pomocí DC napěťové paralelní ZZV s BJT stejně jako v následujícím příkladě s FET, viz videoukázky. Ve strukturách IO, např. OZ se využívá vnější ZZV.

Příklad 16.1 Zesilovč SS s dynamickou zátěží tvořenou proudovým zdrojem J_2



Zadání: Určete napěťové zesílení naprázdno, vstupní a výstupní odpor zesilovače na obrázku vlevo, pokud je zadáno $U_{TO1} = U_{TO2} = 2\,\mathrm{V}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0{,}01\,\mathrm{V}^{-1}$, $K_p = 5\,\mathrm{mA/V^2}$, $W/L = 50/2$, $K_\beta = 0{,}25\,\mathrm{mA/V^2}$, $R_G = 500\,\mathrm{k\Omega}$ a $U_N = 5\,\mathrm{V}$.

Řešení: Nejprve určíme pracovní bod tranzistorů. Vzhledem k $U_{GS2} = 0$ určíme dle (13.16) $I_{D1} = 1\,\mathrm{mA} \doteq I_{D2}$ a dále z (13.12) a (15.3) $U_{GS1} \doteq 2{,}1\,\mathrm{V}$ a $g_{m1} \doteq 16\,\mathrm{mS}$ a $r_{o1} = r_{o2} = r_o \doteq 100\,\mathrm{k\Omega}$ z (15.6). Linearizovaný obvod je na obrázku vlevo, podle něhož určíme výsledky stejně jako v příkladu (15.13). Viz také dodatek H.



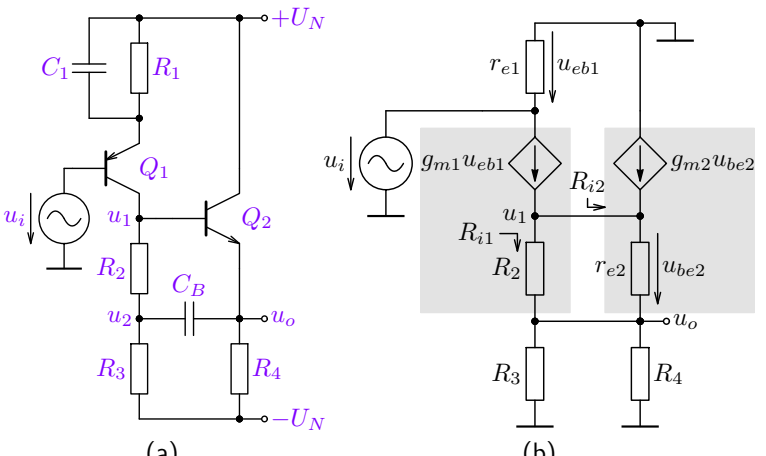
$$A_u = \left.\frac{u_2}{u_1}\right|_{R_z \to 0} \doteq -g_m\left(R_G \| \frac{r_o}{2}\right) \doteq -720$$

$$R_i = \frac{R_G}{1 - A_u} \doteq 700\,\Omega$$

$$R_o = \left(R_G \| \frac{r_o}{2}\right) = 45\,\mathrm{k\Omega}$$

16.3. „Bootstrap“ zesilovač SE-SC

Pro zvýšení zesílení zesilovače SE se v diskrétních implementacích používá technika tzv. „bootstrap“ kapacitoru. Ten přivádí výstupní napětí oddělené napěťovým sledovačem na rozdělený kolektorový rezistor R_2, R_3.



Napěťové zesílení lze odvodit z náhradního linearizovaného schématu. Pokud zavedeme

$$R = R_3||R_4 \quad \text{a} \quad r_2 = R_2||r_{e2},$$

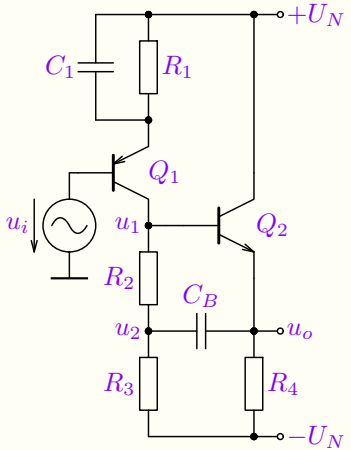
pak pro napěťové zesílení platí:

$$A_u = \frac{u_o}{u_i} = \frac{g_{m1} R}{g_{m2} r_2 - 1} \qquad (16.40)$$

Pro pochopení principu je proveden postupný výpočet v následujícím příkladu.

Obrázek 16.32: Zesilovač SE s KZV tvořenou oddělovacím stupněm SC a tzv. bootstrap kapacitorem C_B (a) a jeho náhradní linearizované schéma pro změny obvodových veličin ve SKP (b).

Příklad 16.2 *„Bootstrap zesilovač“ SE-SC*



Zadání: Určete napěťové zesílení naprázdno a výstupní odpor zesilovače na obrázku vlevo ve SKP, pokud je zadáno $R_1 = 4{,}3\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = R_3 = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $R_4 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, proudový zesilovací činitel tranzistorů (v zapojení SE nakrátko) $\beta_1 = \beta_2 = 200$ a $U_N = 5\,\mathrm{V}$.

Řešení: Nejprve určíme pracovní bod tranzistorů za předpokladu jejich aktivního režimu:

$$I_{C1} \doteq I_{E1} \doteq \frac{U_N - 0{,}7}{R_1} = 1\,\mathrm{mA},$$

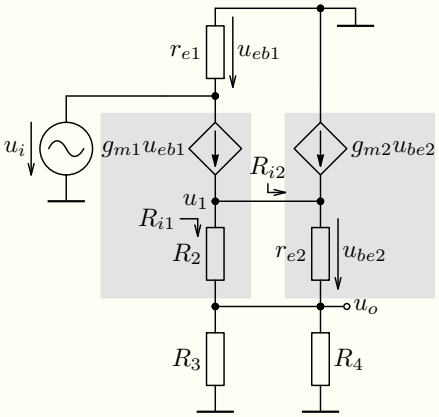
$$U_1 \doteq -U_N + I_{E1}(R_2 + R_3) \doteq -1\,\mathrm{V} < 0{,}4\,\mathrm{V} \quad \text{pro} \quad I_{B_2} \ll I_{C1},$$

$$I_{C2} \doteq I_{E2} \doteq \frac{U_1 - 0{,}7}{R_4} \doteq 3{,}3\,\mathrm{mA} \ll I_{C1}(\beta_2 + 1) \quad \text{a} \quad U_N > U_1,$$

čímž jsou ověřeny i předpoklady aktivních režimů tranzistorů.

Linearizované parametry tranzistorů jsou tedy následující:

$$g_{m1} \doteq 40\,\mathrm{mS},\ g_{m2} \doteq 130\,\mathrm{mS},\ r_{e2} \doteq 8\,\Omega.$$



Napěťový zisk 2. stupně (SC) je při $R_2 \gg r_{e2}$, tj. $i_{R_2} \ll i_{r_{e2}} \doteq i_R$ dán vztahem (15.55), tj.

$$A_{u2} = \frac{u_o}{u_1} = \frac{R}{r_{e2}+R} \doteq 0{,}988 \text{ při } R = R_3||R_4 \doteq 667\,\Omega, \quad (16.41)$$

Dále určíme zatěžovací odpory 1. stupně, tj. R_{i1}, R_{i2} a následně napěťový zisk 1. stupně dle (15.23) i celkový napěťový přenos:

$$R_{i2} \doteq \beta_2 R \doteq 130\,\text{k}\Omega \text{ dle 15.57 opět pro } i_{R_2} \ll i_R, \quad (16.42)$$

$$R_{i1} = \frac{u_1}{\frac{u_1 - u_1 A_{u2}}{R_2}} = \frac{R_2}{1-A_{u2}} \doteq 170\,\text{k}\Omega, \quad (16.43)$$

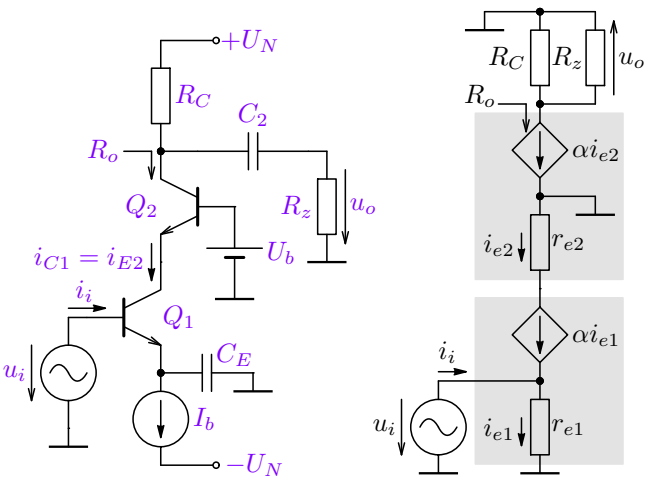
$$A_{u1} = -g_{m1}(R_{i1}||R_{i2}) \doteq -40\,\text{mS} \cdot 74\,\text{k}\Omega = -2960, \quad (16.44)$$

$$A_u = A_{u1}A_{u2} \doteq -2920, \quad \text{při zanedbání vlivu } U_A! \quad (16.45)$$

Zesílení vzniká v 1. stupni (SE) opět díky vysoké hodnotě zatěžovacího odporu. Ta je dána jednak oddělením (stupeň SC), ale hlavně kladnou ZV zavedenou kapacitorem C_B na R_2. Vzhledem k tomu, že $A_{u1} \doteq 1$ je $u_2 \doteq u_1$, čímž je minimalizován proud rezistoru R_2 a tím roste R_{i1}, tj. i A_{u1}. Pozor, výstupní odpor díky ZV je na rozdíl od (15.58) dán pouze $R = R_3||R_4 = R_o$, viz přednáška a ověření analýzou.

Tato technika je málo používaná díky velké kapacitě C_B (nelze integrovat) ⇒ použití dynamické zátěže.

16.4. Zapojení SE-SB (Kaskoda)



Obrázek 16.33: Zapojení SE-SB a jeho linearizované schéma pro SKP.

Předpokládejme shodné parametry tranzistorů ($\beta_1 = \beta_2 = \beta, \ldots$). Pak pro pracovní bod platí:

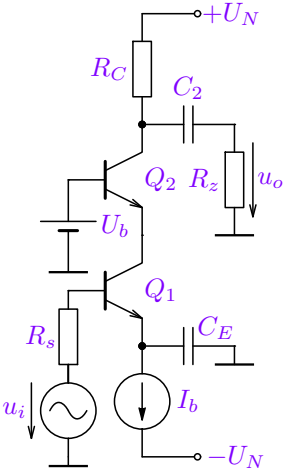
$$I_{E1} = I_b, \quad I_{E2} = I_{C1} = \alpha I_{E1}, \quad I_{C2} = \alpha_N I_{E2},$$
$$I_{C2} = \alpha_N I_{C1} = \alpha^2 I_b, \quad I_{C1} \doteq I_{C2} \doteq I_b$$
$$\Rightarrow r_{e1} \doteq r_{e2} = r_e, \quad i_{1e} = \frac{u_i}{r_e}, \quad \alpha i_{e2} = \alpha^2 i_{e1}$$

Napěťové zesílení naprázdno lze pak snadno vyjádřit. Výstupní odpor z pozice zátěže R_z je R_C. Pokud by však byla místo R_C použitá dynamická zátěž, je výstupní odpor (z pohledu R_C, viz obrázek) při uvažováni konečných r_o výrazně vyšší než u zapojení SE.

$$A_u = \left.\frac{u_o}{u_i}\right|_{R_z \to \infty} = \frac{-\alpha^2 i_{e1} R_C}{i_{e1} r_e} = -\alpha g_m R_C \doteq -g_m R_C, \tag{16.46}$$

$$R_o \doteq \beta r_o \quad \text{dle vztahu (16.5).} \tag{16.47}$$

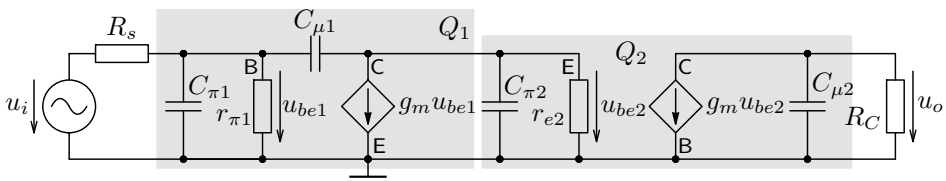
Výsledky lze ověřit analýzou (v rámci procvičení s PNP tranzistory).



(a)

Napěťové zesílení i vstupní odpor je shodný se zapojením SE. Výstupní odpor vlastní kaskody je β násobně větší, což lze využít ve spojení s dynamickou zátěží, nicméně využití tohoto zapojení je většinou odlišné. Výraznou výhodou tohoto zapojení je minimalizace vstupní kapacity oproti zapojení SE a z toho plynoucí výhody pro vysokofrekvenční oblast použití.

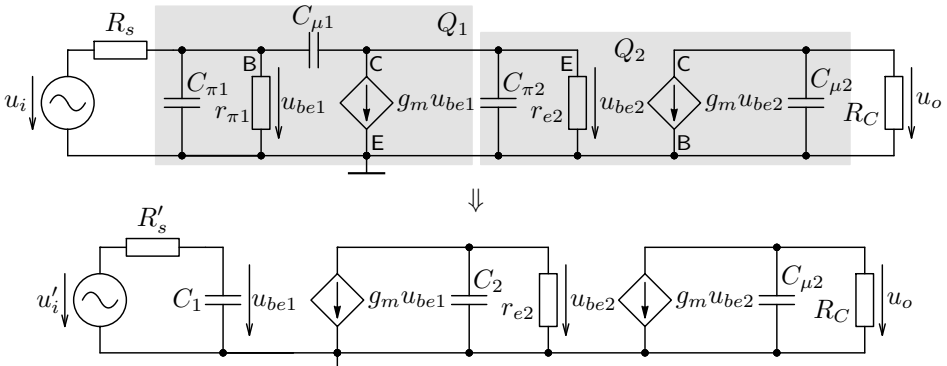
Pro určení horního mezního kmitočtu je nutné uvažovat i vnitřní odpor R_s budicího zdroje u_i, který je v zapojení vlevo uveden. Jeho náhradní schéma s parazitními kapacitami tranzistorů pro určení horního mezního kmitočtu dle kapitoly 15.6.4 je pak uvedeno níže pro $R_z \to \infty$.



(b)

Obrázek 16.34: Zapojení SE-SB včetně vnitřního odporu R_s budicího zdroje u_i a jeho náhradní linearizované schéma pro určení horního mezního kmitočtu f_h.

Náhradní schéma (b) lze pro zjednodušení překreslit dle Millerova teorému uvedeného v kapitole 15.6.3.



Vzhledem k tomu, že napěťový zisk pro SKP prvního stupně je

$$A_{u_{Q1}} = \frac{u_{be2}}{u_{be1}} = \\ = -g_m r_{e2} \doteq 1 \quad (16.48)$$

je podle (15.69) kapcita

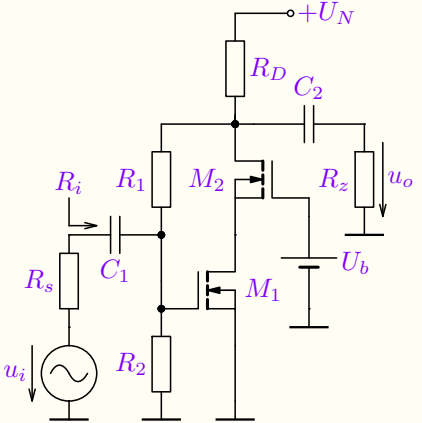
$$C_1 \doteq C_{\pi 1} + 2C_{\mu 1}. \quad (16.49)$$

Obrázek 16.35: Náhradní linearizované schéma pro určení horního mezního kmitočtu f_h a jeho zjednodušení podle Millerova teorému.

Kapacita C_1 je tedy mnohonásobně menší oproti zapojení SE, kde $C_1 = C_\pi + (g_m R_C + 1)C_\mu$, viz (15.71). Analogicky $C_2 \doteq C_{\pi 2} + 2C_{\mu 1}$, jelikož Q_2 je v zapojení SB, tj. ani na výstupu ke zvýšení kapacity nedochází. Vstupní kapacita pak ve spojitosti s vnitřním odporem R_s zdroje u_i má mnohem menší vliv na horní mezní kmitočet v porovnání s klasickým zapojení SE. To lze ověřit analýzou a porovnat se zapojením SE – viz přednáška.

Stejné závěry platí i pro zapojení s unipolárními tranzistory, viz následující příklad.

Příklad 16.3



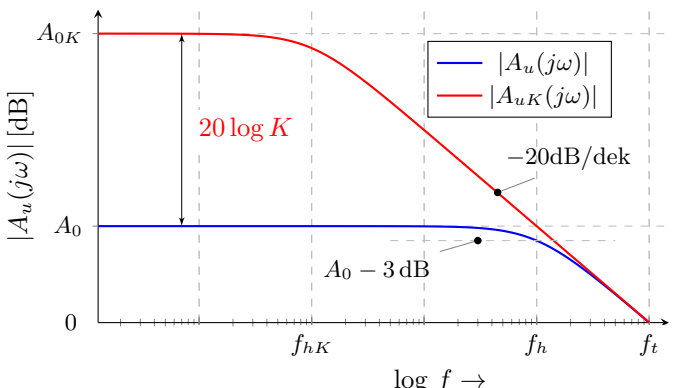
Zadání: Určete napěťové zesílení naprázdno a vstupní odpor ve SKP a horní mezní kmitočet zesilovače na obrázku vlevo, pokud je zadáno $M_1 \equiv M_2$, $U_{TO} = 1.9\,\mathrm{V}$, $K_p = 1.6\,\mathrm{mA/V^2}$, $W = 160\,\mu\mathrm{m}$, $L = 10\,\mu\mathrm{m}$, $C_{GS} = 1\,\mathrm{pF}$, $C_{GD} = 0{,}1\,\mathrm{pF}$, $R_1 = R_2 = 1\,\mathrm{M\Omega}$, $R_s = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_D = 5\,\mathrm{k\Omega}$, $U_b = 4\,\mathrm{V}$ a $U_N = 10\,\mathrm{V}$.

Řešení: dle výše uvedeného postupu – viz přednáška.

Výsledky: $I_{D2} = I_{D1} \doteq 1{,}12\,\mathrm{mA}$ $g_m \doteq 7{,}57\,\mathrm{mS}$, $A_u \doteq -37$, $R_i \doteq 26\,\mathrm{k\Omega}$ a použitím metody časových konstant: $\tau_1 \doteq 1{,}2\,\mathrm{ns}$ (vstupní), $\tau_2 \doteq 0{,}16\,\mathrm{ns}$ a $\tau_D \doteq 0{,}5\,\mathrm{ns}$ (výstupní dle obrázku 16.49) je $f_h = \frac{1}{2\pi(\tau_1+\tau_2+\tau_D)} \doteq 86\,\mathrm{MHz}$ podle (15.75).

Komentář: Vzhledem k malému rozdílu τ_2 a τ_D je výsledek přibližné metody zatížen větší chybou (viz porovnání analýz linearizovaných struktur, kde je výsledná hodnota $f_h \approx 120\,\mathrm{MHz}$. Skutečná reálná hodnota se bude dále lišit díky dalším kmitočtovým závislostem jak tranzistoru, tak vlastní realizace. Z tohoto pohledu je uvedená metoda pro odhad horního mezního kmitočtu použitelná, přičemž dává informaci o dominantních vlivech. Zde je analýza struktury s FET a analýza struktury s BJT.

V případě použití dynamické zátěže místo rezistoru R_C s dynamickým odporem $r_d = KR_C$ zvýšíme napěťové zesílení v SKP z A_0 na $A_{0K} = KA_0$. Zároveň se zvýšením zesílení, tj. zatěžovacího odporu roste časová konstanta $C_{\mu 2}R_C$ (v příkladu označena jako τ_D), a tím klesá horní mezní kmitočet f_h, tj. kolikrát zvýšíme zesílení, tolikrát se zmenší $f_{hK} = f_h/K$, jak ukazuje obrázek 16.36 níže. Je to analogická situace jako u zpětnovazebních struktur, viz kapitolu 10.8.1, případně 12.3.2, kde ke změně šířky kmitočtového pásma dochází vlivem ZZV.



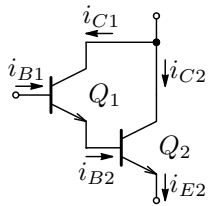
Závislost f_h na nastavení P_0

Pro vyskofrekvenční obvody je nutné volit **malé hodnoty rezistorů** (R_C), které pak minimalizují časové konstanty dané parazitními kapacitami. Pro dosažení odpovídajícího napěťového zisku ($|A_u| = g_m R_C$) je pak **nutné zvýšit proudy kolektorových proudů tranzistorů**. Proto mají vf obvody větší spotřebu (viz uvedenou analýzu).

Obrázek 16.36: Amplitudová charakteristika zesílení pro různé velikosti zátěže, tj. závislost horního mezního kmitočtu na zesílení kaskody.

16.5. Darlingtonovo zapojení

Darlingtonovo zapojení je zapojení dvou (případně více) bipolárních tranzistorů, uvedené na obrázku 16.37. Kolektor prvního tranzistoru (Q_1) je možné buď spojit s kolektorem druhého tranzistoru, nebo lépe zapojit přímo na napájecí napětí (zapojení SC), čímž se u tohoto tranzistoru eliminuje Millerův efekt.



Obrázek 16.37: Darlingtonovo zapojení s tranzistory NPN.

Pokud budou tranzistory polarizovány do aktivního režimu, platí pro proudy jednotlivých elektrod následující relace

$$i_{B1}(\beta_{F1}+1) = \alpha_{N2} i_{C1} = i_{E1} = i_{B2} = \frac{i_{C2}}{\beta_{F2}} \tag{16.50}$$

a pro celkový proudový zesilovací činitel lze tedy psát

$$\beta'_F = \frac{i'_C}{i'_B} = \frac{i_{C2}}{i_{B1}} = \beta_{F2}(\beta_{F1}+1) \doteq \beta_{F2}\beta_{F1}, \tag{16.51}$$

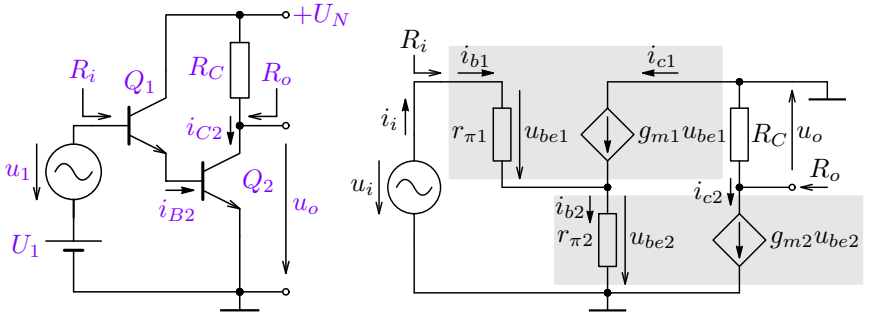
V dalších úvahách budeme zjednodušeně považovat proudové činitele β_F a α_F obou tranzistorů za rovné. Stejný předpoklad provedeme i pro „střídavé“ ekvivalenty β a α. Pro stejnosměrné proudy v pracovním bodě potom platí:

$$\beta_{F1} = \beta_{F2} = \beta_F, \qquad \alpha_{F1} = \alpha_{F2} = \alpha_F,$$
$$\beta_1 = \beta_2 = \beta, \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha.$$

$$I_{C1} = \alpha_F I_{E1} = \alpha_F I_{B2} = \frac{\alpha_F I_{C2}}{\beta_F} \doteq \frac{I_{C2}}{\beta_F}. \tag{16.52}$$

16.6. Kombinovaný stupeň SC-SE

Jedná se o spojení dvou zapojení se společným kolektorem (SC) a emitorem (SE), které využívá výhod Darlingtonova zapojení a tím zlepšuje vlastnosti jednostupňového zapojení SE.



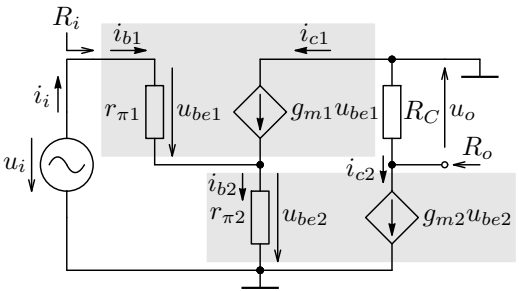
Obrázek 16.38: Zesilovač v zapojení SC-SE (s Darlingtonovým zapojením tranzistorů) (a) a jeho náhradní schéma pro malé změny obvodových veličin (b).

Nastavení pracovního bodu je pouze ilustrativní, nicméně pro výpočet vlastností (pro střídavé signály) je toto jednoduché nastavení naopak výhodné.

Pro poměr kolektorových proudů platí vztah 16.52. Budeme-li dále uvažovat rovnost hodnot $\beta_F \equiv \beta$, platí pro linearizované parametry tranzistorů:

$$g_{m1} = \frac{\alpha g_{m2}}{\beta} \doteq \frac{g_{m2}}{\beta}, \qquad (16.53)$$

$$r_{\pi 1} = \frac{\beta}{g_{m1}} = \frac{\beta^2}{\alpha g_{m2}} = r_{\pi 2}(\beta+1) \doteq \beta r_{\pi 2}, \qquad r_{e1} = \frac{\alpha}{g_{m1}} = \frac{\beta}{g_{m2}} = r_{\pi 2} = r_{e2}(\beta+1) \doteq \beta r_{e2}. \qquad (16.54)$$



Obrázek 16.39: Náhradní schéma pro malé změny obvodových veličin zapojení SC-SE.

Pro obvodové veličiny a parametry vzhledem k 16.54 platí:

$$u_i = i_i\big(r_{\pi1} + (\beta+1)r_{\pi2}\big) = i_{b1}2r_{\pi1}, \tag{16.55}$$

$$i_{c2} = g_{m2}u_{be2} = \beta i_{b2} = \beta i_{e1} = \beta(\beta+1)i_{b1} = \beta^2 i_i, \tag{16.56}$$

$$u_{be2} = \frac{u_i(\beta+1)r_{\pi2}}{r_{\pi1}+(\beta+1)r_{\pi2}} = \frac{u_i}{2} \Rightarrow u_o = -\frac{g_{m2}u_i R_c}{2} \tag{16.57}$$

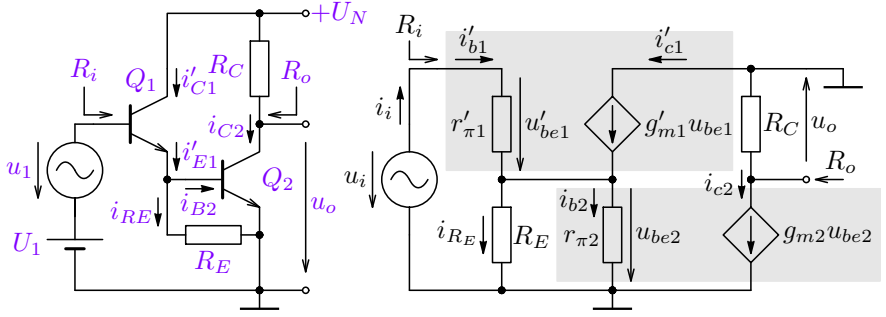
$$\boxed{R_i} = \frac{u_i}{i_i} = 2r_{\pi1}\ \boxed{= 2(\beta+1)r_{\pi2}} \tag{16.58}$$

$$\boxed{A_u} = \frac{u_o}{u_i} = \boxed{-\frac{g_{m2}R_c}{2}}, \quad \boxed{A_i} = \frac{-i_{c2}}{i_{b1}} = -\beta(\beta+1)\ \boxed{\doteq -\beta^2}. \tag{16.59}$$

Oproti „klasickému“ zapojení se společným emitorem s jedním tranzistorem je napěťové zesílení zesilovače s Darlingtonovým zapojením poloviční, při stejném nastavení pracovního bodu ($I_C = I_{C2}$ – kolektorový proud tranzistoru Q_2 je shodný s kolektorovým proudem tranzistoru jednostupňového zesilovače). Je to dáno tím, že vstupní napětí se rozdělí a tranzistor Q_2 je řízen pouze jeho polovinou, viz (16.57).

Vstupní odpor je však 2β-násobný ($r_{\pi1} \doteq 2\beta r_{\pi2}$) a také proudové zesílení je β-násobné. Toto zapojení se proto používá zejména tam, kde je nutný vysoký vstupní odpor, resp. malý vstupní proud (vstupní zesilovače), resp. proudové zesílení (např. koncové stupně) a to při velké hodnotě transkonduktance g_m (oproti tranzistoru FET).

Pokud zvýšíme proud v pracovním bodě tranzistoru Q_1, dosáhneme lepšího rozdělení vstupního napětí na u_{be2}, tj. zvýšení zesílení při stále vysokém vstupním odporu. To lze provést např. přidáním rezistoru R_E, jak ukazuje následující modifikace zapojení 16.38.



Obrázek 16.40: Modifikace zapojení SC-SE (a) a jeho náhradní schéma pro malé změny obvodových veličin (b).

Předpokládejme, že pracovní bod tranzistoru Q_2 je nezměněn a $U_{BE2} = 0{,}7\,\mathrm{V}$. Pro pracovní bod tranzistoru Q_2 pak platí:

$$\begin{aligned} I'_{C1} &= \alpha_N I'_{E1} = \\ &= \alpha_N (I_{B2} + I_{RE}) = \\ &= \alpha_N \left(\frac{I_{C2}}{B_F} + \frac{0{,}7}{R_E} \right). \end{aligned} \tag{16.60}$$

Pro prvky linearizovaného obvodu tranzistoru Q_1 vzhledem k 16.60 platí:

$$g'_{m1} \doteq 40 I'_{C1} = \alpha_F \left(\frac{g_{m2}}{\beta} + \frac{28}{R_E} \right), \qquad r'_{\pi 1} = \frac{\beta}{g'_{m1}} = \frac{\beta + 1}{\frac{g_{m2}}{\beta} + \frac{28}{R_E}}. \tag{16.61}$$

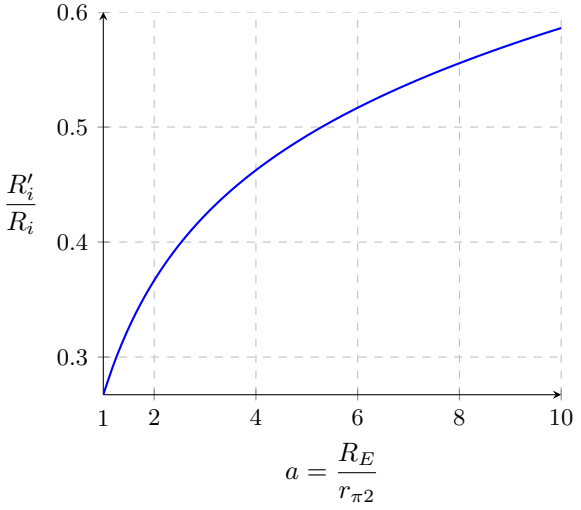
Pokud zavedeme proměnnou $a = \frac{R_E}{r_{\pi 2}}$ (relativní hodnota R_E vzhledem k $r_{\pi 2}$), lze vyjádřit vztah mezi původními hodnotami R_i, A_u a hodnotami novými R_i', A_u'. Závislost poměru $\frac{R'_{ust}}{R_{vst}}$ dle 16.62, 16.58 a poměru $\frac{A'_u}{-g_{m2}R_c} = \frac{u_{be2}}{u_1}$, tj. zesílení modifikovaného zapojení SE-SC vůči hodnotě zesílení jednostupňového zesilovače SE na relativní hodnotě R_E je ukázána na následujících grafech (obrázek 16.41).

$$R_i' = \frac{(\beta+1)\beta}{g_{m2}} \frac{a(2a+29)}{(a+28)(1+a)} = \frac{R_i}{2} \frac{a(2a+29)}{(a+28)(1+a)} \tag{16.62}$$

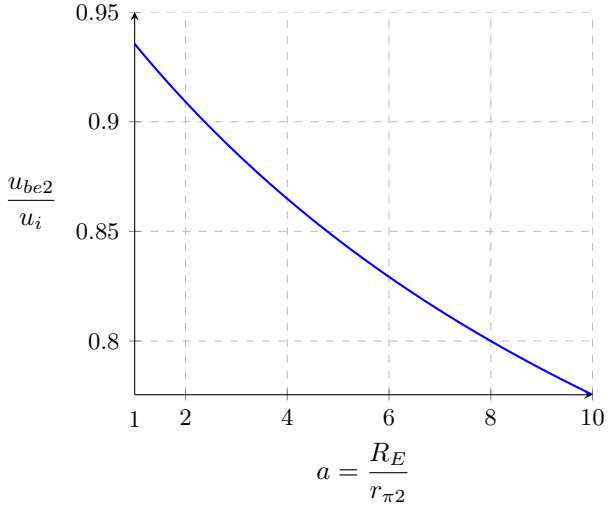
$$A_u' = -g_{m2}R_c \frac{a+28}{2a+29} = 2A_u \frac{a+28}{2a+29} \tag{16.63}$$

Například pro $R_E \doteq 5{,}3r_{\pi 2}$ je vstupní odpor oproti zapojení bez rezistoru R_E právě poloviční $R_i' = r_{\pi 1} = R_i/2$ a napěťové zesílení dosahuje 1,7 násobku zesílení bez zařazeného rezistoru R_E, tj. $u_{be2} \doteq 0{,}85u_1$. Je zřejmé, že lze dosáhnout téměř shodného zesílení v porovnání s jednostupňovým zapojením SE – v tomto případě 0,84 násobku, přičemž však hodnota vstupního odporu je β násobně větší! Viz grafy na obrázku (16.41) a komentář.

Pomocí kombinovaných stupňů (přidáním jednoho či více tranzistorů) lze výrazně měnit vlastnosti tranzistorových zesilovačů, přičemž se využívá charakteristických vlastností základních jednostupňových zapojení (zde SC pro zvýšení vstupního odporu a proudového zesílení a SE pro zachování napěťového zisku). Výsledky lze potvrdit analýzou včetně komentáře. Příklad 15.10 jednostupňového zesilovače SE pro porovnání.



(a)

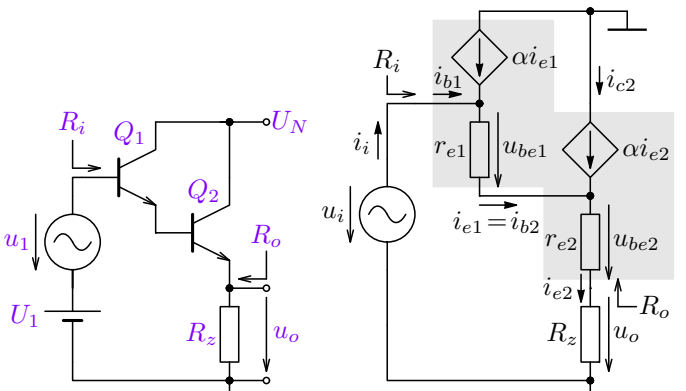


(b)

Obrázek 16.41: Poměr vstupních odporů modifikovaného a klasického zapojení SE-SC (a) a poměr zesílení modifikovaného zapojení SE-SC vůči hodnotě zesílení jednostupňového zesilovače SE na relativní hodnotě R_E (b).

16.7. Kombinovaný stupeň SC-SC

Jedná se o spojení dvou zapojení se společným kolektorem (SC), které opět využívá výhod Darlingtonova zapojení v bipolární technologii a zlepšuje vlastnosti jednostupňového zapojení SC.



(a) (b)

Obrázek 16.42: Zesilovač v zapojení SC-SC (a) a jeho náhradní schéma pro malé změny obvodových veličin (b).

Pro obvodové veličiny a parametry platí (v zanedbání uvažujme $R_z \gg r_{e2}$ a $\beta \gg 1$):

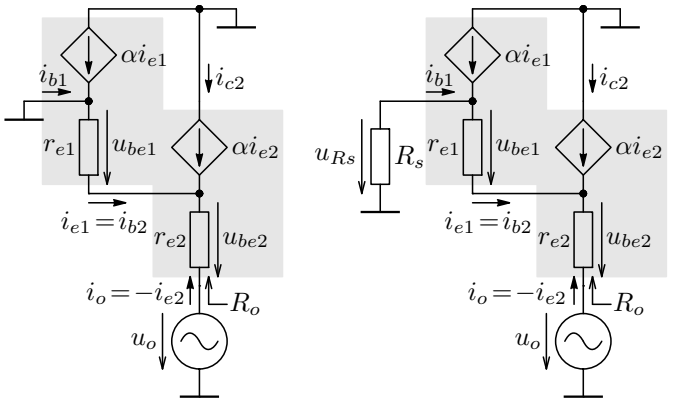
$$u_i = u_{be1} + u_{be2} + u_o = r_{e1} i_{e1} + (r_{e2} + R_z) i_{e2} =$$
$$= r_{e2}(\beta + 1)\frac{i_{e2}}{\beta + 1} + r_{e2} i_{e2} + R_z i_{e2} =$$
$$= 2r_{e2} i_{e2} + R_z i_{e2}, \qquad u_o = R_z i_{e2} \qquad (16.64)$$

$$A_u = \frac{u_o}{u_i} = \frac{R_z}{2r_{e2} + R_z} \doteq 1 \qquad (16.65)$$

$$R_i = \frac{u_i}{i_{b1}} = \frac{i_{e2}(2r_{e2} + R_z)}{\frac{i_{e2}}{(\beta+1)^2}} \doteq R_z \beta^2 \qquad (16.66)$$

$$A_i = \frac{i_{e2}}{i_i} = \frac{i_{b1}(\beta + 1)^2}{i_{b1}} \doteq \beta^2 \qquad (16.67)$$

Výstupní odpor lze určit z relace $R_o = \frac{u_o|_{R_z\to\infty}}{i_z|_{R_z\to 0}} = \frac{u_i}{u_i/(2r_{e2})} = 2r_{e2}$ nebo dle níže uvedeného schématu.



Obrázek 16.43: Náhradní linearizované schéma zesilovače SC-SC pro určení výstupního odporu (a) a jeho varianta při uvažování vnitřního odporu R_s budicího zdroje.

Pro výstupní odpor pak pro ideální buzení, tj. zapojení (a) platí:

$$u_o = -u_{be2} - u_{be1} = r_{e2}i_o + r_{e1}\frac{i_o}{\beta+1} = i_o\frac{2r_{e1}}{\beta+1}$$

$$R_o = \frac{u_o}{i_o} = \frac{2r_{e1}}{\beta+1} = 2r_{e2}, \qquad (16.68)$$

což je dvojnásobná hodnota oproti klasickému zapojení SC, viz také analýzu. Výstupní odpor pro neideální buzení podle obrázku (b) je:

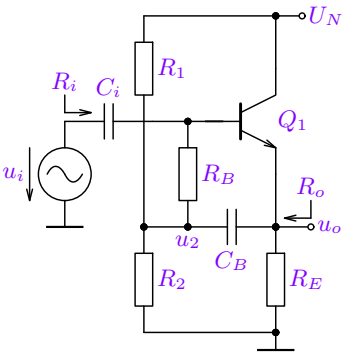
$$u_o = -u_{be2} - u_{be1} + u_{Rs} = r_{e2}i_o + r_{e1}\frac{i_o}{\beta+1} + \\ + R_s\frac{i_o}{(\beta+1)^2} = i_o\left(\frac{2r_{e1}}{\beta+1} + \frac{R_s}{(\beta+1)^2}\right)$$

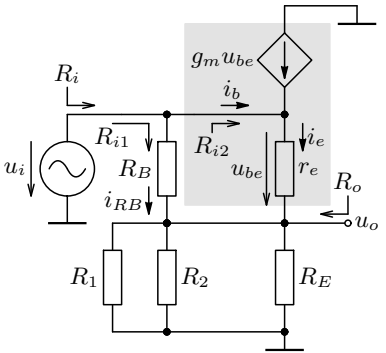
$$R_o = \frac{u_o}{i_o} = \frac{2r_{\pi 1}+R_s}{(\beta+1)^2} = 2r_{e2} + \frac{R_s}{(\beta+1)^2}. \qquad (16.69)$$

V případě FET platí: $i_{g1}=0 \Rightarrow u_{g1}=0$ a $i_{g2}=0 \Rightarrow u_{g2}=0$, tj. $R_o = 1/g_{m2}$ i v případě $R_s > 0$.

16.8. „Bootstrap“ zesilovač SC

Techniku „bootstrap“ kapacitoru, uvedenou v kapitole 16.3, lze využít i pro zvýšení vstupního odporu jednostupňového zesilovače SC s BJT a vstupním děličem (nesouměrné napájecí napětí), viz příklad 15.11, kdy by výstup byl na R_E, přičemž platí vztah (15.33), tj. $R_i \doteq R_1||R_2$. Zde pro $R_B \gg r_e$, tj. $i_{RB} \ll i_e$ platí (viz také příklad 16.2):





$$A_u = \frac{u_o}{u_1} = \frac{R}{r_{e2} + R}, \quad R = R_1||R_2||R_E, \tag{16.70}$$

$$R_{i2} \doteq \beta R \quad \text{opět pro} \quad i_{RB} \ll i_e, \tag{16.71}$$

$$R_{i1} = \frac{u_i}{\frac{u_i - u_i A_u}{R_B}} = \frac{R_B}{1 - A_u}, \tag{16.72}$$

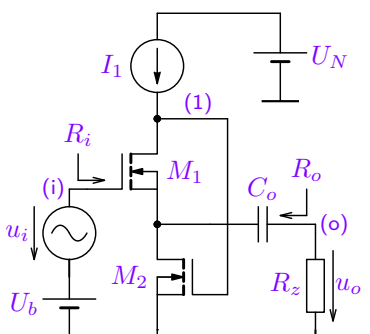
$$\boxed{R_i} = R_{i1}||R_{i2} = \frac{\beta R R_B}{R_B + \beta R||r_e} \doteq$$

$$\boxed{\doteq \beta R \quad \text{pro} \quad R_B \gg \beta r_e \doteq r_\pi}. \tag{16.73}$$

Vstupní odpor je prakticky dán R_{i2} (podobně klasickému zapojení SC). $R_{i1} \lll R_1||R_2$ díky KZV zavedené „bootstrap“ kapacitorem C_B. Tím je $u_2 = A_u u_i \doteq u_i$, tj. minimalizován i_{R2}, čímž významně vzroste R_{i1}, viz ověření analýzou, případně další zdroje, . . . Opět je to však technika použitelná pouze pro diskrétní implementace. Výstupní odpor je evidentně $R_B||R_1||R_2||R_E||r_e \doteq r_e$, stejně jako v případě klasického zesilovače v zapojení SC.

16.9. Vylepšený napěťový sledovač

Napěťový sledovač je zapojení využívané zejména pro impedanční oddělení, kde se vyžaduje zejména vysoký vstupní a nízký výstupní odpor. V ideálním případě je $R_i \to \infty$ a $R_o \to 0$, přičemž napěťový zisk je obvykle $A_u \approx 1$. Jako základní tranzistorový stupeň se využívá zapojení SD v případě implementace s FET, resp. SC v případě BJT. Struktura vylepšeného zapojení vychází z těchto zapojení, které je doplněno zapojením SS, pro zavedení záporné ZV, čímž se výrazně snižuje výstupní odpor R_o, jak bude dále odvozeno. Pracovní bod je nastaven a stabilizován proudovým zdrojem I_1 v součinnosti s M_2 (zdroj U_b slouží pouze pro nastavení DC posunu).



Vylepšený napěťový sledovač (Flipped Voltage Folower)

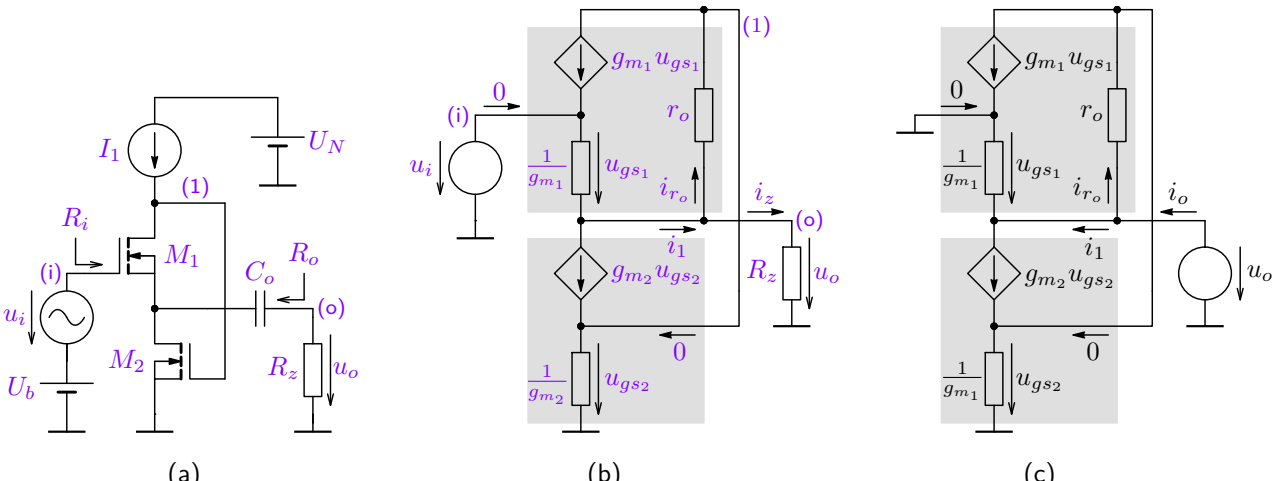
Zapojení vylepšeného napěťového zesilovače dosahuje výrazně nižšího výstupního odporu R_o při stejném napěťovém zisku $A_u \to 1$.

R_o je oproti klasickému zapojení SD, resp. SC snížen cca

- $g_m r_o$ krát pro zapojení s FET, resp.
- β krát pro zapojení s BJT.

Obrázek 16.44: Zapojení vylepšeného napěťového sledovače.

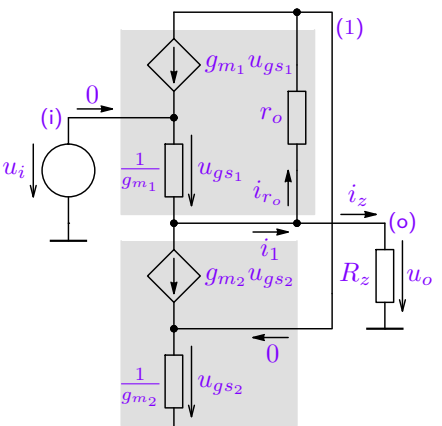
Pro analýzu vlastností uvedené struktury je nutné zapojení překreslit pro malé změny obvodových veličin ve SKP s linearizovanými modely tranzistorů, viz obrázek níže.



Obrázek 16.45: Zapojení vylepšeného napěťového sledovače (a), jeho náhradní linearizované zapojení pro určení napěťového zesílení (b) a výstupního odporu (c).

16.9.1. Napěťové zesílení

Výstupní odpor r_o tranzistoru M_1 nelze zanedbat, jelikož by pak vlastnosti zapojení byly ideální ($A_u = 1$ a $R_o \to 0$), jak bude evidentní. Naopak výstupní odpor tranzistoru M_2 se prakticky neuplatní (je paralelně k zátěži). Dále je zřejmé, že při nulovém DC proudu zátěží R_z (např. při oddělení pomocí AC vazby) je $I_{D_1} = I_{D_2}$ a tudíž $g_{m_1} = g_{m_2} = g_m$. Dále platí $u_{gs_1} = u_i - u_o$ a $i_o = i_1 - i_{r_o}$, pak:



$$i_{r_o} = g_m u_{gs_1},\ i_1 = g_m u_{gs_1} - g_m u_{gs_2} \Rightarrow i_z = -g_m u_{gs_2} = \frac{u_o}{R_z}$$

$$u_{gs_2} = u_o - g_m u_{gs_1} r_o = u_o(1 + g_m r_o) - u_i g_m r_o \Rightarrow$$

$$g_m u_{gs_2} = -\frac{u_o}{R_z} = g_m u_o (1 + g_m r_o) - u_i g_m^2 r_o \Rightarrow$$

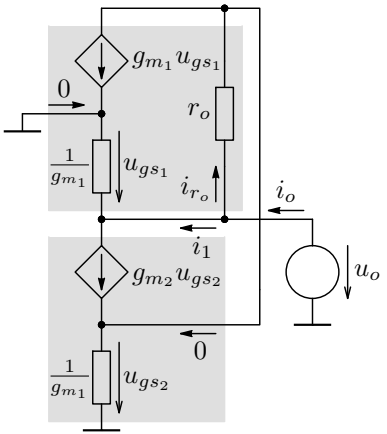
$$A_u = \frac{u_o}{u_i} = \frac{g_m^2 r_o R_z}{g_m^2 r_o R_z + g_m R_z + 1} \tag{16.74}$$

Pro zesílení naprázdno, tj. $i_z = 0$ je pak evidentně $g_m u_{gs_2} = 0$, tj.:

$$u_o = -g_m u_{gs_1} r_o = g_m (u_i - u_o) r_o \Rightarrow \boxed{A_u = \frac{u_o}{u_i} = \frac{g_m r_o}{g_m r_o + 1}}. \tag{16.75}$$

To je zřejmé i z (16.74) pro $R_z \to \infty$ a přesně odpovídá (15.60) stupně SD, tj. $A_u = \frac{g_m (R_z || r_o)}{1 + g_m (R_z || r_o)}$ při uvažování výstupního odporu tranzistoru, což pro $R_z \to \infty$ vede na (16.75). Vzhledem k $g_m r_o \gg 1$ je $A_u \to 1$, viz analýzu.

16.9.2. Výstupní odpor



Opět uvažujme $I_{D_1} = I_{D_2}$ a tudíž $g_{m_1} = g_{m_2} = g_m$. Pak platí: $u_{gs_1} = -u_o$, $i_{r_o} = g_m u_{gs_1} = -g_m u_o$, $i_1 = g_m u_{gs_2} - i_{r_o}$ a dále:

$$u_{gs_2} = u_o - i_{r_o} r_o = u_o + g_m u_o r_o = u_o(1 + g_m r_o)$$

$$i_o = i_{r_o} + i_1 = g_m u_{gs_2} = g_m u_o (1 + g_m r_o) \Rightarrow$$

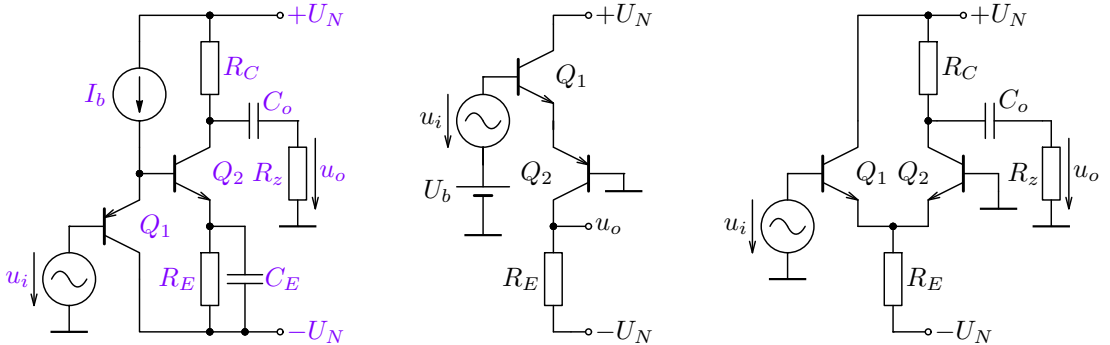
$$\boxed{R_o = \frac{u_o}{i_o} = \frac{1}{g_m(g_m r_o + 1)}} \qquad (16.76)$$

Výstupní odpor klasického stupně SD je (při zanedbání r_o) $\frac{1}{g_m}$ dle (15.61). Vzhledem k $g_m r_o \gg 1$ je $R_o \ll \frac{1}{g_m}$, viz výsledky analýzy. To je dáno ZZV, která je zavedena přes tranzistor M_2, přičemž $u_{gs_2} \gg u_{gs_1}$ díky tomu, že u_{gs_2} vzniká na velkém r_o. Tím je proud tranzistoru M_2 mnohonásobně větší (oproti proudu M_1) a prakticky tak určuje výstupní odpor, který pak mnohonásobně menší oproti klasickému zapojení (bez M_2).

Pro bipolární technologii lze odvodit, že výstupní odpor vylepšeného uspořádání je cca β násobně menší, tj. $R_o \doteq \frac{1}{g_m \beta}$ a vstupní odpor je cca β násobně větší tj. $R_i \doteq R_z \beta^2$ pro $r_e < R_z < r_o$, viz analýza včetně komentáře. Je však třeba správně nastavit pracovní bod, s čímž souvisí snížení dynamického rozsahu oproti klasickému zapojení.

16.10. Kombinovaná zapojení SC-SE, SC-SB

Zapojení SE (SS) se nepoužívá jako první stupeň, pokud je požadovaná malá vstupní kapacita (potlačení Millerova jevu). To splňuje buď zapojení SB (vhodné pro jednostupňový zesilovač), které má však malý vstupní odpor nebo lépe zapojení SC (SD) následované buď zapojením SE (SS) nebo SB (SG) pro napěťový zisk, viz obrázek níže. V obou případech je výstupní odpor stejný jako u zapojení SE, tj. $R_o = R_{o_{SE}}$. Více viz. přednáška.

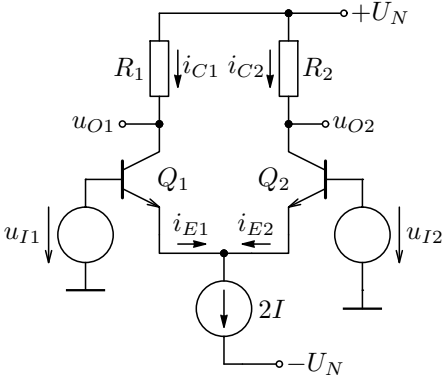


(a): $A_u \approx A_{u_{SE}}$, $R_i \approx \beta R_{i_{SE}}$ (b) (c): $A_u \approx -A_{u_{SE}}/2$, $R_i \approx 2R_{i_{SE}}$

Obrázek 16.46: Zapojení kombinovaného zapojení SC-SE (a), ideové zapojení SC-SB (b) a jeho vhodná implementace (c) a porovnání jejich napěťových zesílení a vstupních odporů s klasickým zapojením SE.

16.11. Rozdílový (diferenční) zesilovač s BJT

Výhody rozdílového zesilovače byly ukázány sekci operačního zesilovače 11.9.2. Z tranzistorů ho lze sestavit jednoduše na základě zapojení SC-SB (SD-SG), úpravou SB pro buzení ze dvou zdrojů, viz zapojení níže.



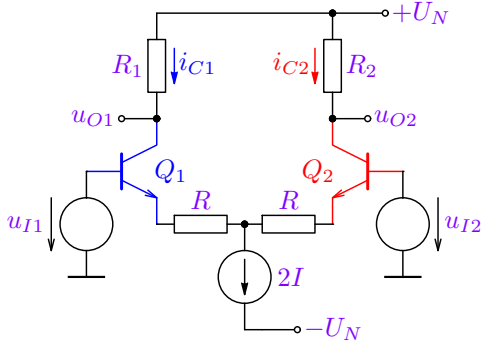
Předpokládejme otevřené tranzistory v pracovním bodě $I_{E1} = I_{E2} = I$ pro $u_{I1} = u_{I2}$, tj. $\mathrm{e}^{\frac{u_{BE}}{U_T}} \gg 1$. Dále označme $u_D = u_{BE1} - u_{BE2} = u_{I1} - u_{iI}$, což je rozdílová složka vstupních napětí. Pak platí:

$$i_{E1} = \frac{i_{C1}}{\alpha_N} = \frac{I}{\alpha_N}\mathrm{e}^{\frac{u_{BE1}}{U_T}}, \qquad \frac{i_{E1}}{i_{E2}} = \mathrm{e}^{\frac{u_{BE1}-u_{BE2}}{U_T}} = \mathrm{e}^{\frac{u_D}{U_T}},$$

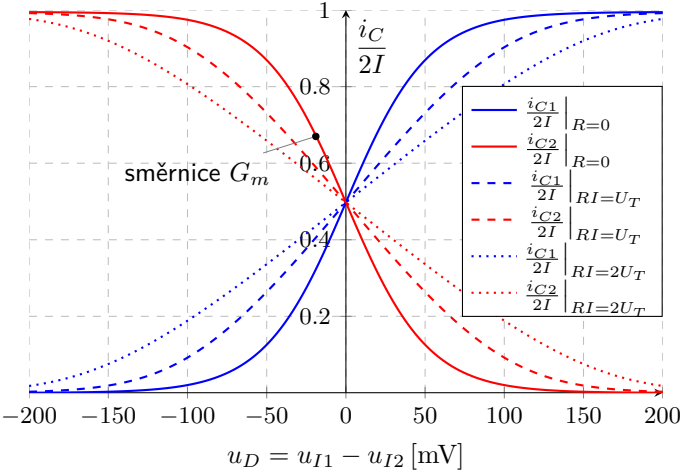
$$\frac{i_{E1}}{2I} = \frac{i_{E1}}{i_{E1}+i_{E2}} = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{-u_D}{U_T}}} = \frac{\tanh(\frac{u_D}{2U_T})+1}{2},$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{i_{C1} \doteq i_{E1} = \frac{2I}{1+\mathrm{e}^{\frac{-u_D}{U_T}}}}, \qquad \boxed{i_{C2} \doteq i_{E2} = \frac{2I}{1+\mathrm{e}^{\frac{u_D}{U_T}}}}. \qquad (16.77)$$

Je zřejmé, že nastavení pracovního bodu je velmi jednoduché, pomocí proudového zdroje $2I$, případně odporem R_E, jak bude uvedeno. Dále se budeme zabývat signálovými parametry (změnami obvodových veličin) ve SKP, přičemž evidentně platí $f_d = 0$, tj. zesilovač nemá žádné oddělovací ani blokovací kapacitory a funguje tedy i pro DC signál. Následuje vykreslení uvedených závislostí.



Je zřejmé, že odpory R zavádí ZZV, čímž zmenšují sklon charakteristik G_m a tím zvětšují její lineární oblast. Pro převodní vodivost ≡ transkonduktanci) G_m v počátku platí pro $R = 0$:

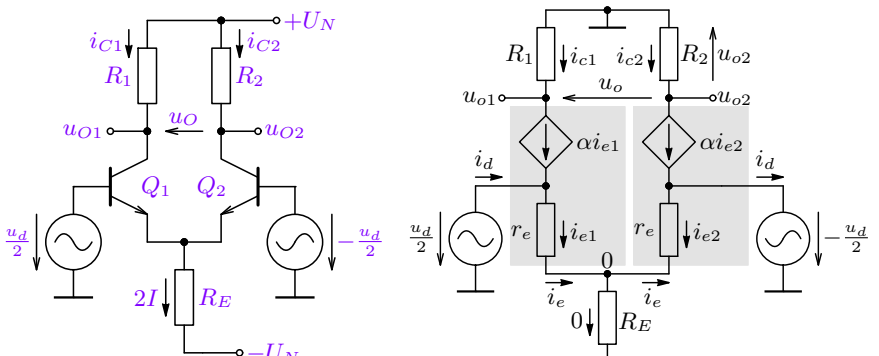


Obrázek 16.47: Zapojení rozdílového zesilovače s BJT včetně emitorových odporů R a jeho převodní charakteristiky dle 16.77 pro různé hodnoty R.

$$G_m = \left.\frac{\mathrm{d}i_{C2}}{\mathrm{d}u_D}\right|_{u_D=0} = \left.\frac{\mathrm{d}\alpha_N i_{E2}}{\mathrm{d}u_D}\right|_{u_D=0} = \left.\frac{-2I\alpha_N \mathrm{e}^{\frac{u_D}{U_T}}}{U_T\left(1+\mathrm{e}^{\frac{u_D}{U_T}}\right)^2}\right|_{u_D=0} = -\frac{I\alpha_N}{2U_T} = -\frac{I_{C2}}{2U_T} = -\frac{g_m}{2}, \text{ pro } R = 0. \quad (16.78)$$

16.11.1. Rozdílové zesílení

Rozdílové zesílení bylo definováno vztahem 11.5 a je možné ho zjistit při rozdílovém buzení $u_d = u_{i1} - u_{i2}$ podle obrázku 11.9 jako $A_d = \frac{u_{o2}}{u_d}$ pro nesymetrický výstup, případně $A_d = \frac{u_o}{u_d}$ pro symetrický výstup při nulové souhlasné složce $u_s = \frac{u_{i1}+u_{i2}}{2} = 0$. To platí pro případ $u_{i1} = \frac{u_d}{2}$, $u_{i2} = -\frac{u_d}{2}$, jak je uvedeno na obrázku níže.



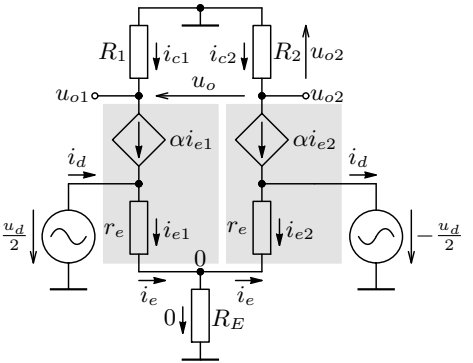
(a) (b)

Předpokládejme, že tranzistory pracují v aktivním režimu. Pak evidentně platí:

$$I_{E1} = I_{E2} = I \doteq \frac{U_N - 0{,}7}{2R_E},$$
$$I_{C1} = I_{C2} = \alpha I \doteq I,$$
$$\Rightarrow \quad g_{m1} = g_{m2} = g_m,$$
$$r_{e1} = r_{e2} = r_e,$$
$$r_{\pi 1} = r_{\pi 2} = r_\pi.$$

Obrázek 16.48: Zapojení rozdílového stupně s bipolárními tranzistory s nastavením P_0 pomocí rezistoru R_E (a) a jeho náhradní linearizované schéma pro změny obvodových veličin (b) ve SKP (zanedbány kapacity tranzistorů).

Vzhledem k ideálnímu rozdílovému buzení ($u_{i1} = \frac{u_d}{2}$, $u_{i2} = -\frac{u_d}{2}$) a shodným parametrům modelů tranzistorů ($r_{e1} = r_{e2} = r_e$), bude napětí na odporu R_E nulové! Pak evidentně platí:



Obrázek 16.49: Náhradní linearizované schéma rozdílového stupně s BJT.

$$i_{e1} = i_e = -i_{e2} = \frac{u_d}{2r_e}, \qquad i_{c2} = \alpha i_{e2} = -\alpha i_e = -\frac{\alpha u_d}{2r_e} = -\frac{g_m u_d}{2},$$

$$u_{o2} = -i_{c2}R_2 = \frac{g_m u_d R_2}{2} \text{ a analogicky } u_{o1} = -i_{c1}R_1 = -\frac{g_m u_d R_1}{2},$$

$$u_o = u_{o2} - u_{o1} = g_m u_d R_C, \quad \text{pro} \quad R_1 = R_2 = R_C.$$

Napěťový zisk pro nesymetrický, resp. symetrický výstup, tj. na výstup u_{o2}, resp. u_o lze vyjádřit jako:

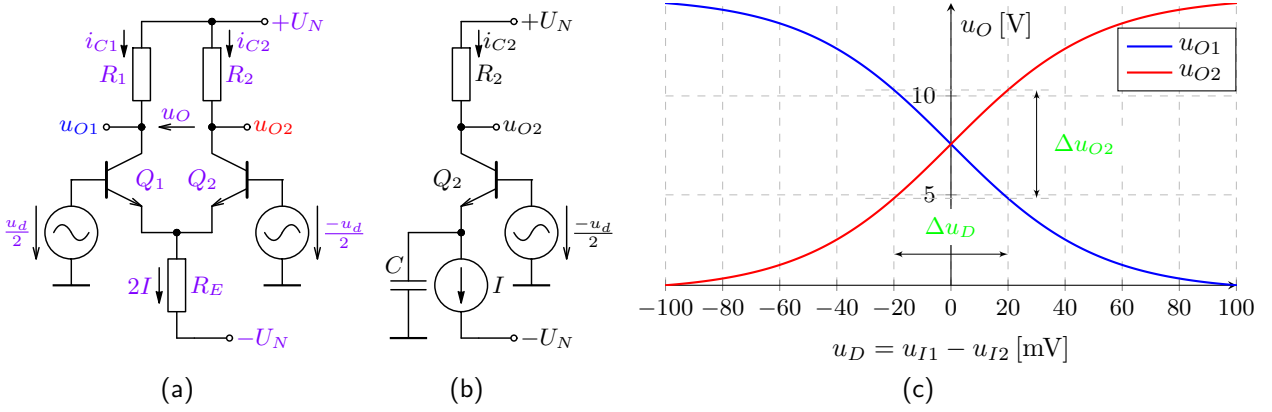
$$\boxed{A_d = \frac{u_{o2}}{u_d} = \frac{g_m R_2}{2}}, \tag{16.79}$$

$$\boxed{A_{d2} = \frac{u_o}{u_d} = g_m R_C} \quad \text{pro } R_1 = R_2 = R_C. \tag{16.80}$$

Výstup lze podle požadavků odebírat samozřejmě i na výstupu u_{o1}, případně i symetrický jako $u_o = u_{o1} - u_{o2}$. Vztah pro A_d odpovídá výše uvedené převodní vodivosti definované vztahem (16.78), tj. pro změny obvodových veličin jako $G_m = \frac{i_{c2}}{u_d} \Rightarrow u_{o2} = -i_{c2}R_2 = -G_m u_d R_2 = \frac{g_m R_2}{2} u_d$. Vstupní odpor pro rozdílový signál je:

$$\boxed{R_{id} = \frac{u_d}{i_d}} = \frac{u_d(\beta+1)}{i_e} = (\beta+1)2r_e \boxed{= 2r_\pi} \tag{16.81}$$

Výsledek koresponduje i s převodní charakteristikou na obrázku 16.50 (c), přičemž $A_d = \frac{\Delta u_{O2}}{\Delta u_D}$ odpovídá vztahu (16.80). Z grafu je navíc zřejmá linearita cca pro $u_d < \pm 20\,\mathrm{mV} \approx \pm U_T$. Vzhledem k tomu, že emitorové napětí je pro střídavou složku nulové, lze zapojení (a) rozdělit na 2 části, přičemž část s výstupem u_{O2} je nakreslena na obrázku (b) a odpovídá 15.27 (a) s polovičním buzením, proto je A_d jako u_{o2}/u_d poloviční a kladné oproti (15.25).

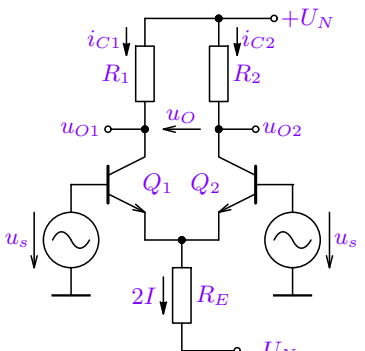


Obrázek 16.50: Zapojení rozdílového zesilovače s BJT (a), jeho zjednodušení pro výstup u_{O2} při rozdílovém buzení (b) a převodní charakteristika kompletního zapojení (c).

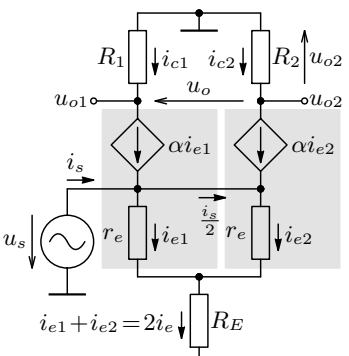
Viz také analýzu zapojení s PNP tranzistory, případně analýzu Darlingtonovým párem, komentář viz přednáška.

16.11.2. Souhlasné zesílení

Při buzení souhlasným signálem $u_s = u_{i1} = u_{i2}$ při $u_d = 0$ lze zjistit souhlasné zesílení A_s definované vztahem (11.5). Buzení zesilovače dle obrázku 11.9 je uvedeno v zapojení níže. Vzhledem k relaci $i_{e1} = i_{e2} = i_e$, $i_{c2} = \alpha i_{e2} = \alpha i_e$ lze pro A_s, potlačení souhlasné složky signálu CMRR a vstupní odpor R_{is} pro souhlasnou složku psát:



(a)



(b)

$$2i_e = \frac{u_s}{\frac{r_e}{2} + R_E} \doteq \frac{u_s}{R_E}, \quad \text{pro} \quad R_E \gg r_e,$$

$$u_{o2} = -i_{c2} R_2 \doteq -\frac{\alpha u_s R_2}{2R_E} \doteq -\frac{u_s R_2}{2R_E} \Rightarrow$$

$$A_s = \frac{u_{o2}}{u_s} \doteq -\frac{R_2}{2R_E}, \qquad (16.82)$$

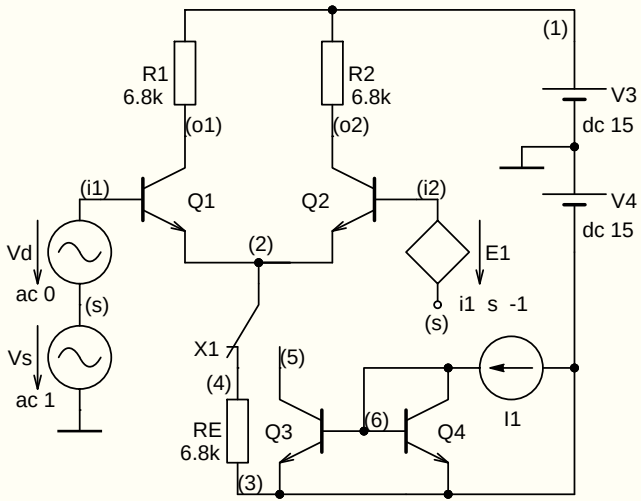
$$\text{CMRR} = \left|\frac{A_d}{A_s}\right| \doteq g_m R_E, \qquad (16.83)$$

$$R_{is} = \frac{u_s}{i_s} = \frac{u_s(\beta+1)}{2i_e} \doteq \beta R_E. \qquad (16.84)$$

Obrázek 16.51: Zapojení rozdílového zesilovače s BJT (a) a jeho linearizované schéma pro souhlasné buzení (b).

Dále platí, že $u_o = 0$, což je velmi výhodné pro symetrický výstup. Z (16.83) je také zřejmé, že použití proudového zdroje $2I$ místo rezistoru R_E je podstatně výhodnější nejen pro nastavení P_0, viz obrázek 16.56 a příklad 16.4.

Příklad 16.4



Experiment: viz přednáška a laboratorní měření I.

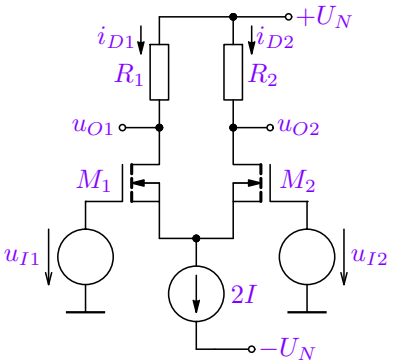
Zadání: Určete rozdílové i souhlasné napěťové zesílení a CMRR pro výstup u_{o2} zesilovače dle obrázku, pokud $Q_1 \equiv Q_2$, $\beta_F = 100$. Dále určete vstupní odpor pro rozdílovou i souhlasnou složku signálu. Jak se změní výsledky, pokud R_E nahradíme proudovým zdrojem realizovaným tranzistorem $Q_3 \equiv Q_4$ s $I_1 = 1{,}8\,\mathrm{mA} \Rightarrow I_{C1} = I_{C2} \doteq 1\,\mathrm{mA}$ (pro $r_{o3} = 50\,\mathrm{k\Omega}$)?

Výsledky: dle výše uvedeného postupu dostaneme: $I_{C1} = I_{C2} \doteq 1\,\mathrm{mA}$, $g_m \doteq 40\,\mathrm{mS}$, $A_d \doteq 136$, $A_s \doteq -1/2$, CMRR $\doteq 270 \doteq 50\,\mathrm{dB}$, $R_{id} \doteq 5\,\mathrm{k\Omega}$ a $R_{is} \doteq 680\,\mathrm{k\Omega}$, viz analýzu.

Pokud R_E nahradíme proudovým zdrojem $1{,}8\,\mathrm{mA}||R_I$, kde $R_I = r_{o3} = 50\,\mathrm{k\Omega}$, změní se $A_s \doteq -0{,}068$, CMRR $\doteq 2000 \doteq 66\,\mathrm{dB}$ a $R_{is} \doteq \beta R_I = 5\,\mathrm{M\Omega}$.

16.12. Rozdílový zesilovač s FET

Předpokládejme shodné tranzistory, pak pro P_0 pro $u_d = 0$ platí následující relace: $I_{D1} = I_{D2} = I$, $U_{GS1} = U_{GS2} = U_{GS}$ a dle (13.12) je $I_{D1} = I_{D2} = \frac{1}{2} K_P \frac{W}{L} (U_{GS} - U_{TO})^2 = I \Rightarrow$. Označme



Obrázek 16.52: Zapojení rozdílového zesilovače s FET.

$$U_{P0} = U_{GS} - U_{TO} = \sqrt{\frac{2I}{K_P} \frac{L}{W}}. \tag{16.85}$$

Pro stav $u_{GS2} = U_{TO}$ je $i_{D2} = 0$ a

$$2I = I_{D1_M} = \frac{1}{2} K_P \frac{W}{L} (U_{GS_M} - U_{TO})^2 \Rightarrow$$

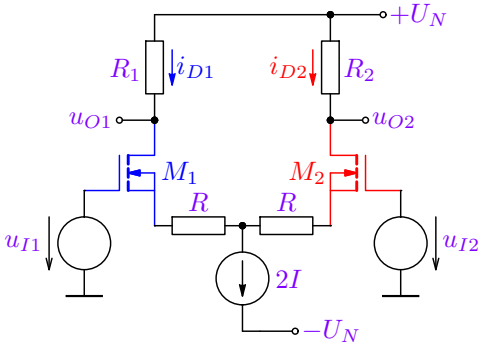
$$U_{GS_M} = \sqrt{\frac{4I}{K_P} \frac{L}{W}} + U_{TO} = \sqrt{2} U_{P0} + U_{TO} \Rightarrow \tag{16.86}$$

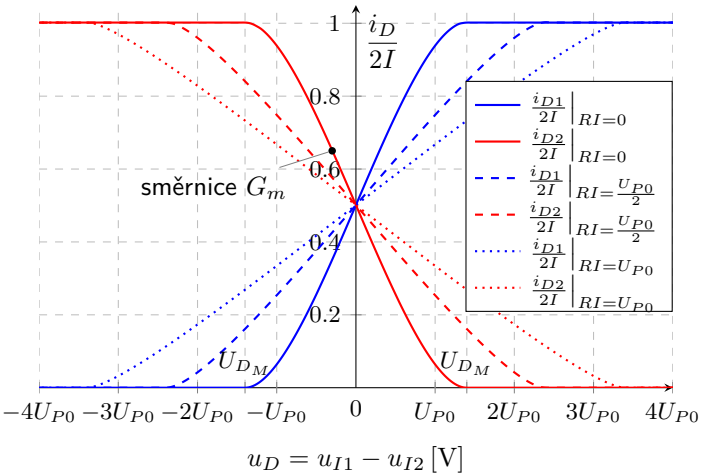
$$U_{D_M} = U_{GS_M} - u_{GS2} = \sqrt{2} U_{P0} \quad \text{pro} \quad u_{GS2} = U_{TO}. \tag{16.87}$$

kde $\pm U_{P0}$ je přibližný rozsah u_D pro lineární funkci a pro $u_D = U_{D_M}$ se právě zavírá M_2 a celý proud $2I$ teče M_1 nebo obráceně pro $u_{D_N} = -\sqrt{2} U_{P0}$. Pro závislost proudů i_{D1}, i_{D2} na u_D lze odvodit následující relace [7]:

$$i_{D1} \doteq I + \frac{I u_D}{U_{P0}} \sqrt{1 - \left(\frac{u_D}{2U_{P0}}\right)^2}, \quad i_{D2} \doteq I - \frac{I u_D}{U_{P0}} \sqrt{1 - \left(\frac{u_D}{2U_{P0}}\right)^2}, \text{ pro } u_D \in \left\langle -\sqrt{2} U_{P0}, \sqrt{2} U_{P0} \right\rangle \tag{16.88}$$

Sklon převodní charakteristiky (16.88) lze zmenšovat pomocí rezistorů R v source a tím charakteristiku linearizovat, podobně jako v zapojení s BJT.





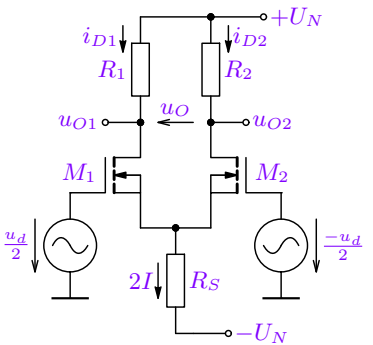
Obrázek 16.53: Zapojení rozdílového zesilovače s FET včetně odporů R v sourcech a jeho převodní charakteristiky.

Dle (15.4) je $g_m = \sqrt{2I_D K_P \frac{W}{L}} = \sqrt{2IK_P\frac{W}{L}} = \frac{2I}{U_{P0}}$, pak je převodní vodivost v případě zapojení s FET:

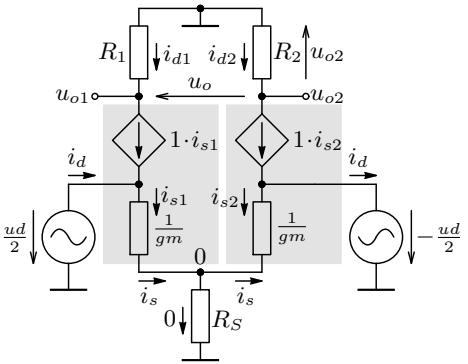
$$\boxed{G_m = \left.\frac{\mathrm{d}i_{D2}}{\mathrm{d}u_D}\right|_{u_D=0}} = -\frac{I}{U_{P0}} \boxed{= -\frac{g_m}{2}}, \quad \text{pro} \quad R = 0. \tag{16.89}$$

16.12.1. Rozdílové zesílení

Stejně jako v případě zesilovače s BJT zjistíme rozdílové zesílení zesilovače s FET pro $u_d = u_{i1} - u_{i2} = \frac{u_d}{2} + \frac{u_d}{2}$.Vzhledem ke shodným parametrům tranzistorů je $g_{m1} = g_{m2} = g_m \Rightarrow u_{R_S} = 0$ a $i_{s1} = i_s = -i_{s2} = -\frac{g_m u_d}{2} = i_{d1} = -i_{d2}$, $u_{o2} = -i_{d2} R_2 = \frac{g_m u_d R_2}{2}$, $u_{o1} = i_{d1} R_1 = -\frac{g_m u_d R_1}{2}$, $u_o = u_{o2} - u_{o1} = g_m R_D$, pro $R_1 = R_2 = R_D$.



(a)



(b)

Pro napěťové rozdílové zesílení pak platí stejné vztahy jako pro variantu s BJT:

$$A_d = \frac{u_{o2}}{u_d} = \frac{g_m R_2}{2}, \quad (16.90)$$

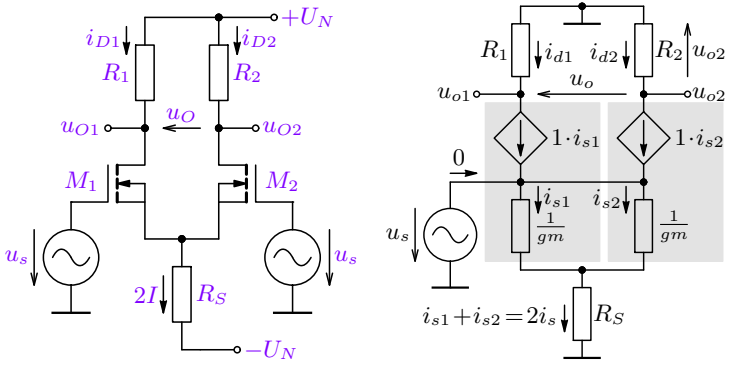
$$A_{d2} = \frac{u_o}{u_d} = g_m R_D. \quad (16.91)$$

Výsledky lze ověřit analýzou. Vliv symetrické zátěže na výstupu u_o (tj. každý výstup zatížen $R_z/2$) viz přednáška.

Obrázek 16.54: Zapojení rozdílového stupně s FET s nastavením P_0 pomocí rezistoru R_S (a) a jeho náhradní linearizované schéma pro změny obvodových veličin (b).

16.12.2. Souhlasné zesílení

Obdobně i pro buzení souhlasným signálem $u_s = u_{i1} = u_{i2}$, tj. $u_d = 0$ lze zjistit souhlasné zesílení A_s dle zapojení níže. Vzhledem k $M_1 \equiv M_2$, platí $i_{s1} = i_{d1} = i_{s2} = i_{d2} = i_s$ a pro A_s a potlačení souhlasné složky signálu CMRR ze získat stejné vztahy jako v případě zesilovače s BJT:



Obrázek 16.55: Zapojení rozdílového zesilovače s FET (a) a jeho linearizované schéma pro souhlasné buzení (b).

$$2i_s = \frac{u_s}{\frac{1}{2g_m} + R_S} \doteq \frac{u_s}{R_S}, \quad \text{pro} \quad R_S \gg \frac{1}{g_m},$$

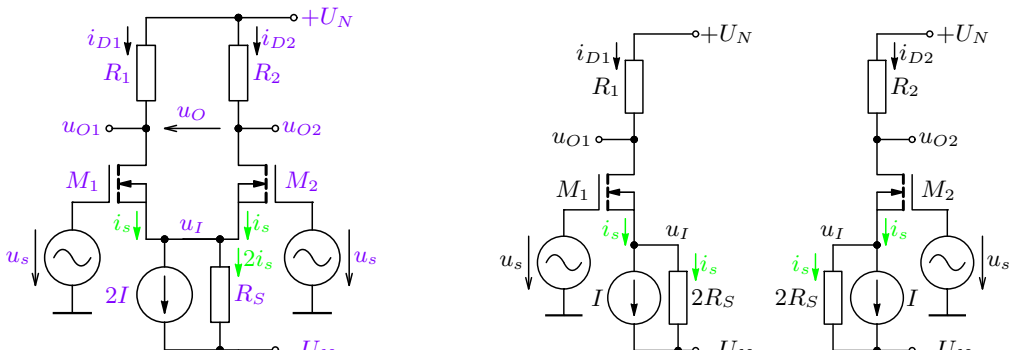
$$u_{o2} = -i_{d2}R_2 = -i_s R_2 \doteq -\frac{u_s R_2}{2R_S} \Rightarrow$$

$$\boxed{A_s = \frac{u_{o2}}{u_s} \doteq -\frac{R_2}{2R_S}}, \text{ pro } R_S \gg \frac{1}{g_m}, \tag{16.92}$$

$$\boxed{\text{CMRR} = \left|\frac{A_d}{A_s}\right| \doteq g_m R_S}. \tag{16.93}$$

Vzhledem k $i_G = 0$ je vstupní odpor jak pro rozdílový, tak pro souhlasný signál nekonečný.Výsledky lze ověřit analýzou.

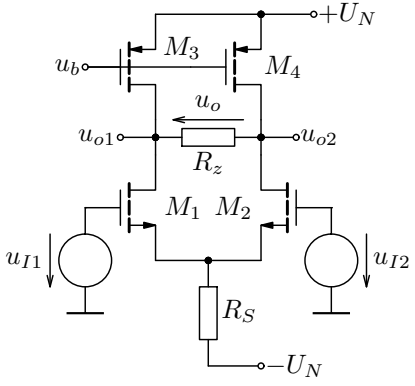
Podobně jako v případě rozdílového buzení (viz obrázek 16.50), lze i v případě buzení souhlasným signálem rozdělit zapojení pro lepší ilustraci na dvě části. Vzhledem k tomu, že signálové proudy i_s (značeny zeleně) jsou shodné jak ve velikosti, tak směru, tečou pouze do R_S nikoli mezi source navzájem, lze uvedené zapojení rozdělit podle níže uvedeného obrázku. Vztah (16.92) pro souhlasné zesílení pak musí odpovídat vztahu viz (15.32) z příkladu 15.11. Komentář viz přednáška.



Obrázek 16.56: Zapojení rozdílového zesilovače s FET při buzení souhlasným signálem (a) a jeho rozdělení (b).

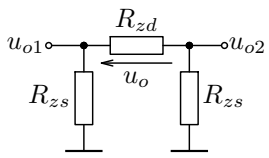
16.13. Rozdílový zesilovač s dynamickou zátěží

Pro zvýšení zesílení lze aplikovat na rozdílový zesilovač dynamickou zátěž a vyjít z konceptu na obrázku (a).

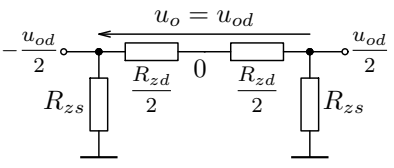


(a)

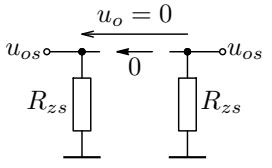
Pokud je na výstup připojen další stupeň (zátěž), bude to mít na jednotlivá zesílení vliv. V případě rozdílového (symetrického) výstupu je nutné rozlišovat zátěž pro rozdílový, resp. souhlasný signál. tj. R_{zd}, resp. R_{zs} jak je uvedeno na obrázku (b), což lze rozdělit na jednotlivé výstupy dle typu signálu pro rozdílovou (c) a souhlasnou složku (d).



(b)



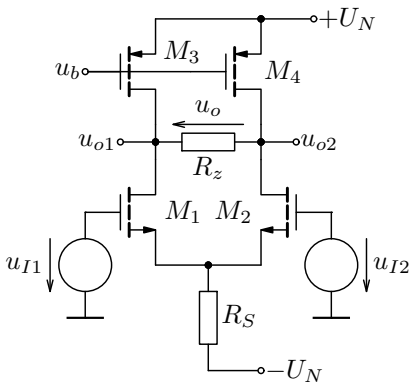
(c)



(d)

Obrázek 16.57: Koncept rozdílového zesilovače s dynamickou zátěží (a) a zátěž výstupních svorek (b)-(d).

Je zřejmé, že rozdílová složka je na každém výstupu zatížena $R_{zd}/2$ dle (c), kdežto souhlasná je na každém výstupu zatížena R_{zs} dle (d). V dalším výkladu jsou jednotlivá zesílení pro jednoduchost uvažována naprázdno.

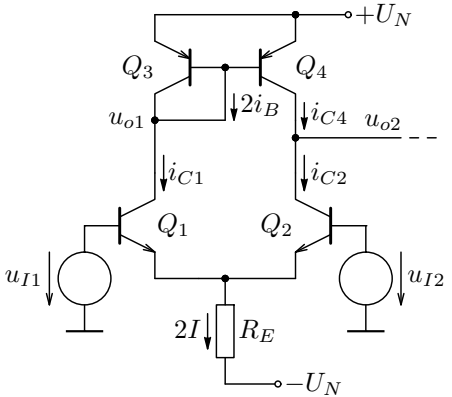


Obrázek 16.58: Koncept rozdílového zesilovače s dynamickou zátěží.

Nedostatkem „klasické dynamické zátěže“ podle uvedeného konceptu je skutečnost, že s požadovaným zvýšením rozdílového zesílení A_d se zvyšuje i zesílení souhlasné A_s dle (16.90), resp. (16.92) pokud budeme uvažovat pouze výstupní odpory tranzistorů M_3, M_4 a důležitý parametr CMRR se nezmění, viz, (16.93). Navíc je však nutné uvažovat i výstupní odpory tranzistorů M_1, a M_2. V tom případě se CMRR dokonce sníží, jelikož výstupní odpor pro souhlasnou složku se zvýší oproti složce rozdílové, jak bude patrné v podkapitole 16.14.2. Další nevýhodou uvedeného zapojení je nutnost stabilizace pracovního bodu, jelikož se jedná o zapojení dvou (nezávise řízených) proudových zdrojů v sérii, více viz přednáška. Výhodnější řešení dynamické zátěže rozdílového zesilovače uvádí následující podkapitola.

16.14. Rozdílový zesilovač s aktivní dynamickou zátěží

Výše uvedené nevýhody řeší tzv. aktivní dynamická zátěž, která je uvedena na následujícím obrázku.



Nastavení pracovního bodu je řešeno stějně jako v předchozích případech, tj. rezistorem R_E nebo lépe proudovým zdrojem $2I$ na jeho místě (s vnitřním odporem R_E). V případě shodných tranzistorů pak platí:

$$I_{C1} = I_{C2} = \alpha I \doteq I \doteq I_{C3} \doteq I_{C4},$$

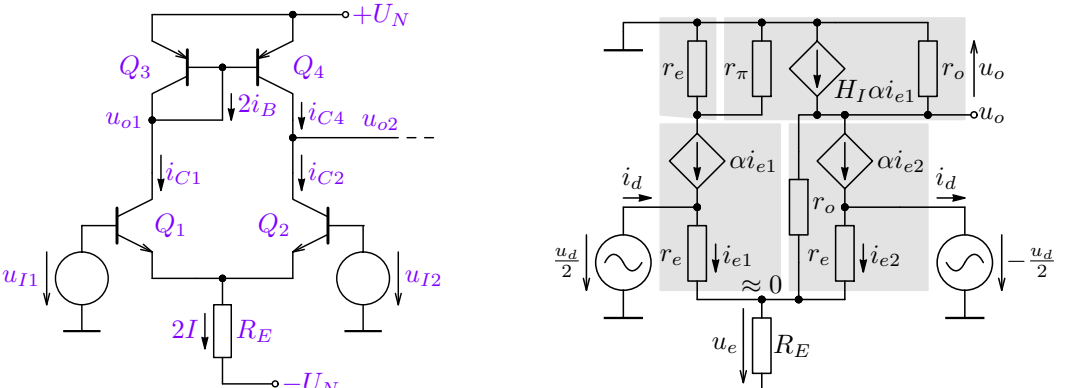
přičemž aktivní režim tranzistoru zajišťuje proudové zrcadlo Q_3, Q_4, pokud případnou chybu zrcadlení – viz (16.14) vyrovnají proudy výstupních odporů tranzistorů Q_2, Q_4, více viz přednáška. Vzhledem k výše uvedenému pak lze uvažovat $g_{m1} = g_{m2} = g_{m3} = g_{m4} = g_m$ a dále shodné r_e i r_o.

Obrázek 16.59: Zapojení rozdílového zesilovače s BJT a aktivní dynamickou zátěží.

Evidentní nevýhodou je nemožnost symetrického výstupu. Pokud však není požadováno další zpracování rozdílového signálu (např. pro zvětšení CMRR), je toto řešení velmi výhodné, jak se ukáže dle parametrů v dalším výkladu.

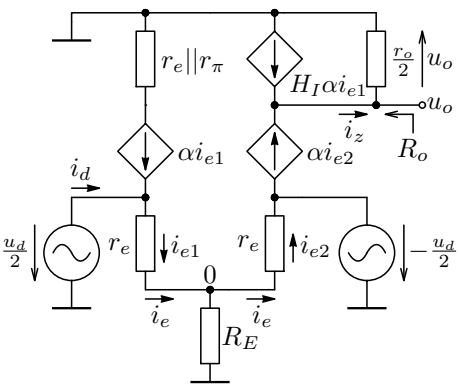
16.14.1. Rozdílové zesílení

Rozdílové zesílení určíme opět s využitím čistě rozdílového buzení, tj. $u_{i1} = -u_{i2} = u_d/2$. V náhradním schématu je nutné uvažovat výstupní odpory r_o tranzistorů Q_2, Q_4. Není nutné uvažovat r_o tranzistorů Q_1, Q_3, jelikož jsou paralelně k r_e tranzistoru Q_4 – vzhledem k $u_{i1} = -u_{i2}$ a malému rozvážení vlivem r_o uvažujeme $u_e \doteq 0$.



Obrázek 16.60: Zapojení rozdílového zesilovače s BJT a aktivní dynamickou zátěží (a) a jeho náhradní linearizovaný model pro změny obvodových veličin při rozdílovém buzení (b).

Výstupní odpor r_o tranzistoru Q_2 lze překreslit paralelně k výstupu, jelikož bude jistě platit $u_o \ggg u_e$. Navíc, jak bylo uvedeno, lze uvažovat pouze malé rozvážení proudů i_e vlivem r_o, tj. $u_e \doteq 0$. Pak lze náhradní obvod upravit jak ukazuje obrázek 16.61. Pak s využitím (16.14) platí:



Obrázek 16.61: Upravený model rozdílového zesilovače z obrázku 16.60 (b).

$$i_{e1} = i_e = -i_{e2} = \frac{u_d}{2r_e},$$

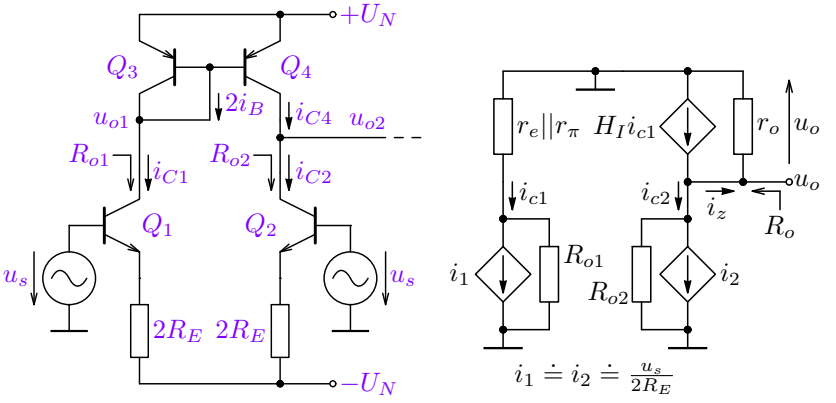
$$i_z = H_I\alpha i_e + \alpha i_e = \frac{\beta}{\beta+2}\alpha i_e + \alpha i_e \doteq 2\alpha i_e,$$

$$\boxed{A_d} = \frac{u_o}{u_d} = \frac{i_z\frac{r_o}{2}}{u_d} \doteq \frac{2\alpha i_e\frac{r_o}{2}}{2r_e i_e} \boxed{= g_m\frac{r_o}{2}}, \qquad (16.94)$$

což evidentně platí i pro zapojení s FET. Oproti klasickému uspořádání rozdílového zesilovače, tj. (16.79) je napěťový zisk zesilovače s aktivní dynamickou zátěží pro rozdílovou složku (rozdílové zesílení) dvakrát větší. Je to dáno právě aktivní dynamickou zátěží, což znamená, že „zátěž“, tj. tranzistor Q_4 nefunguje jako DC zdroj proudu, ale aktivně přispívá do výstupního (dynamického) odporu další složkou „střídavého“ proudu. Vzhledem k tomu, že se tento proud v tomto případě sčítá s proudem αi_{e2} a navíc má prakticky stejnou velikost ($H_I \doteq 1$), je proud i_z dvojnásobný a tím je dvojnásobné i výstupní napětí a rozdílové zesílení.

16.14.2. Souhlasné zesílení

Pro zjištění souhlasného zesílení je nutné zajistit $u_d = u_{i1} - u_{i2} = 0$ a souhlasnou složku buzení nastavit na u_s, tj. $u_{i1} = u_{i2} = u_s$. Pokud použijeme zjednodušení rozdělením obvodu dle obrázku 16.56 (b), dostaneme níže uvedené zapojení na obrázku (a) a jeho zjednodušené linearizované schéma pro změny obvodových veličin na obrázku (b).



Předpokládejme, že $2R_E \gg r_\pi$, pak dle (16.5) a pro $R_E \approx r_o/2$ (pro proudový zdroj) platí:

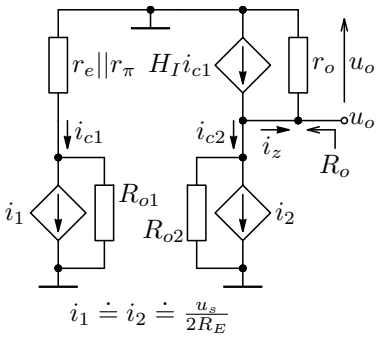
$$R_{o1} = R_{o2} \approx \beta r_o \gg r_{o4} = r_o.$$

Analogicky podle odvození v podkapitole 16.11.2 platí pro i_1, i_2, tj. zdroje proudu řízené vstupním napětím u_s vztah:

$$i_1 = i_2 \doteq i_{c1} = i_{c2} \doteq \frac{u_s \alpha}{2R_E} \doteq$$

$$\doteq \frac{u_s}{2R_E} \text{ pro } R_E \gg r_e. \quad (16.95)$$

Obrázek 16.62: Upravené zapojení rozdílového zesilovače s BJT a aktivní dynamickou zátěží pro souhlasné buzení (a) a jeho zjednodušený linearizovaný model pro změny obvodových veličin (b).



Využitím vztahu (16.95) a proudového přenosu H_I základního zrcadla s BJT (16.14) platí pro obvodové veličiny zjednodušeného náhradního schématu:

$$i_z = H_I i_{c1} - i_{c2} = \left(\frac{\beta}{\beta+2} - 1\right) i_{c2} = \frac{-2}{\beta+2} \cdot \frac{u_s}{2R_E} \doteq -\frac{u_s}{\beta R_E}.$$

Z uvedeného lze vyjádřit souhlasné zesílení a s použitím (16.94) pak i potlačení souhlasné složky signálu:

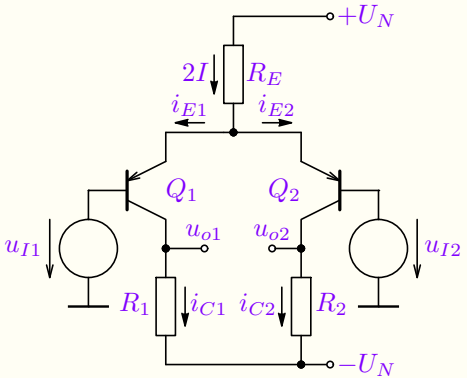
$$A_s = \frac{u_o}{u_s} \doteq -\frac{r_o}{\beta R_E}, \qquad \text{CMRR} = \left|\frac{A_d}{A_s}\right| \approx \frac{1}{2} g_m R_E \beta. \tag{16.96}$$

Obrázek 16.63: Zjednodušený model rozdílového zesilovače pro souhlasné buzení z obrázku 16.62 (b).

Je zřejmé, že použitím aktivní dynamické zátěže došlo k výraznému nárůstu rozdílového zesílení A_d při současném snížení zesílení souhlasné složky, tj, výrazného nárůstu jejího potlačení. Navíc pokud bude $R_E = r_o/2$ (použití proudového zdroje) nezávisí A_d, A_s ani CMRR na P_0, stejně jako u klasické dynamické zátěže, viz (16.39).

Výsledky jsou dány skutečností, že v případě rozdílové složky je $i_z = H_I i_{c1} + i_{c2}$ a pro souhlasnou složku se proudy odečítají: $i_z = H_I i_{c1} - i_{c2}$! Pokud by $H_I \to 1$, pak by $A_s \to 0$. To však ani v případě FET není pravda, jelikož při uvažování r_o je $H_I \neq 1$ a $A_s \approx \frac{1}{2 g_m R_S}$, CMRR $\approx g_m r_o (g_m R_S)$, viz [7]. Uvedená zanedbání však v případě výpočtu souhlasné složky výrazně ovlivňují výsledek. Vztah pro A_s s dynamickou zátěží je spíše ilustrativní, jelikož A_s nezanedbatelně ovlivňují např. nestejné tranzistory, $I_{C1} \neq I_{C2}$, tj. $g_{m1} \neq g_{m2}$, přesné zapojení $r_{o1} \neq r_{o2} \neq r_{o4}$, ..., více viz přednášku, analýzu příkladu níže a laboratorní měření I.

Příklad 16.5



Zadání: Určete rozdílové i souhlasné napěťové zesílení a CMRR pro výstup u_{o2} zesilovače na obrázku vlevo, pokud je zadáno $Q_1 \equiv Q_2$, $\beta_F = 100$, $U_A = 100\,\mathrm{V}$, $R_1 = R_2 = R_E = 6{,}8\,\mathrm{k\Omega}$ a $U_N = 15\,\mathrm{V}$. Jak se změní výsledky bude místo rezistorů R_1, R_2 použita dynamická zátěž?

Výsledky: základní části zadání je stejné jako v příkladu 16.4. Jedná se o analogické zapojení s PNP, tj. i se stejnými výsledky.

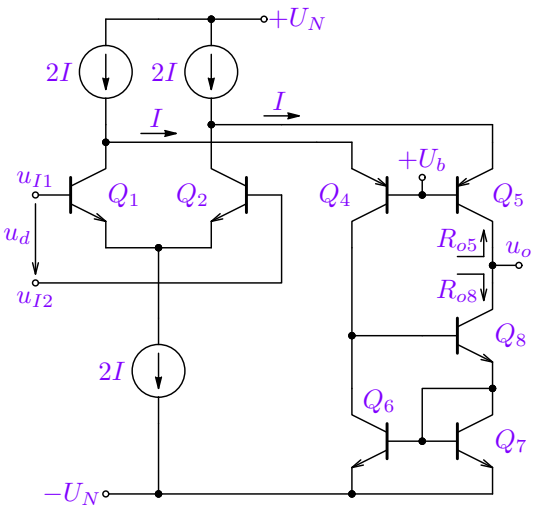
Dynamická zátěž spolu s $R_E = 6{,}8\,\mathrm{k\Omega}$ změní dle (16.94) a (16.96) $A_d \doteq 2000$, $A_s \doteq -0{,}15$, CMRR $\doteq 13{,}6 \cdot 10^3 \doteq 83\,\mathrm{dB}$ a dynamická zátěž spolu s $2I = 1{,}8\,\mathrm{mA}||50\,\mathrm{k\Omega}$ změní $A_s \doteq -0{,}02$, tj. CMRR $\doteq 10^5 \doteq 100\,\mathrm{dB}$. Numerická analýza však dává hodnoty $A_s \doteq -0{,}02$ pro $R_E = 6{,}8\,\mathrm{k\Omega}$ a dokonce $A_s \doteq -0{,}022$ při náhradě R_E zdrojem $2I = 1{,}8\,\mathrm{mA}||50\,\mathrm{k\Omega}$.

Komentář: Je zřejmé, že výsledky pro souhlasné buzení jsou ovlivněny dalšími faktory, jak bylo uvedeno a neodpovídají přesně vztahům (16.96).

Experiment: viz přednáška včetně ukázky analýzy.

16.15. Rozdílový stupeň s využitím kaskodového zapojení

Nevýhodou předchozího zapojení je jednak nesymetrický výstup a dále nestejná vstupní kapacita, výrazná zejména pro u_{I2} díky velkému rozdílovému zisku. Tuto nevýhodu lze odstranit s využitím kaskodového zapojení níže.



Symetrické kaskodové zapojení tvoří vstupní tranzistory ve spojení se stupni SB navázanými na výstup rozdílového stupně, který je tudíž zakončen nízkým odporem, čímž se minimalizují kapacity obou vstupů. Výstup stupňů SB je zakončen Wilsonovým zrcadlem, který tvoří aktivní dynamickou zátěž. Toto uspořádání má zásadní vliv nejen na symetrii vstupní části, ale zejména jeho vstupní kapacity a také na další zvýšení napěťového zisku, jelikož dle (16.47), resp. (16.5) a (16.26) je:

$$R_o = R_{o5}||R_{o8} \doteq \beta r_o \Big|\Big| \frac{r_o\beta}{2}, \quad A_d = g_m R_o \doteq g_m \beta \frac{r_o}{3}. \quad (16.97)$$

Ověření analýzou včetně nastavení P_0 a ukázky vlivu parazitních kapacit na horní mezní kmitočet jak A_d, tak A_s viz přednáška.

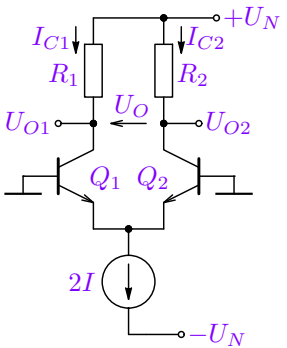
Z analýzy vyplývá nutnost kompenzace napěťové nesymetrie pro aktivní režim Q_8, což bylo nutné i v zapojení 16.60. Zde je offset daleko menší i přes navýšení A_d, díky symetrii vstupní části.

Obrázek 16.64: Rozdílový zesilovače v kaskodovém zapojení s aktivní dynamickou zátěží, viz také 16.100.

16.16. Vznik napěťové nesymetrie rozdílového zesilovače

Napěťová nesymetrie znamená $U_{O1} \neq U_{O2}$ pro $u_{I1} = u_{I2} = 0$, což vede na nenulové stejnosměrné napětí U_{os}. Příčin vzniku napěťové nesymetrie je mnoho a souvisí se zmíněnou nesymetrií zapojení vlastního rozdílového zesilovače podobně jak bylo uvedeno v kapitole 16.14 pro souhlasný zisk. Zde ukážeme pouze některé vlivy.

16.16.1. Vliv nesymetrie rozdílového stupně s BJT na U_{os}



Nemsymetrie rozdílového stupně může být vyvolána např. nestejnou zátěží $R_1 \neq R_2$, tranzistory (a tím $I_{C1} \neq I_{C2}$) nebo jejich různou teplotou. Uvažujme:

$$Q_1 \equiv Q_2 \Rightarrow I_{C1} = I_{C2} = I_C = \alpha I \quad \text{a} \quad R_1 = R - \Delta\frac{R}{2}, \quad R_2 = R + \Delta\frac{R}{2} \Rightarrow$$

$$U_O = U_{O2} - U_{O1} = U_N - I_C\left(R + \Delta\frac{R}{2}\right) - U_N + I_C\left(R - \Delta\frac{R}{2}\right) = \alpha I \Delta R.$$

$$\boxed{|U_{os}|} = \frac{U_O}{A_{d2}} = \frac{\alpha I \Delta R}{2 g_m R} \boxed{= U_T \frac{\Delta R}{R}}, \quad \text{vzhledem k (16.80) a } g_m = \frac{\alpha I}{U_T} \qquad (16.98)$$

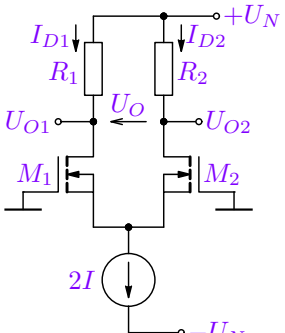
Pro chybu hodnot odporů $\pm 0{,}2\%$, je $\frac{\Delta R}{R} = 0{,}004$ a $|U_{os}| \doteq 0{,}1\,\mathrm{mV}$, viz analýzu včetně komentáře.

Obrázek 16.65: Základní zapojení rozdílového stupně s BJT pro výpočet vlivu parametrů na U_{os}.

Analogicky lze odvodit i vliv změny velikosti tranzistorů, resp jejich saturačního proudu I_S na napěťový offset jako $|U_{os}| = U_T \frac{\Delta I_S}{I_S}$, což lze jednoduše ověřit analýzou, podobně jako vliv rozdílných teplot tranzistorů. Vzhledem k tomu, že jednotlivé vlivy jsou nekorelované, lze jejich výsledný vliv na offset vyjádřit jako

$$|U_{os}| = \sqrt{\left(U_T \frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(U_T \frac{\Delta I_S}{I_S}\right)^2 + \cdots}. \tag{16.99}$$

16.16.2. Vliv nesymetrie rozdílového stupně s MOSFET na U_{os}



V případě rozdílového stupně s MOFET lze uvedené vlivy vyjádřit následovně:

$$M_1 \equiv M_2 \Rightarrow I_{D1} = I_{D2} = I_D = I \quad \text{a} \quad R_1 = R - \Delta\frac{R}{2}, \quad R_2 = R + \Delta\frac{R}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{|U_{os}|} = \frac{U_O}{A_{d2}} = \frac{I\Delta R}{g_m R} \boxed{= \frac{U_{P0}}{2}\frac{\Delta R}{R}}, \text{ viz (16.91) a } g_m = \frac{2I}{U_{P0}} \text{ z (16.89)} \tag{16.100}$$

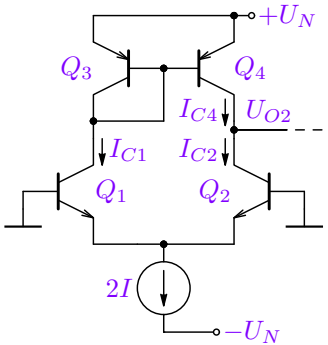
$$\text{Pro} \quad \frac{W}{L} \pm \frac{\Delta W/L}{2} \text{ je } I_D = I\left(1 \pm \frac{\Delta W/L}{2\,W/L}\right) \text{ a } \Delta I_D = I\frac{\Delta W/L}{W/L} \Rightarrow$$

$$\boxed{|U_{os}|} = \frac{U_O}{A_{d2}} = \frac{I\Delta W/L}{(W/L)g_m R} \boxed{= \frac{U_{P0}}{2}\frac{\Delta W/L}{W/L} = \frac{U_{P0}}{2}\frac{\Delta W}{W}} \tag{16.101}$$

Obrázek 16.66: Základní zapojení rozdílového stupně s FET pro výpočet vlivu parametrů na U_{os}.

Pro chybu $\pm 0{,}2\%$ hodnot odporů, případně W/L, je $\frac{\Delta R}{R} = 0{,}004$ a $|U_{os}| \doteq 0{,}56\,\mathrm{mV}$, což je horší výsledek díky menšímu g_m. Závislost na teplotě je však výrazně nižší než u BJT, jak lze ověřit analýzou.

16.16.3. Vliv H_I aktivní dynamické zátěže rozdílového stupně na U_{os}



V případě rozdílového stupně aktivní dynamickou zátěží vyjádříme pouze vliv proudového přenosu H_I zrcadla. Předpokládejme:

$$Q_1 \equiv Q_2 \Rightarrow I_{C1} = I_{C2} = \alpha I, \qquad I_{C4} = H_I I_{C1} = \frac{\beta}{\beta+2} I \;\Rightarrow$$

$$\Delta I \;= I_{C1} - I_{C4} = \alpha I \frac{2}{\beta+2} \doteq \frac{2\alpha I}{\beta} \;\Rightarrow\; |U_{os}| = \frac{\Delta I}{g_m} = \frac{2U_T}{\beta}. \qquad (16.102)$$

Pro uvedené zapojení by vycházelo $U_{os} \approx 0{,}5\,\mathrm{mV}$. I v tomto případě však jsou vlivy ostatních parametrů na napěťový offset nezanedbatelné, viz analýza. Pro odhad reálné U_{os} je třeba vzít v úvahu jednak kompletní modely tranzistorů a provést citlivostní analýzu[c], zejména pak analýzu Worst case[W] a Monte Carlo[M].

Obrázek 16.67: Zpojení rozdílového stupně s aktivní dynamickou zátěží pro výpočet vlivu H_I na U_{os}.

[c] umožňuje zjistit, závislost sledované vlastnosti obvodu na jeho malých (založeno na $\frac{\partial}{\partial x}$) odchylkách parametru x.

[W] stanoví nejhorší možnou kombinaci obvodových prvků (paranetrů) vzhledem k odchylce sledované vlastnosti od nominální hodnoty.

[M] umožňuje určit statistické parametry sledované vlastnosti obvodu pomocí náhodného generování odchylek parametrů.

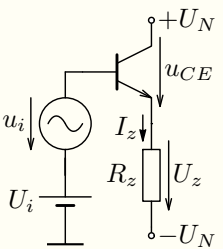
16.17. Koncový stupeň

Koncový stupeň zapojení, jehož úkolem je dodat do zátěže požadovaný výkon. To lze realizovat např. uvedeným zapojením SC, resp. SD. Pokud je pracovní bod P_0 nastaven doprostřed převodní charakteristiky má však toto zapojení (viz. následující příklad) značnou nevýhodu ve velmi malé energetické účinnosti. Stejnosměrné předpětí U_i musí pro plné vybuzení odpovídat amplitudě výstupního napětí a v P_0 je $I_C = I_{z_{max}}/2$. Pro $u_i = 0$ je $U_{CE} = U_N$ na tranzistoru se ztrácí velký neužitečný výkon. Zapojení pracuje v tzv. pracovní třídě A.

16.17.1. Pracovní třída A

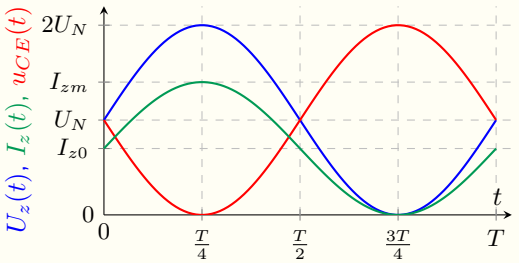
Výkonové poměry koncového stupně pracujícího ve třídě A budeme ilustrovat na příkladu zesilovače v zapojení SC.

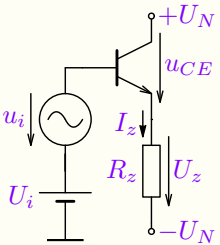
Příklad 16.6



Zadání: Určete výkonovou bilanci zapojení SC dle uvedeného zapojení a teoretickou účinnost (pro střídavou složku), pokud uvažujeme plné ideální vybuzení a nulový saturační úbytek na tranzistoru, tj.: výstupní napětí $U_z = U_N + U_N \sin(\omega t)$, skládající se ze stejnosměrné složky $U_{z0} = U_N$, která je dána napájecím napětím U_N (stejnosměrnou složkou $U_i \approx 0{,}7\,\mathrm{V}$ pro otevření tranzistoru) a střídavé (užitečné) složky $u_z = U_N \sin(\omega t)$. Při výpočtu zanedbejte proud báze, tj. $i_B \ll i_C \Rightarrow i_C \doteq i_E = I_z$.

Řešení: Časové průběhy obvodových veličin jsou ilustrovány na obrázku vpravo. Na zátěži je přítomna jak stejnosměrná, tak střídavá harmonická složka, jejíž výkon je užitečný a označme ho jako P_z. Příkon z napájecích zdrojů označme P_N. Pro uvedené složky výkonu a teoretickou účinnost η při harmonickém buzení pak platí:

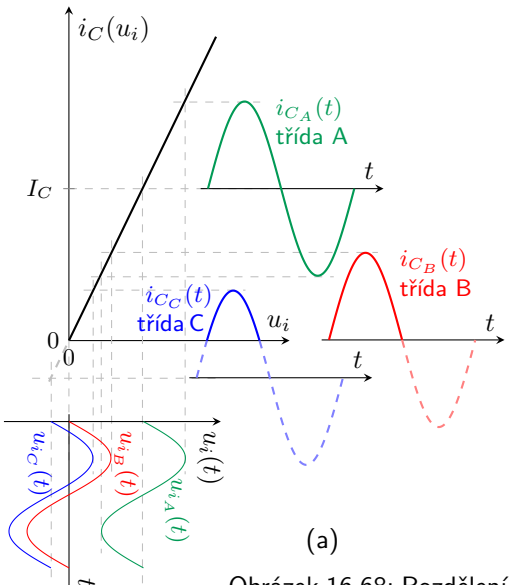




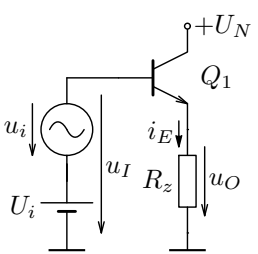
$$I_z = \frac{U_z}{R_z}, \qquad P_z = \frac{U_N^2}{2R_z}, \qquad P_N = \frac{1}{T}\int_0^T 2U_N I_z \,\mathrm{d}t =$$

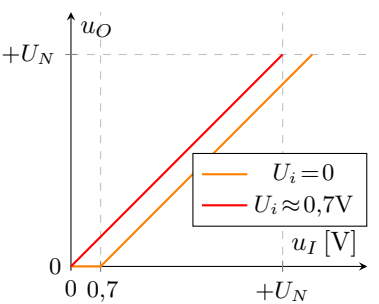
$$= \frac{1}{T}\int_0^T 2U_N \frac{U_N + U_N \sin(\frac{2\pi}{T}t)}{R_z}\,\mathrm{d}t = \frac{2U_N^2}{R_z}, \qquad \boxed{\eta_A = \frac{P_z}{P_N} = \frac{1}{4}}. \qquad (16.103)$$

16.17.2. Základní dělení pracovních tříd analogových zesilovačů



Pracovní třídy se dělí dle nastavení pracovního bodu jak ukazuje obrázek (a) na ideální převodní charakteristice $i_C = f(u_I)$. Pro implementaci dle obrázku (b), jehož převodní charakteristika (c) je daná vlastnostmi bipolárního tranzistoru je pak třída A nastavena pro $U_i > 0{,}7\,\mathrm{V}$, pro třídu B je $U_i \approx 0{,}7\,\mathrm{V}$ a pro třídu C je $U_i < 0{,}7\,\mathrm{V}$. Více viz. přednáška.

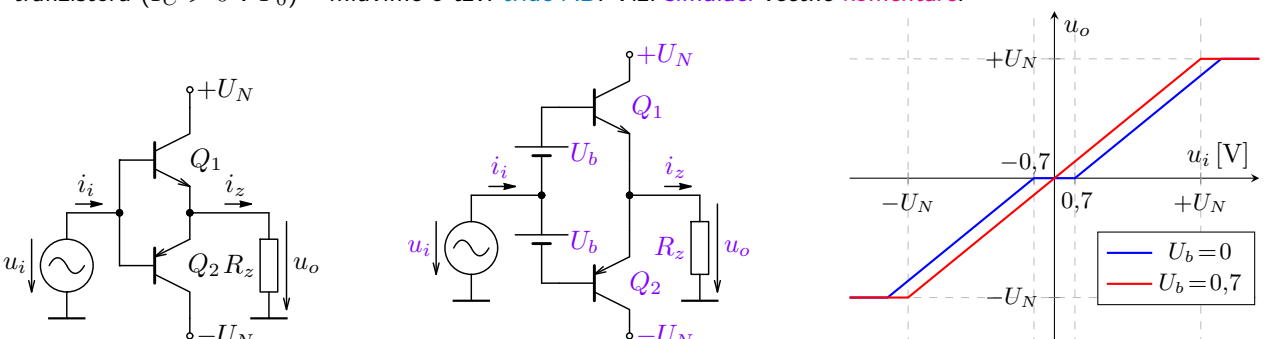




Obrázek 16.68: Rozdělení analogových obvodů dle pracovních oblastí (a) a možné obvodové řešení (b) a jeho převodní charakteristika v případě bipolárního tranzistoru (c).

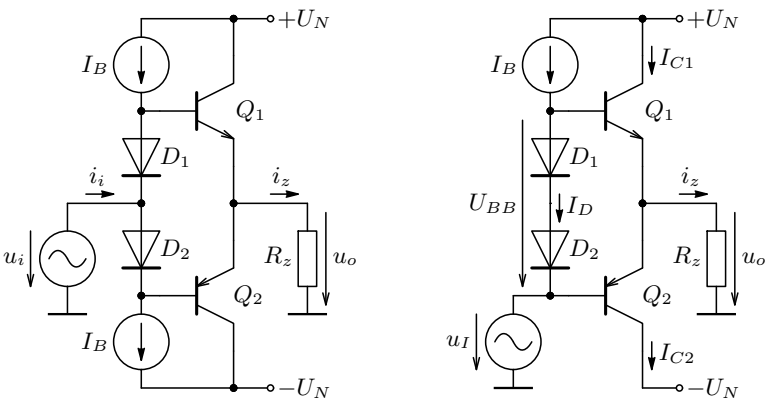
16.17.3. Pracovní třída B (AB)

Zásadní nevýhodu A třídy, tj. malá účinnost, resp. velká výkonová ztráta při malém/nulovém signálu lze řešit tzv. dvojčinným (komplementárním) uspořádáním, tj. třídou B. Princip tohoto zapojení je uveden na následujícím obrázku. Jedná se obdobu zapojení SC z předchozího příkladu s tím rozdílem, že každý tranzistor zpracovává jinou půlvlnu signálu. Přechodové zkreslení vlivem převodní charakteristiky tranzistoru lze minimalizovat pootevřením tranzistoru ($I_C > 0$ v P_0) – mluvíme o tzv. třídě AB. Viz. simulaci včetně komentáře.



Obrázek 16.69: Principiální zapojení koncového stupně třídy B (a), zapojení s kompenzací přechodového zkreslení – třída AB (b) a jejich převodní charakteristiky.

V praxi se zdroje předpětí U_b realizují pomocí úbytků na diodách protékaných proudem. Budicí zdroj je obvykle zapojen do báze Q_2 podle obrázku (b) a realizován jako proudový zdroj, tj. tranzistorem v zapojení SE (zde s dynamickou zátěží). Pro teplotní stabilitu je nutné diody tepelně „svázat“ s tranzistory např. na čipu vedle sebe.



Obrázek 16.70: Zapojení koncového stupně třídy AB s realizací U_{BB} pomocí diod s budicím zdrojem u_i bez DC složky (a) a principiální zapojení u_I s DC posunem cca $-0{,}7\,\mathrm{V}$ (b).

Pro P_0 a $I_z = 0$ platí $I_{C1} \doteq I_{C2} = I_C$ a relaci mezi proudy I_D a I_C lze z (13.1), resp. (13.5) a při $N = N_F$ vyjádřit následovně:

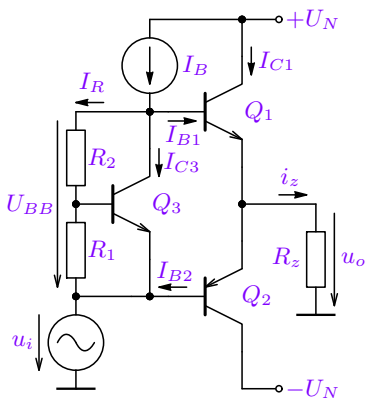
$$U_{BB} = U_{BE1} + U_{BE2} \doteq$$
$$\doteq 2U_T \ln \frac{I_C}{I_{S_Q}} = 2U_T \ln \frac{I_D}{I_{S_D}}.$$

Poměrem saturačních proudů diod I_{S_D} a tranzistorů I_{S_Q}, tj. poměrem ploch přechodů diod a emitorových přechodů tranzistorů pak lze nastavit poměr

$$\frac{I_C}{I_D} = \frac{I_{S_Q}}{I_{S_D}} \doteq \frac{I_C}{I_B}$$

pro pracovní bod, kde pro $I_z = 0$ bude platit $I_D \gg I_C/\beta_F \Rightarrow I_D \approx I_B$.

V případě diskrétní realizace, kde nelze nastavovat geometrické poměry přechodů, se zdroje předpětí U_b obvykle realizují pomocí tzv. násobiče U_{BE}, jak je uvedeno na obrázku níže.



Obrázek 16.71: Zapojení koncového stupně třídy AB s kompenzací přechodového zkreslení pomocí násobiče U_{BE}. Viz analýzu a komentář.

Při zanedbání bázového proudu Q_3, tj. pro $I_R \gg I_{C3}/\beta_{F3}$ platí:

$$U_{BB} = I_R(R_1+R_2) \doteq U_{BE3}\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right) \doteq$$

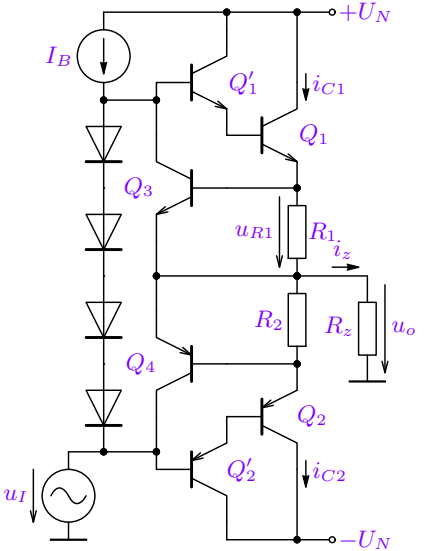
$$\doteq 2U_T\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)\ln\frac{I_{C3}}{I_{S3}} = U_T\ln\frac{I_{C1}}{I_{S1}} + U_T\ln\frac{I_{C2}}{I_{S2}}$$

kde proudy I_{C1}, I_{C2} v pracovním bodě lze nastavit místo poměrem ploch přechodů poměrem rezistorů, resp. jednoduše pomocí odporového potenciometrického trimru. Pro nastavení proudu I_B platí realce:

$$I_B = I_R + I_{C3} + i_{B1}, \quad \text{kde} \quad i_{B1} \doteq \frac{i_{z_{max}}}{\beta_{F1}} \doteq \frac{U_N}{R_z\beta_{F1}},$$

tj. zdroj I_B musí být schopen dodat dostatečný proud i při plném vybuzení zesilovače, přičemž zanedbáváme I_{C1} v pracovním bodě oproti $i_{z_{max}}$.

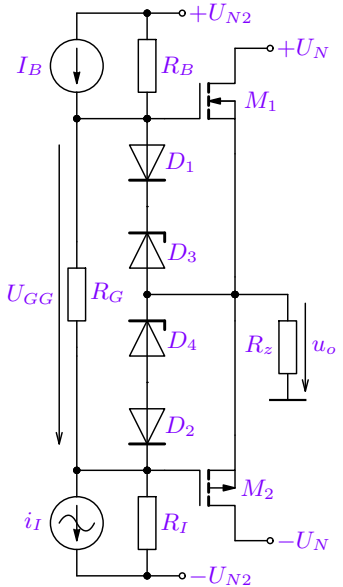
Pokud jsou tranzistory Q_1, Q_2 komplementární (stejné β_F, ...), pak jsou jednotlivé půlvlny zpracovány shodně a pro parametry koncového stupně evidentně platí stejné relace jako pro samotné zapojení SC, resp. SD, tj. A_u dle (15.55), A_i dle (15.56), R_i dle (15.57) a R_o dle (15.58).



Obrázek 16.72: Zapojení koncového stupně třídy AB s ochranou koncových tranzistoru proti přetížení (a) a s využitím laterálního PNP tranzistoru (b).

Pro větší výstupní proudy lze v koncovém stupni použít Darlingtonova zapojení (obrázek (a)) pro zvýšení proudového zesílení viz (16.67) a vstupního odporu viz (16.66). Je však ovlivněn i odpor výstupní, viz (16.68), resp. (16.69), jehož minimalizace se pak dosahuje pomocí záporné ZV. Zapojení na obrázku (a) dále ilustruje možnou realizaci ochrany koncových tranzistoru proti proudovému/výkonovému přetížení (např. zkrat na výstupu). Při hraničně velkém i_{C1}, resp. i_{C2}, je nastavením R_1, R_2 dáno napětí $u_{R1}, u_{R2} > 0{,}5\,\mathrm{V}$, při kterém se začíná otevírat Q_3, resp. Q_4 a tím je omezeno větší otevření Q_1, Q_2.

V případě implementace koncového stupně na čip v bipolární technologii se PNP tranzistory lze řešit jako substrátové, tj. s horšími vlastnostmi (menší β_F, ...). Z tohoto důvodu se pak PNP tranzistor implementuje jako dvojice PNP (Q_2') a NPN (Q_2) tranzistor, jak uvádí obrázek (b).



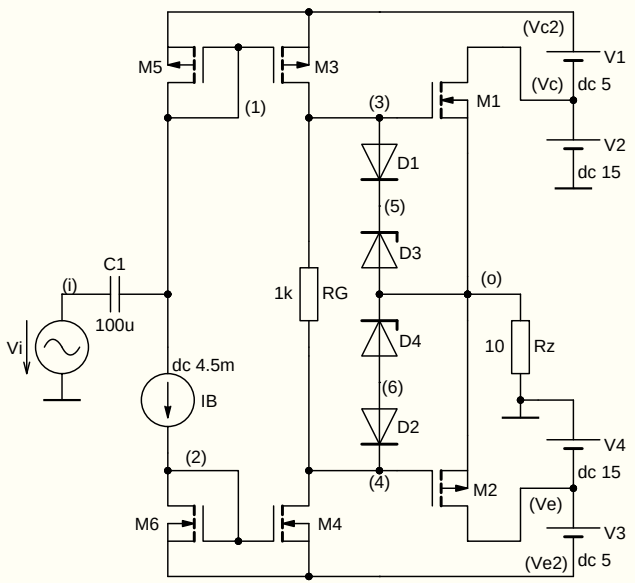
Obrázek 16.73: Zapojení koncového stupně třídy AB s unipolárními tranzistory.

V případě koncového stupně s unipolárními tranzistory lze vyjít ze stejné koncepce, tj. obrázku uvedeného vlevo. Předpětí U_{GG} zde vzniká úbytkem na odporu R_1 vlivem I_B. Vzhledem k tomu, že je použito proudového buzení musí být jeho stejnosměrná složka I_I shodná s proudem I_B. Ten pak funguje jako dynamická zátěž a rezistory R_B a R_I představují vnitřní odpory uvedených proudových zdrojů. Diody slouží jako ochrana proti přepětí gate koncových tranzistorů.

V praxi je pro velké výkony velmi výhodné rozdělit napájecí napětí a zvýšit hodnotu U_{N2} pro rozkmitový stupeň o jednotky voltů a tím zlepšit účinnost. Výkonové FETy mají totiž vysoké prahové napětí a samozřejmě i menší transkonduktanci, takže pro dosažení shodného proudu I_D je nutné podstatně větší napětí U_{GS}, než je napětí U_{BE} pro tranzistory bipolární, viz. analýzu.

Odpor rezistoru R_G nelze navrhovat příliš vysoký, s čímž souvisí i poměrně vysoká hodnota I_B. Důvodem jsou velké vstupní kapacity výkonových FETů (až nF!) a uvedené nastavení je pak nutné z hlediska dodržení potřebné rychlosti, resp. kmitočtových vlastností.

Příklad 16.7



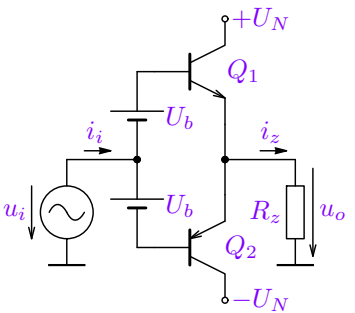
Zadání: Na základě zapojení 16.73 koncového stupně z analýzy navrhněte úpravu budicího/vstupního obvodu tak, aby nebylo nutné použít oddělovací kapacitor a bylo možné zavést zápornou zpětnou vazbu. Úpravu koncipujte jako další zesilovací stupeň, který dále zvýší zesílení ve ZV smyčce. Zesílení zesilovače se ZV nastavte na hodnotu 20.

Funkčnost ověřte analýzou včetně dynamických vlastností (stability, kmitočtové charakteristiky i rychlosti přeběhu).

Komentář: Příklad je motivací pro další podkapitolu 16.18 a vede na použití rozdílového stupně. Stručný popis tohoto zapojení zde, řešení na straně XVI-105 až XVI-113.

Energetická bilance třídy B

Uvažujme harmonický signál $u_o(t) = U_{om}\sin(\omega t)$ idealizovaného zapojení 16.69 (b), nulový proud tranzistorů v pracovním bodě a zanedbejme bázové proudy, tj. $i_z(t) = i_C(t)$. Energetickou bilanci určíme z příkonu z napájecích zdrojů napětí $\pm U_N$ a výkonu na zátěži R_z. Výpočet je proveden pro jednu půlvlnu a při zanedbání úbytků napětí na plně otevřených tranzistorech (při maximálním vybuzení je amplituda výstupního napětí $U_{om} = U_N$).



- Příkon ze zdroje $P_N = U_N I_{zs}$, kde $I_{zs} = I_{Ns}$ je střední hodnota proudu zátěží a $I_{zm} = U_{om}/R_z$ jeho amplituda. Pak platí:

$$I_{zs} = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} i_z(t)\,dt = \frac{2I_{zm}}{\pi} \;\Rightarrow\; \boxed{P_N} = U_N I_{zs} \boxed{= \frac{2}{\pi} U_N I_{zm}}. \quad (16.104)$$

- Výkon na zátěži:

$$P_z = U_o I_z = \frac{1}{2} U_{om} I_{zm} \quad \text{kde } I_z \text{ a } U_o \text{ jsou efektivní hodnoty.}$$

- Maximální teoretická účinnost třídy B je pak vzhledem k relaci $U_{om} = U_N$ dána vztahem:

$$\boxed{\eta_{max} = \frac{P_{z_{max}}}{P_{N_{max}}}\bigg|_{U_{om}=U_N} = \frac{\pi}{4} \doteq 78\,\%} \quad (16.105)$$

Předchozí úvaha byla provedena při maximálním vybuzení. Pokud uvažujeme proměnné buzení (opět zanedbáváme napěťové úbytky na plně otevřených tranzistorech) platí:

$$U_{om}(m) = mU_N, \quad I_{zm}(m) = \frac{mU_N}{R_z}$$

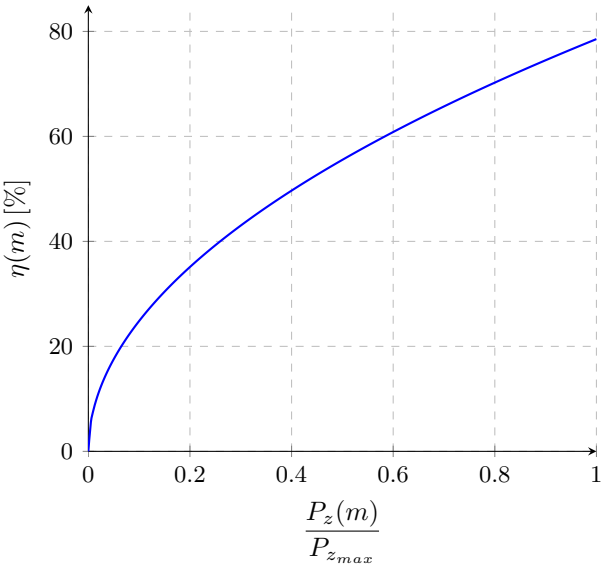
$$P_N(m) = \frac{2}{\pi} U_N I_{zm}(m) = \frac{2}{\pi} \frac{U_N^2 m}{R_z} \qquad (16.106)$$

$$P_z(m) = U_{om}(m) I_{zm}(m) = \frac{1}{2} \frac{U_N^2 m^2}{R_z} \qquad (16.107)$$

$$\eta(m) = \frac{P_z(m)}{P_N(m)} = \frac{\pi}{4} m \qquad (16.108)$$

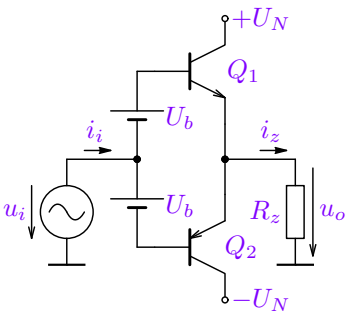
Závislost účinnosti na míře výkonového vybuzení je uvedena na obrázku vpravo. Pozor, činitel m byl stanoven pro míru napěťového buzení, tj. relativní hodnota výstupního výkonu musí být

$$\frac{P_z(m)}{P_{z_{max}}} = m^2.$$



Obrázek 16.74: Závislost účinnosti koncového stupně třídy AB na relativní hodnotě výstupního výkonu.

Při proměnné velikosti buzení můžeme dále stanovit míru vybuzení, při které dochází k maximální výkonové ztrátě a špičkové kolektorové ztrátě na tranzistorech.



- Maximální výkonová ztráta, tj. průměrná hodnota ztrátového výkonu, která se mění v teplo je nutná odvést chladičem, viz také obrázek 16.80 a dodatek M.

$$P_\theta(m) = P_N(m) - P_z(m) = \frac{2}{\pi}\frac{U_N^2 m}{R_z} - \frac{1}{2}\frac{U_N^2 m^2}{R_z}$$

$$\frac{\partial P_\theta(m)}{\partial m} = 0 \;\Rightarrow\; m_0 = \frac{2}{\pi} \doteq 0{,}64 \tag{16.109}$$

$$\boxed{P_{\theta_{max}}} = P_\theta(m_0) = \frac{2U_N I_{zm}}{\pi^2} \boxed{= \frac{2U_N^2}{\pi^2 R_z}} \tag{16.110}$$

- Špičková kolektorová ztráta jednoho tranzistoru (výsledek souvisí s výkonovým přizpůsobením , kdy $U_o = U_z = U_N/2$, viz analýza).

$$P_c(m) = u_{CE}(m) i_C(m) = \big(U_N - U_{om}(m)\big) I_{zm}(m) = (U_N - mU_N) m I_{zm}$$

$$\frac{\partial P_c(m)}{\partial m} = 0 \;\Rightarrow\; m_c = \frac{1}{2} \tag{16.111}$$

$$\boxed{P_{c_{max}}} = P_c(m_0) = \frac{1}{4} U_N I_{zm} \boxed{= \frac{1}{4}\frac{U_N^2}{R_z} = \frac{1}{2} P_z} \tag{16.112}$$

Příklad 16.8

Zadání: Určete energetickou bilanci koncového stupně třídy B a parametry tranzistorů, pokud má zesilovač dodat výkon $P_z = 16\,\mathrm{W}$ do zátěže $R_z = 4\,\Omega$ s min. úbytkem na tranzistorech $u_{CE_{min}} = 2\,\mathrm{V}$.
Řešení: Nejprve určíme efektivní a maximální hodnoty výstupního napětí a proudu zátěží a velikost symetrického napájecího napětí $\pm U_N$:

$$I_z = \sqrt{\frac{P_z}{R_z}} = 2\,\mathrm{A}, \quad U_o = \sqrt{P_z R_z} = 8\,\mathrm{V}, \qquad I_{zm} = I_z\sqrt{2} \doteq 2{,}83\,\mathrm{A}, \quad U_{om} = U_z\sqrt{2} \doteq 11{,}3\,\mathrm{V}$$

$$U_N \geq U_{om} + u_{CE_{min}} \doteq 13{,}3\,\mathrm{V} \;\rightarrow\; \text{volíme } U_N = 13{,}5\,\mathrm{V}$$

Vzhledem k $u_{CE_{min}} > 0$ provedeme výpočet účinnosti dle definice, přičemž využijeme relaci (16.104):

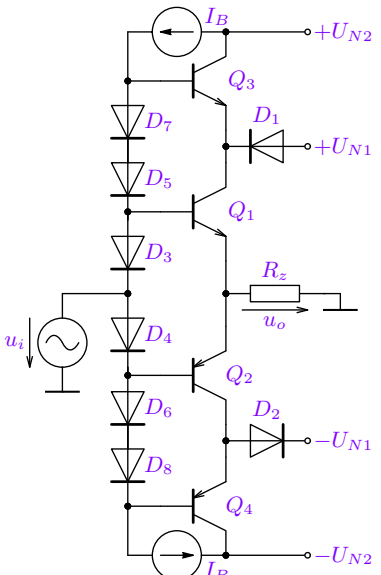
$$\eta = \frac{P_z}{P_N} \doteq \frac{16}{25} \doteq 63\,\% \quad \text{případně s využitím (16.105) jako: } \eta = \eta_{max}\frac{U_{om} + u_{CE_{min}}}{U_N}.$$

Pro určení maximálního rozptýlený výkonu pro dimenzování chladiče a maximální kolektorové ztráty tranzistoru lze vyžít vztahy (16.110) a (16.112), jelikož $m_c, m_0 < \frac{U_{om}+u_{CE_{min}}}{U_N}$:

$$P_{\theta_{max}} = \frac{U_N^2}{\pi^2 R_z} \doteq 5\,\mathrm{W}, \qquad P_{c_{max}} = \frac{1}{4}\frac{U_N^2}{R_z} \doteq 6\,\mathrm{W}.$$

Tranzistory musí být dimenzovány na $I_{c_{max}} \geq 3\,\mathrm{A}$ (dle I_{zm}), $U_{ce_{max}} \geq 30\,\mathrm{V}$ (z $2U_N$) a $P_{c_{max}} > 6\,\mathrm{W}$.

16.17.4. Pracovní třída G, H



Obrázek 16.75: Ideové zapojení koncového stupně třídy G.

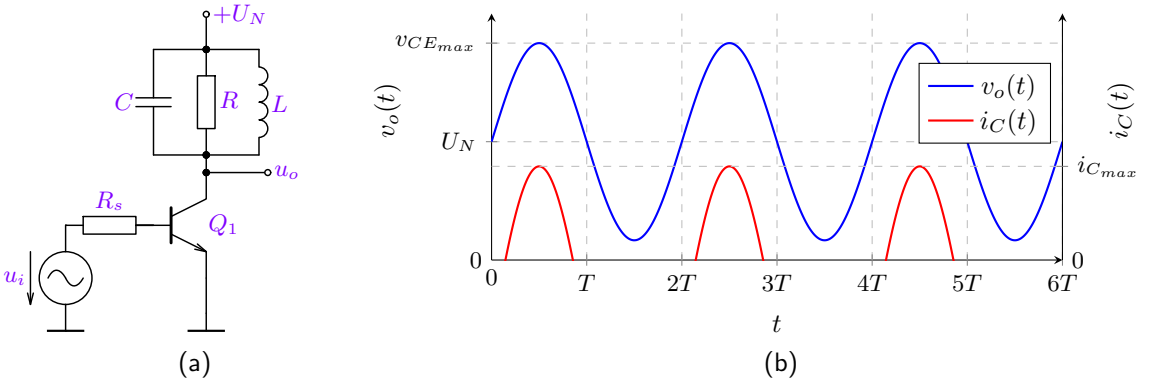
Z uvedeného energetického rozboru třídy B je zřejmé, že nejvyšší účinnost této konfigurace je v případě plného vybuzení. Pokud však zesilovač zpracovává různé velikosti vstupního napětí (např. hudbu s velkým dynamickým rozsahem), je pak účinnost koncového stupně ve třídě B, resp. AB nízká díky tomu, že úroveň výstupního signálu je většinou malá oproti napájecímu napětí U_N, které však musí být dimenzováno na plný výkon.

Řešením může být změna velikosti napájecího napětí U_N na základě velikosti buzení. To lze realizovat buď ve dvou úrovních – tzv. **třída G**, viz. obrázek 16.75 nebo ve více úrovních, případně plynule měnitelnou velikostí – tzv. **třída H**. Je zřejmé, že změna velikosti napájecího napětí musí na změnu velikosti signálu reagovat velmi rychle, aby na výstupu nedocházelo krátkodobému omezení signálu a tím k jeho zkreslení.

Zapojení koncového stupně lze realizovat i v zapojením SE, resp. SS, které se používá v případě, kdy při plném vybuzení mají být úbytky napětí na koncových tranzistorech minimální ($U_{om} \doteq U_N$) bez zvláštního napájení budicí části, použitého v zapojení 16.73. Energetická bilance se prakticky nemění, ale mění se zapojení budicí části (tzv. zesilovače „rail-to-rail output“), viz další kapitolu.

16.17.5. Pracovní třída C

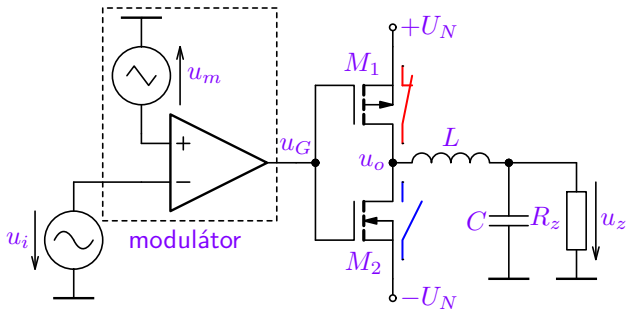
Koncový stupeň pracující ve třídě C je používá ve specifických případech. Tranzistor dle obrázku 16.68 nepracuje v lineární oblasti a pro přenos nezkresleného harmonického signálu na výstupu je nutné odfiltrovat vyšší harmonické spektra. Používá se v úzkopásmových zesilovačích, např. vf vysílačů, kde je zátěží paralelní rezonanční obvod, který je buzen na rezonančním kmitočtu, resp. v jeho okolí. Je nutné dostatečně dimenzovat kolektorové napětí, jelikož $u_{CE_{max}} = U_N + U_{om}$, jak ukazuje časový průběh $u_o(t)$. Viz. také analýzu a komentář.



Obrázek 16.76: Ideové zapojení koncového stupně třídy C (a) a časové průběhy výstupního napětí a kolektorového proudu tranzistoru při harmonickém u_i na rezonančním kmitočtu s nulovou nebo zápornou DC složkou.

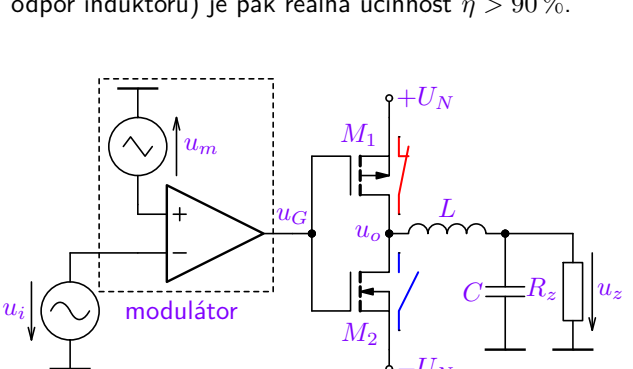
16.17.6. Pracovní třída D

Zvláštní kategorii koncového stupně představují tzv. „digitální zesilovače“, jejichž principiální uspořádání je uvedeno níže. Charakteristickým znakem této kategorie je řízení koncových tranzistorů tak, aby pracovaly ve spínacím režimu, tj. jako spínače – buď plně otevřené nebo uzavřené, jak je na obrázku naznačeno. V ideálním případě se pak na nich neztrácí žádný výkon (buď je na nich nulové napětí nebo jimi teče nulový proud). V tomto případě pracují koncové tranzistory v zapojení SS, nicméně rozhodující je jejich řízení. Řídící signál $u_G(t)$ nekopíruje časový průběh vstupního signálu, ale je to v zásadě dvouúrovňový signál, jehož úkolem je periodicky spínat koncové tranzistory M_1 a M_2 (vždy jeden sepnut a jeden rozepnut). Signál $u_G(t)$ je výstupem modulátoru, který převádí velikost vstupního signálu $u_i(t)$ na střídu digitálního signálu $u_G(t)$. Modulátor tomto případě obsahuje komparátor porovnávající vstupní signál $u_i(t)$ s modulačním signálem trojúhelníkového průběhu $u_m(t)$, čímž vzniká pulzně šířkově modulovaný (PWM) signál $u_G(t)$, resp. invertovaný „výkonový“ signál $u_o(t)$. Analogový výstupní signál $u_z(t)$ je pak získán filtrací signálu $u_o(t)$ filtrem typu dolní propust. Ten je realizován jako LC většinou 2. řádu. Pro správnou funkci musí být kmitočet modulačního signálu $f_m \gg f_i$. Časové průběhy vybraných obvodových veličin jsou ukázány dále na obrázku 16.78.

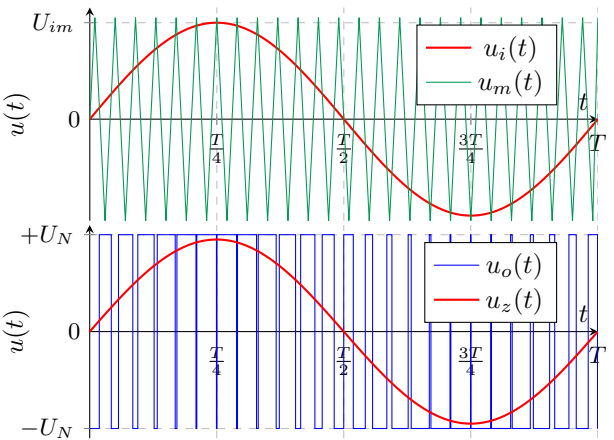


Obrázek 16.77: Principiální zapojení zesilovače ve třídě D.

Časové průběhy vybraných obvodových ukazují jak průběhy vstupních tak výstupních signálů, viz analýzu a komentář. Je zřejmé, koncové tranzistory obrací signál o π, tj. signál $u_o(t)$ je invertovaný signál $u_G(t)$, a proto je vstupní signál u_i připojen na invertující vstup komparátoru. Pokud jsou odpory tranzistorů v sepnutém stavu zanedbatelné vůči zátěži, dosahuje amplituda napětí u_o napájecího napětí $\pm U_N$ a při malých ztrátách filtru (sériový odpor induktoru) je pak reálná účinnost $\eta > 90\,\%$.



(a)

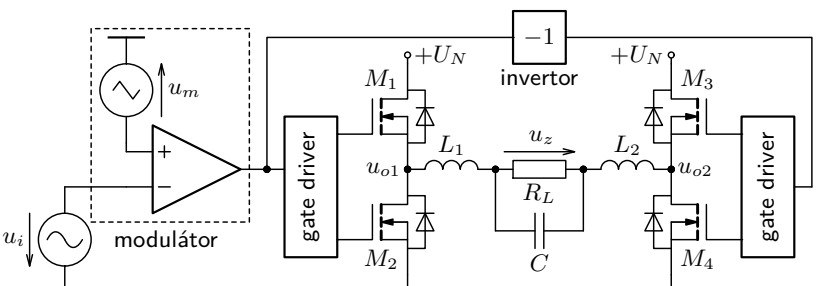


(b)

Obrázek 16.78: Principiální zapojení zesilovače ve třídě D (a) a časové průběhy vybraných obvodových veličin (b).

Můstkové zapojení koncového stupně

V případě nesymetrického napájecího napětí se často používá (místo výstupního kapacitoru) můstkové zapojení zesilovače, které pro stejnou velikost nesymetrického napětí umožňuje dodat do zátěže prakticky shodný výkon jako zapojení se symetrickým (dvojnásobným) napájením a uzemněnou zátěží. To platí jak pro třídu B, tak D. Jsou však třeba dva koncové stupně řízené inverzně, viz následující zapojení.



Obrázek 16.79: Můstkové zapojení zesilovače třídy D.

V uvedeném zapojení obsahuje koncový stupeň obsahuje tranzistory typu N-kanál, které mají lepší vlastnosti (menší sériový odpor) než tranzistory s P-kanálem díky $\mu_n > \mu_p$, viz (13.13). Pak je však nutné použít v řídícím obvodu speciální zapojení (většinou s tzv. „bootstrapovým“ kapacitorem). Diody chrání tranzistory před přepěťovými špičkami vznikajícími v LC filtru při vypínání tranzistorů.

Pro snížení zkreslení (kapitola 6.2.1) je třeba dodržet velmi dobrou linearitu trojúhelníkového signálu, použít jiné modulátory (většinou $\Sigma\Delta$) a zejména zavést zápornou zpětnou vazbu z výstupu u_o díky fázovému posunu filtru, který se většinou při malých výkonech nepoužívá. Více viz dodatek L, práci zde a např. https://www.analog.com.

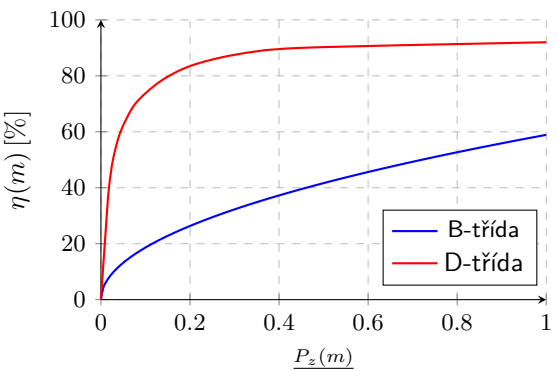
16.17.7. Porovnání vlastností pracovní třídy B vs. D

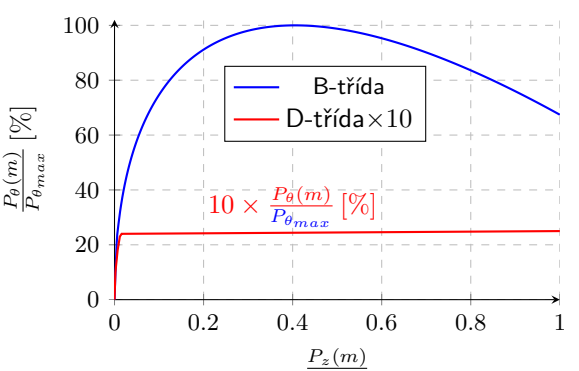
Základní vlastnosti třídy AB

- pracuje v lineárním režimu,
- max. reálná účinnost je cca 60 %, viz graf,
- vykazuje nízké rušení a šum, THD+N od 0,001%,
- zesílení nezávisí na V_N (dobré PSSR).

Základní vlastnosti třídy D

- pracuje ve spínaném režimu,
- max. účinnost je více jak 90 %, viz graf,
- spínání generuje rušení, THD+N cca od 0,01%,
- zesílení úměrné U_N (PSSR = 0 dB) bez ZZV.



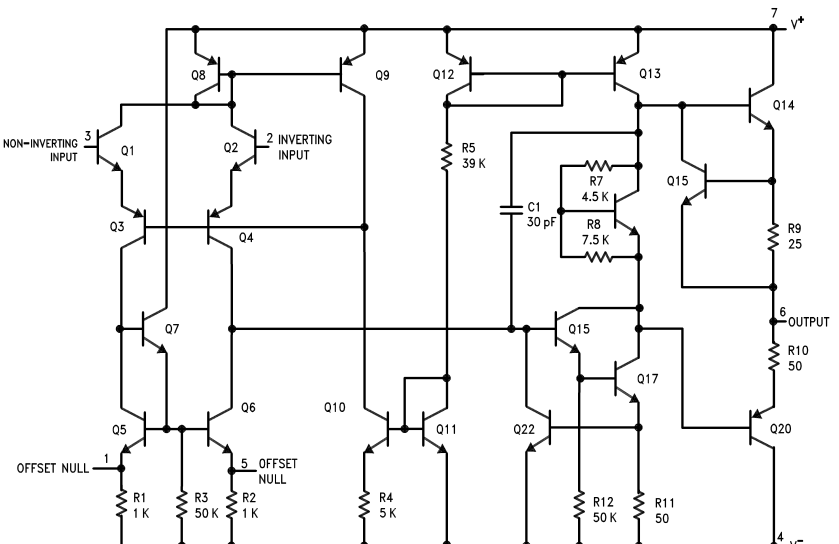


Obrázek 16.80: Typická závislost účinnosti a tepelných ztrát třídy B a D stejného výkonu na jeho relativní hodnotě.

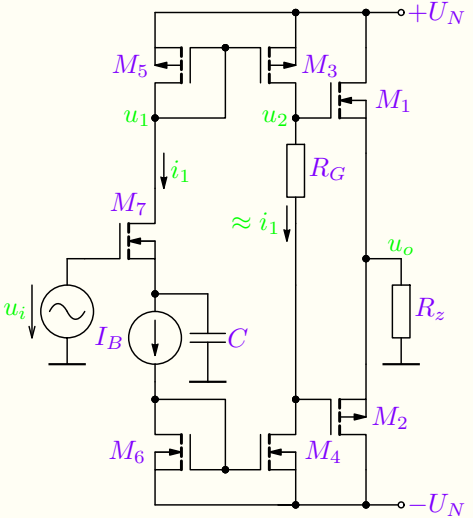
16.18. Struktury analogových IO – vnitřní zapojení OZ

V této části navážeme na výše uvedená zapojení a ukážeme řešení příkladu 16.7 s navazujícím cílem: navrhnout a analyzovat elementární zapojení vnitřní struktury operačního zesilovače. Všechny základní obvodové části pro sestavení vnitřní struktury zesilovače byla uvedena a nyní je využijeme.

Dále jsou pak komentovány části zapojení konkrétních typů operačních zesilovačů tak, abychom porozuměli jednotlivým zapojením a strukturám analogových integrovaných obvodů jako je např. zapojení známého typu OZ LM741 na obrázku vpravo.



Obrázek 16.81: Vnitřní zapojení konkrétního OZ typu LM741.

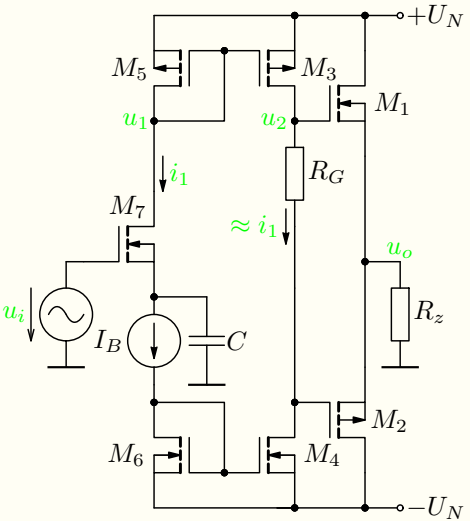


Obrázek 16.82: Transformace vstupního napětí u_i příkladu 16.7 na proud i_1 pomocí tranzistoru M_7.

Řešení příkladu 16.7: Zdroj napětí u_i (v původním schématu Vi) lze převést na proud i_1 pomocí dalšího tranzistoru M_7, jehož pracovní bod I_D je nastaven proudovým zdrojem $I_B = I_1$, čímž je nezávislý na stejnosměrné složce U_i (pokud tranzistory pracují v saturační oblasti)[a].

Aby však střídavá složka $i_1(t) \neq 0$ je třeba např. střídavě uzemnit source M_7 pomocí C ve SKP (zapojení SS). Pak je $i_1 = g_m u_i$ a vzhledem k tomu že tranzistor M_7 pracuje do zátěže $R_D = \frac{1}{g_m}$ tranzistoru M_5, je střídavá složka napětí $u_1 = -u_i$ (v původním schématu uzel (1)) pro shodné tranzistory $M_7 \equiv M_5$ (proud v pracovním bodě je shodný $I_{D_7} = I_{D_7} = I_B$). To samozřejmě odpovídá zesílení $A_{u1} = \frac{u_1}{u_i} = -1$ do uzlu u_1 dle (15.36).

[a] Značením i_1 míníme střídavou složku (ve schématu značeno zeleně), zatímco I_1 označuje složku stejnosměrnou, podobně jako u_i a U_i, přičemž $u_i + U_I = u_I$.

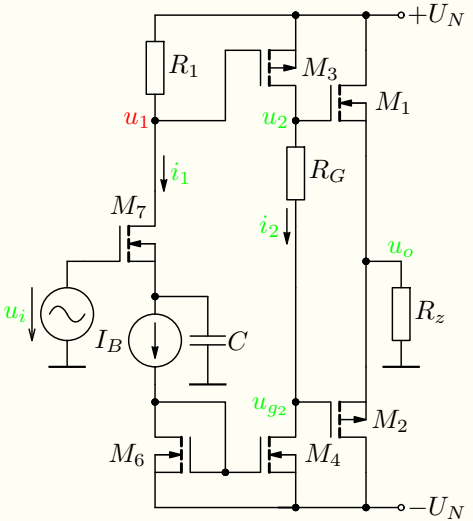


Obrázek 16.83: Transformace vstupního napětí u_i příkladu 16.7 na proud i_1 pomocí tranzistoru M_7.

$$A_{u1} = \frac{u_1}{u_i} = -g_{m_7}\frac{1}{g_{m_5}} = -1 \qquad (16.113)$$

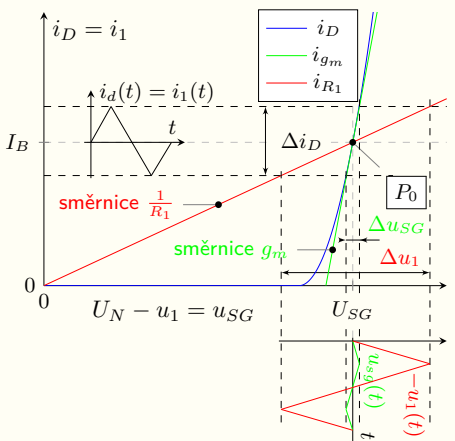
Napětím u_1 je buzen tranzistor M_3 opět v zapojení SS a střídavá složka jeho proudu je také $i_{d3} = g_{m_7}u_{sg_3} = -g_m u_1 = i_1$ jak je značeno ve schématu. Opět předpokládáme shodné tranzistory $M_5 \equiv M_3$, které zrcadlí proud $i_1 + I_1$. Pro nastavení pracovního bodu tranzistorů M_3, M_4 do saturační oblasti je dále nutné dodržet $M_6 \equiv M_4 \equiv M_3$, pak $I_{D_5} = I_{D_6} = I_{D_7} = I_B$, nicméně $I_{D_3} = I_{D_4} > I_B$ díky $\lambda > 0$ a $+U_N$, ale díky symetrii $U_o \doteq 0$.

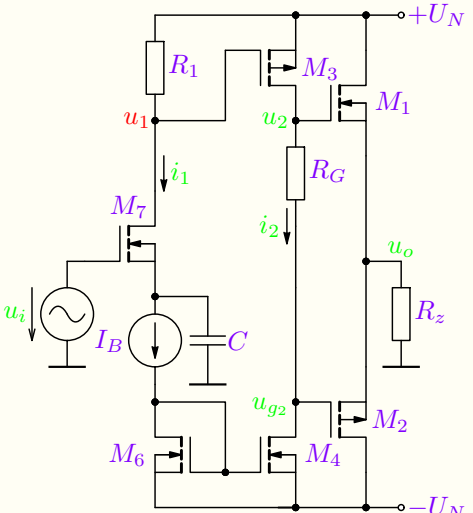
Jak bylo uvedeno, proud koncovými tranzistory je dán předpětím na rezistoru R_G a parametry tranzistorů. Ty může čtenář zjistit v analýze, kde si může ověřit všechny závěry a numerické výpočty: $I_{D_5} = I_{D_7} = I_B = 4{,}5\,\mathrm{mA}$, $g_{m_7} \doteq 17\,\mathrm{mS}$, $I_{D_3} \doteq 5{,}3\,\mathrm{mA}$, $g_{m_3} \doteq 18\,\mathrm{mS}$, $r_{o_3} = r_{o_4} = r_o \doteq 18\,\mathrm{k\Omega}$, $U_{R_G} \doteq 5{,}3\,\mathrm{V}$, $I_{D_1} = I_{D_2} \doteq 15\,\mathrm{mA}$, $g_{m_1} \doteq 68\,\mathrm{mS}$.



Obrázek 16.84: Využití rezistoru R_1 místo $1/g_m$ pro zvýšení zisku A_{v1} (napětí $u_1(t)$).

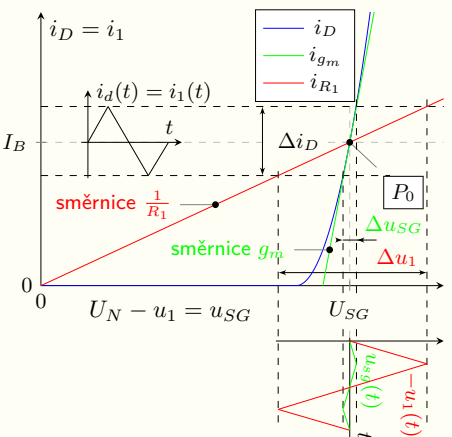
Pro zvýšení zesílení A_{u1} je výhodnější nahradit tranzistor M_5 rezistorem R_1, jehož hodnotu je nutné nastavit tak, aby se napětí U_{SG_3} v pracovním bodě nezměnilo U_{SG_3} a tím bylo dodrženo $I_2 = I_1$ (DC složky), viz obrázek níže a komentář.

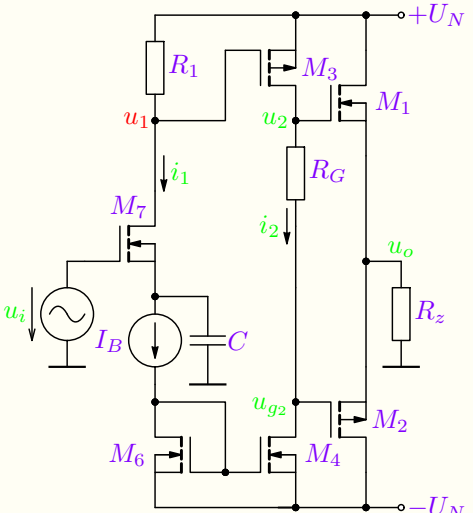




Obrázek 16.85: Využití rezistoru R_1 místo $1/g_m$ pro zvýšení zisku A_{v1} (napětí $u_1(t)$).

Náhradou R_1 místo M_5 se nemění DC složka $U_N - U_1 = U_{SG_5}$, tím $I_2 \approx I_1$, ale střídavá složka $i_2 > i_1$, vzhledem k $u_1 > u_{sg_5}$, tj. $\Delta u_1 > \Delta u_{SG}$, jelikož $R_1 > 1/g_{m_5}$ ($550\,\Omega > 65\,\Omega$), viz obrázek níže a potvrzení analýzou.





Obrázek 16.86: Využití rezistoru R_1 místo $1/g_m$ pro zvýšení zisku A_{v1} (napětí $u_1(t)$).

Nyní lze určit napěťová zesílení:

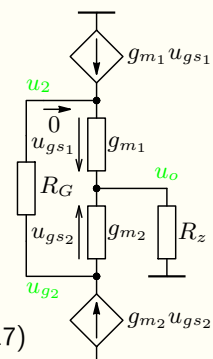
$$A_{u1} = \frac{u_1}{u_i} = -g_{m_7} R_1 \doteq -9. \qquad (16.114)$$

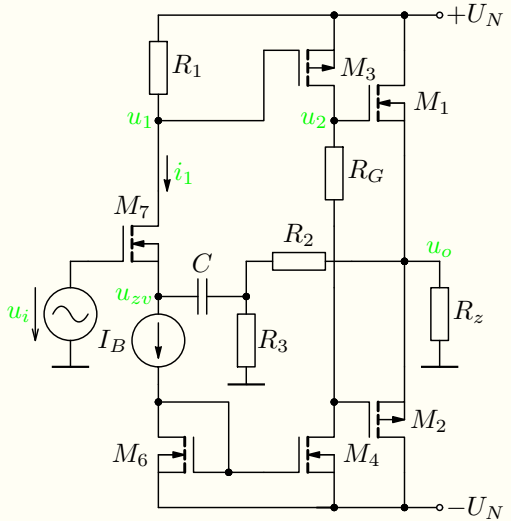
$$A_{u2} = \frac{u_2}{u_1} = -g_{m_3} \frac{r_o}{2} \doteq -170. \qquad (16.115)$$

$$A_{u3} = \frac{u_o}{u_2} = \frac{R_z}{R_z + \frac{1}{g_{m_1}+g_{m_2}}} \doteq 0{,}6. \qquad (16.116)$$

A_{u2} vychází ze zapojení SS s dynamickou zátěží $r_{o3}||r_{o4}$, stejně jako v případě (16.39) a A_{u3} je dáno linearizovaným náhradním zapojením koncového stupně pro malé změny obvodových veličin vpravo pro $r_{o3} = r_{o4} \gg R_G \rightarrow u_{R_G} \doteq 0$ a $u_{g2} \doteq u_2$, viz analýzu a komentář. Celkové zesílení je pak

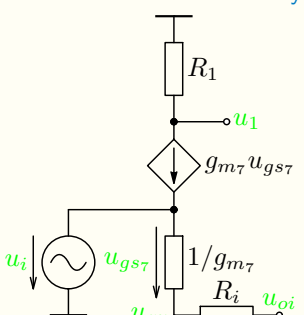
$$A_u = A_{u1} A_{u2} A_{u3} \doteq 850. \qquad (16.117)$$

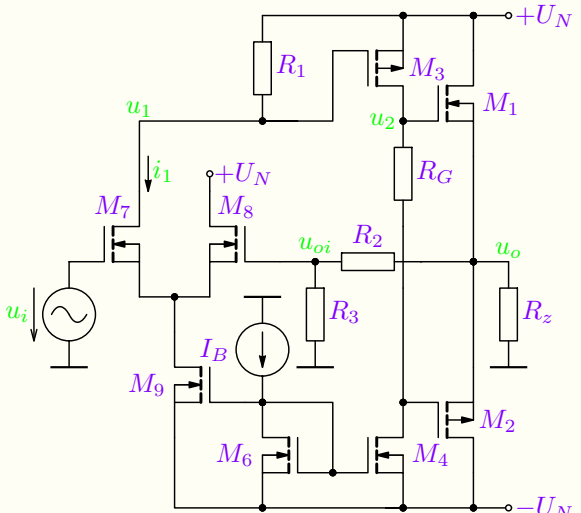




Obrázek 16.87: Zavedení zápornézpětné vazby).

Pro zavedení ZZV lze využít source M_7 a místo u_i se pak zesiluje napětí $u_g - u_s = u_i - u_{zv}$, viz linearizované schéma níže, kde u_{oi} a R_i jsou prvky náhradního Thevenimnova obvodu. Pokud platí $R_2 + R_3 \gg R_o$, kde $R_o = \frac{1}{g_{m_1} + g_{m_2}}$ je $u_{oi} \doteq \frac{u_o R_3}{R_2 + R_3}$ a $R_i \doteq R_2 || R_3$. Kapacitor C slouží pro DC oddělení - aby I_B netekl do R_3, ale definovaně nastavoval pracovní bod M_7 v širokém rozsahu DC složky U_i. Nicméně tento kapacitor je nepřípustný v případě implementace na čip, a je nutné se mu vyhnout. To uvádí další stránka včetně jednoduchého výpočtu celkového zesílení pomocí parameterů zpětné vazby.



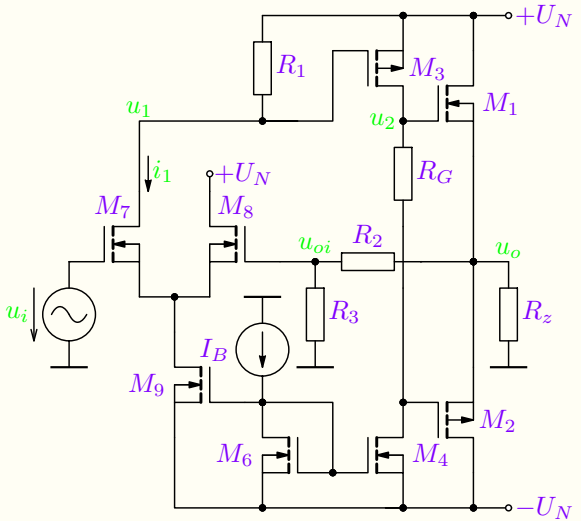


Obrázek 16.88: Řešení příkladu 16.7 s využitím rozdílového stupně, tvořeného tranzistory M_7, M_8.

Podstatně výhodnější zapojení pro zavedení ZZV je rozdílový stupeň, který vychází z myšlenky předchozího zapojení, kde R_3 je pro AC složku nahrazen $1/g_{m_8}$, ale I_B se dělí přesně na $1/2$ mezi $M_{7,8}$ (viz obrázek vlevo). Pro vysoké A_{u1} je zde naopak výhodné volit tranzistor M_8, který pro AC složku vykazuje menší odpor $(1/g_{m_8})$, než původně R_i, viz přednáška. Hodnoty R_2, R_3 lze pak volit téměř libovolně, jelikož pak závisí pouze na jejich poměru, pokud $R_2 + R_3 \gg R_o$. Zesílení bez ZV ($R_3 = 0$) je dáno vztahy (16.115) až (16.117), mění se pouze zesílení A_{u1}, které lze určit analogicky k (16.90), ale pro výstup na u_{o1}, tj. v našem případě a pro $M_7 \equiv M_8$, $M_9 \equiv M_6$ – pro vyšší zesílení je v MOS technologii výhodnější volit menší $I_{D_7} \doteq I_B/2$, jelikož $g_m = f(\sqrt{I_D})$ a tím vyšší R_1! Pak je:

$$A_{u1_d} = -\frac{g_{m_7} R_1}{2} \doteq -\frac{13\,\mathrm{mS} \cdot 944\,\Omega}{2} \doteq 6, \quad (16.118)$$

$$A_u = A_{u1_d} A_{u2} A_{u3} \doteq 600. \quad (16.119)$$



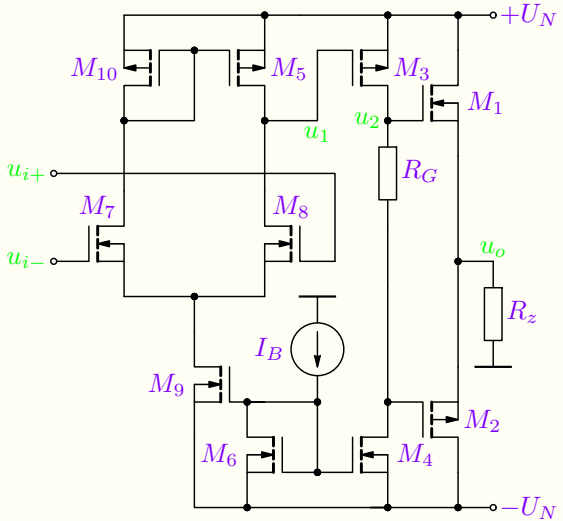
Obrázek 16.89: Řešení příkladu 16.7 s využitím rozdílového stupně, tvořeného tranzistory M_7, M_8.

Pro výpočet zesílení se zavedenou ZV lze s výhodou využít vztah (10.1), kde $A = A_u$ je dané vztahem (16.119) a $\beta = -\frac{R3}{R_2+R_3}$. Pokud má být výsledné zesílení nastaveno na

$$A' = 20 = \frac{A_u}{1-\beta A_u} \Rightarrow |\beta A_u| \gg 1, \quad A' \doteq -\frac{1}{\beta}. \tag{16.120}$$

Pak volíme např. $R_2 = 20\,\mathrm{k\Omega}$ a $R_3 = 1\,\mathrm{k\Omega}$.

Zavedením této silné ZV dojde také k výraznému snížení výstupního odporu (napěťová ZV) $R'_o = \frac{R_o}{F}$, kde $R_o = \frac{1}{g_{m_1}+g_{m_2}}$ je výstupní odpor zesilovače bez ZV a $F = 1 - \beta A \doteq 30$. To lze ověřit AC analýzou, která však také uvažuje linearizovaný obvod s hodnotami prvků danými pracovním bodem, tj. $I_{D_1} = I_{D_2} \doteq 15\,\mathrm{mA}$, $g_{m_1} = g_{m_2} \doteq 68\,\mathrm{mS}$, jak je uvedeno výše. Ve skutečnosti se hodnoty g_{m_1}, g_{m_2} mění výrazně se signálem a realitě pak více odpovídá časová (tranzientní) analýza. Vlivem ZV lze však tento efekt prakticky zanedbat.

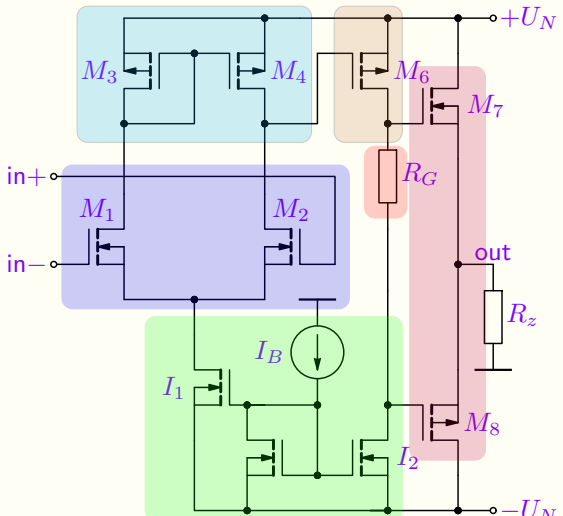


Obrázek 16.90: Elementární struktura operačního zesilovače vyplývající z řešení příkladu 16.7.

Uvedeným řešením jsme získali elementární strukturu zesilovače s rozdílovým vstupním dílem ($M_{7,8}$), tzv. rozkmitovým stupněm (M_3 s dynamickou zátěží M_4 a koncovým stupněm ($M_{1,2}$ pro malý výstupní odpor (napěťový výstup). Tuto koncepci lze použít pro konstrukci operačního zesilovače: vstupy jsou vyvedeny (pozor invertující vstup je nyní z M_7) a ZV zavádí uživatel (na obrázku 16.88 je použito neinvertující zapojení zesilovače). Je však nutné zvýšit napěťové zesílení. To lze jednoduše např. použitím dynamické zátěže vstupního rozdílového stupně ($M_{10,5}$). Při výše uvedeném nastavení ($g_{m7} = g_{m8} \doteq 13\,\mathrm{mS}$) a při $\lambda = 0{,}0125\,\mathrm{V}^{-1}$ je $r_{o8} = r_{o5} \doteq 31\,\mathrm{k\Omega}$. Pak dle 16.94 je:

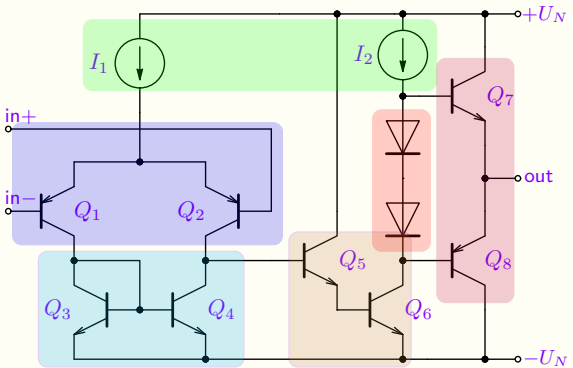
$$A_{u1_{dz}} = \frac{u_o}{u_{i+} - u_{i-}} = -g_{m_8}(r_{o5}||r_{o8}) \doteq -200, \tag{16.121}$$

$$A_u = A_{u1_{dz}} A_{u2} A_{u3} \doteq 21\,000. \tag{16.122}$$



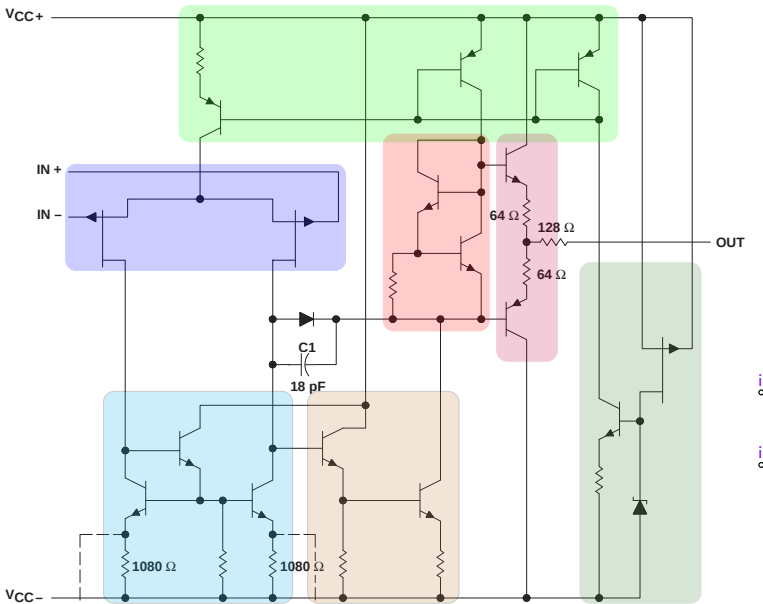
Obrázek 16.91: Elementární struktura operačního zesilovače s FET vyplývající z příkladu 16.7.

Výsledné řešení struktury zesilovače lze použít i při implementaci s bipolárními tranzistory. Analýza struktury je pak analogická (viz dále), ale výpočet pro struktury s FET je jednodušší díky $i_G = 0$.

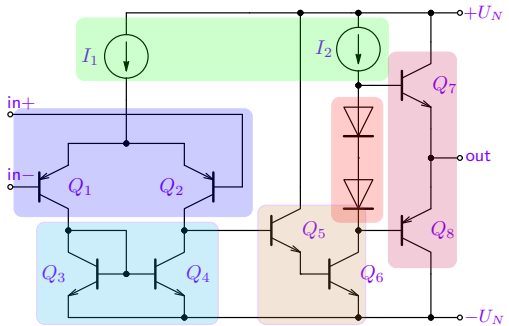


Obrázek 16.92: Elementární struktura operačního zesilovače s bipolárními tranzistory.

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL



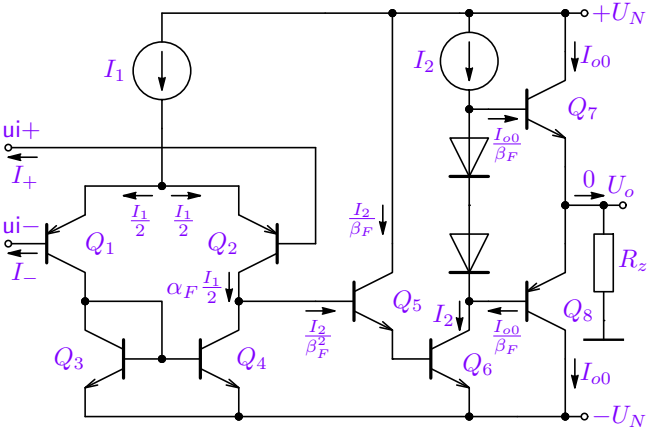
Strukturu vytvořeného zapojení lze porovnat se zapojením OZ TL071 a rozdělit ji na rozdílový stupeň s dynamickou zátěží, následovaný stupněm SC-SE s dynamickou zátěží (I_2) a koncovým stupněm s předpětím pro minimalizaci přechodového zkreslení. Proudové zdroje I_2, I_2 jsou realizovány dvojnásobným proudovým zrcadlem buzeným proudovým zdrojem. Více viz přednáška.



Obrázek 16.93: Vnitřní schéma OZ typu TL071 a jeho principiální zapojení s BJT.

16.18.1. Nastavení pracovního bodu

Pro výpočet zesílení je třeba znát pracovní body tranzistorů. Ty jsou dány proudovými zdroji I_1, I_2 a nastavením předpětí koncových tranzistorů. Jejich hodnoty lze jednoduše určit ze vstupních parametrů. Nechť je zadáno:



Obrázek 16.94: Elementární struktura operačního zesilovače s bipolárními tranzistory a označením DC proudů pro nastavení pracovního bodu.

- vstupní proudy: $I_+ = I_- = I_i = 80\,\mathrm{nA}$,
- max. výstupní proud: $I_{o_{max}} = I_{z_{max}} = 20\,\mathrm{mA}$,
- parametry BJTs: $\beta_F = \beta = 80$, $U_A = 100\,\mathrm{V}$,
- jmenovitá zátěž: $R_z = 2\,\mathrm{k\Omega}$.

Při zanedbání $\alpha_F \to 1$ pro platí jednotlivé proudy a parametry lineárních modelů tranzistorů:

$$I_1 \doteq 2\beta_F I_i \doteq 13\,\mu\mathrm{A} \quad \Rightarrow$$

$$g_{m_2} \doteq 250\,\mu\mathrm{S},\ r_{\pi_1} \doteq 300\mathrm{k\Omega},\ r_{o_2} = r_{o_4} \doteq 16\,\mathrm{M\Omega},$$

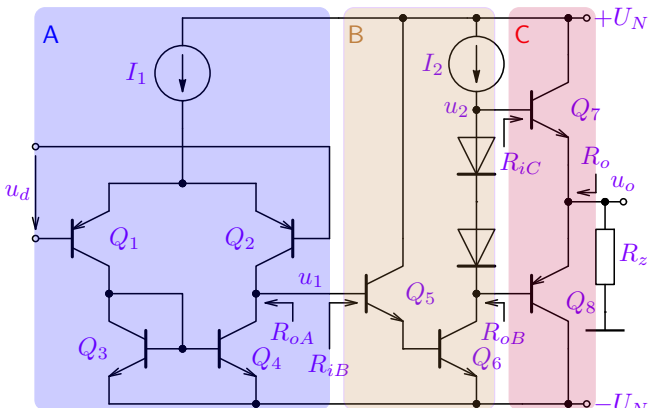
$$I_2 \doteq \frac{I_{o_{max}}}{\beta_F} \doteq 250\,\mu\mathrm{A}, \quad \Rightarrow \quad g_{m_6} \doteq 10\,\mathrm{mS},$$

$$r_{\pi_5} \doteq \beta r_{\pi_6} \doteq 640\,\mathrm{k\Omega},\ r_{o_6} \doteq 400\,\mathrm{k\Omega}.$$

Dále volíme výstupní odpor proudového zdroje I_2 stejně jako $r_{o_6} = r_{o_{I2}}$ a klidový proud koncovými tranzistory $I_{o0} \approx I_2 \ \Rightarrow \ r_{e_7} = r_{e_8} \doteq 100\,\Omega$.

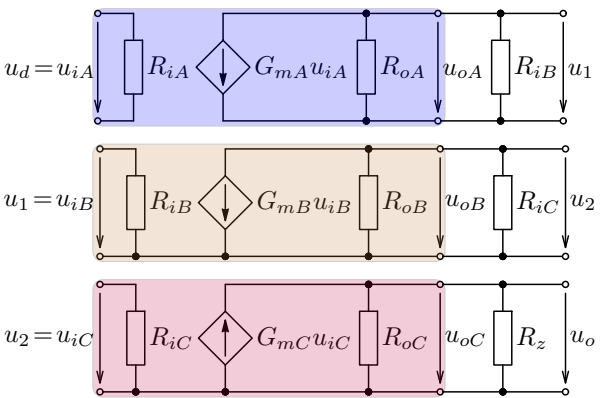
16.18.2. Napěťové zesílení – metoda dělení řetězce

Nyní lze určit AC parametry (změny obvodových veličin v okolí pracovního bodu). Ty určíme podobně jako v předchozím příkladu, nicméně zde je třeba vzít v úvahu zatížení jednotlivých částí (vstupní a výstupní odpory).



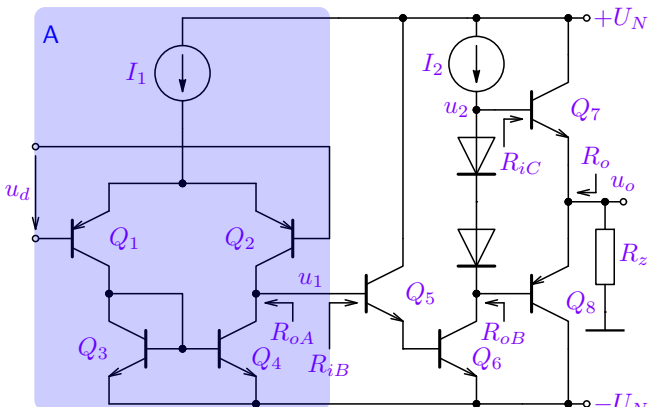
Obrázek 16.95: Elementární struktura operačního zesilovače s a označením jednotlivých stupňů pro výpočet A_u.

Každý z uvedených zesilovacích stupňů lze pak modelovat níže uvedeným linearizovaným zapojením s parametry, které dále určíme.

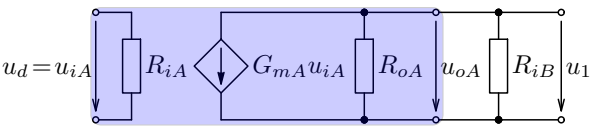


Parametry vstupního rozdílového stupně (A)

První stupeň je rozdílový zesilovač s dynamickou zátěží, kde vstupní odpor pro rozdílový signál R_{iA} je dán vztahem (16.81) a rozdílové zesílení A_{u1} vztahem (16.94).



Obrázek 16.96: Elementární struktura operačního zesilovače s a označením jednotlivých stupňů pro výpočet A_{u1}.



Pro výpočet A_{u1} je však nutné uvažovat jak výstupní odpor R_{oA}, tak zátěž stupně A danou vstupním odporem $R_{iB} = 2r_{\pi_5}$ stupně B dle (16.58).

$$R_{iA} = r_{\pi_1} + r_{\pi_2} \doteq 600\,\mathrm{k\Omega}, \tag{16.123}$$

$$R_{oA} = r_{o_2} || r_{o_4} \doteq 8\,\mathrm{M\Omega},\ R_{i_B} = 2r_{\pi_5} \doteq 1{,}3\,\mathrm{M\Omega},$$

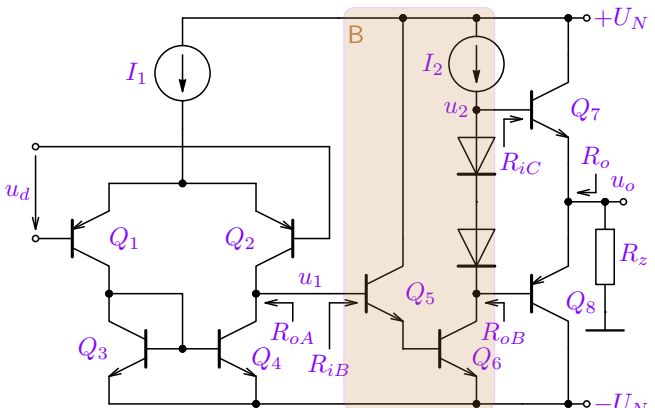
$$G_{mA}u_d = g_{m_2}\frac{u_d}{2} + g_{m_4}\frac{u_d}{2},$$

$$G_{mA} = \frac{g_{m_2} + g_{m_4}}{2} = g_{m_2} \doteq 250\,\mu\mathrm{S},$$

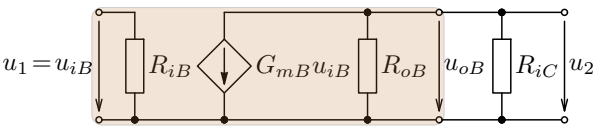
$$A_{u1} = \frac{u_1}{u_d} = -G_{mA}(R_{oA} || R_{iB}) \doteq -280. \tag{16.124}$$

Parametry rozkmitového stupně (B)

Druhý stupeň tvoří zapojení SC-SE s dynamickou zátěží I_2, resp. jeho vnitřním odporem $r_{oI2} = r_{o_6}$. Vstupní odpor R_{iB} byl určen výše, napěťové zesílení A_{u2} je pak dáno vztahem (16.59).



Obrázek 16.97: Elementární struktura operačního zesilovače s a označením jednotlivých stupňů pro výpočet A_{u2}.

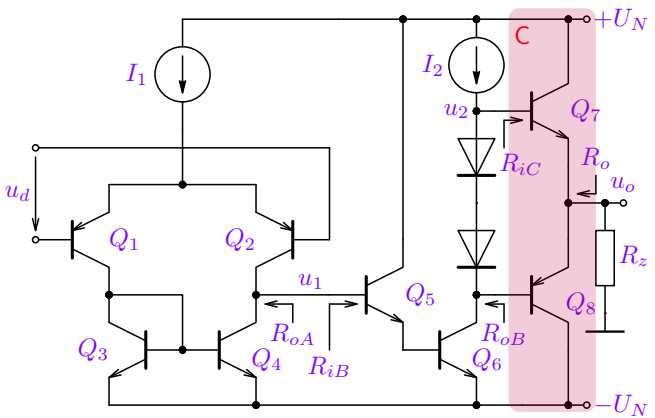


Opět nejprve vyčíslíme zatěžovací odpory, tj. výstupní odpor R_{oB} stupně B a vstupní odpor R_{iC} koncového stupně (viz stranu XVI-109 a přednášku). Pak lze určit vlastní napěťový zisk A_{u2}:

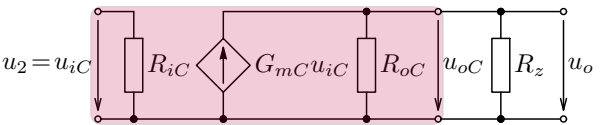
$$R_{oB} = r_{o_6} || r_{oI2} \doteq 200\,\mathrm{k\Omega},$$
$$R_{i_C} = (\beta+1)(r_{e_7} || r_{e_8} + R_z) \doteq \beta(R_z) \doteq 160\,\mathrm{k\Omega},$$
$$G_{mB} = \frac{g_{m_6}}{2} \doteq 5\,\mathrm{mS},$$
$$A_{u2} = \frac{u_2}{u_1} = -G_{mB}(R_{o_B} || R_{i_C}) \doteq -445. \qquad (16.125)$$

Parametry koncového stupně (C)

Třetí stupeň tvoří zapojení koncového stupně (komplementární zapojení SC). Jeho vstupní odpor byl určen výše, napěťové zesílení A_{u3} je pak dáno vztahem (16.116). Viz také zapojení a měření výkonového zesilovače J.



Obrázek 16.98: Elementární struktura operačního zesilovače s a označením jednotlivých stupňů pro výpočet A_{u3}.



Vyčíslíme výstupní odpor R_{oC} koncového stupně, zesílení $A_{u3}\,(>0)$ a nakonec celkový zisk A_u:

$$R_{o_C} = r_{e_7} || r_{e_8} = \frac{\alpha_F}{g_{m_7} + g_{m_8}} = \frac{1}{G_{mC}} \doteq 50\,\Omega,$$

$$A_{u3} = \frac{u_o}{u_2} = \frac{R_z}{R_z + R_{oC}} = G_{mC}(R_{oC} || R_z) \doteq 1,$$

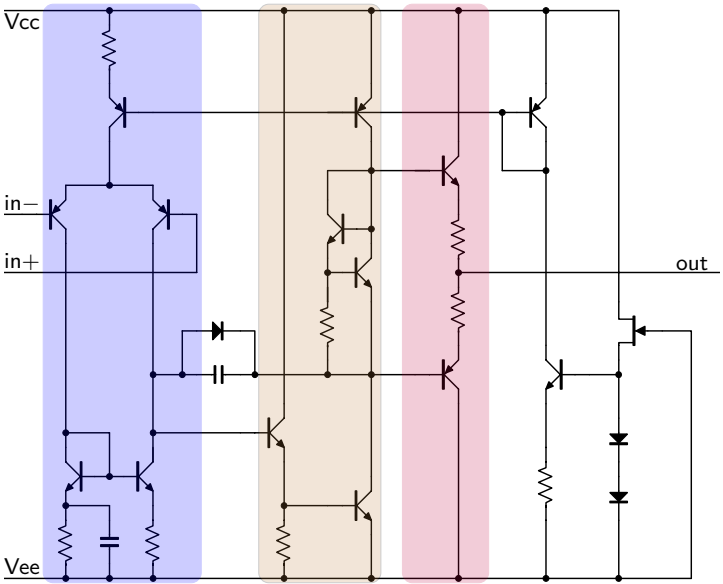
$$A_u = A_{u1} A_{u2} A_{u3} \doteq 125\,000. \qquad (16.126)$$

Pro $R_z \to \infty$ je i $R_{iC} \to \infty$ a tím roste A_{u_2} i A_u:

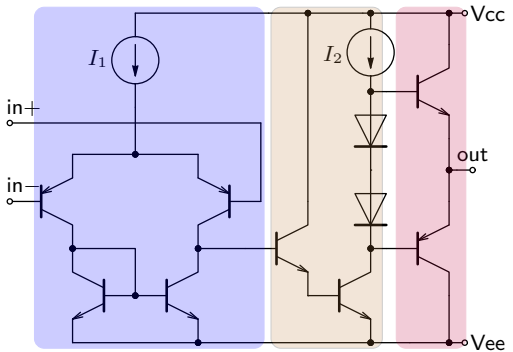
$$A_{u2}|_{R_z \to \infty} = -G_{mB} R_{oB} \doteq -1\,000,\ A_{u\infty} \doteq 280\,000.$$

Lze určit i výstupní odpor zesilovače podobně jako (16.68): $R_o = \frac{R_{oB}}{\beta+1} + \frac{1}{g_{m7}+g_{m8}} \doteq 2{,}5\,\mathrm{k\Omega}$. Pak $A_{u\infty} \frac{R_z}{R_o + R_z} = A_u$.

Vnitřní struktura operačního zesilovače NJM4580



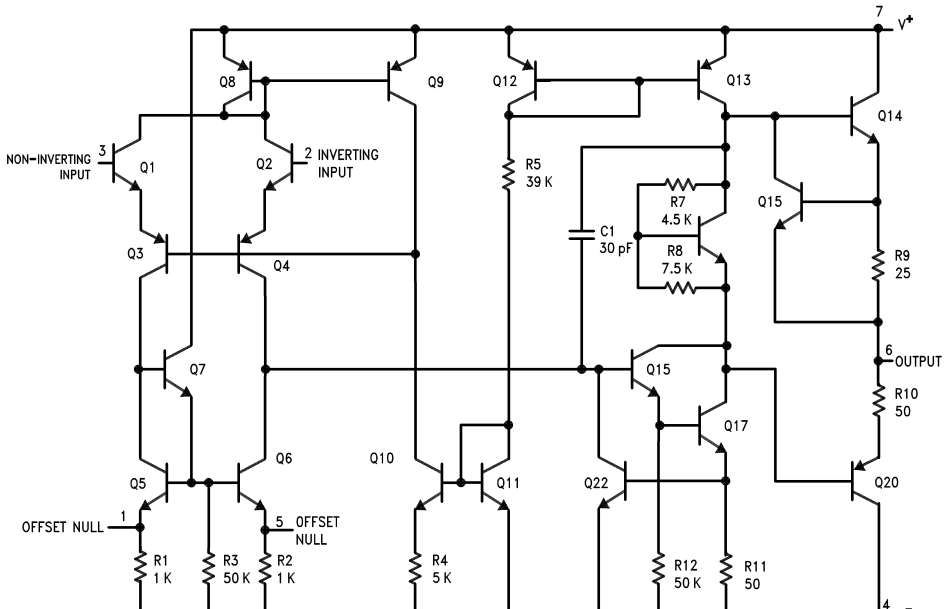
Srovnej uvedené zapojení a jeho parametry s OZ TL071 na obrázku 16.93 a s analyzovaným principiálním zapojením OZ s BJT.



Dále jsou uvedeny vybrané známé struktury OZ s uvedením jejich základních vlastností. Komentář viz přednáška.

Obrázek 16.99: Vnitřní zapojení OZ NJM4580: $A_0 \approx 300 \cdot 10^3$, $U_{os} \approx 0{,}3\,\mathrm{mV}$, $\mathrm{CMRR} \approx 100\,\mathrm{dB}$, $I_{in} \approx 100\,\mathrm{nA}$, $f_t \approx 15\,\mathrm{MHz}$, $S \approx 5\,\mathrm{V/\mu s}$, $I_{cc} \approx 6\,\mathrm{mA}$, převzato z datasheetu.

Vnitřní struktura operačního zesilovače LM741

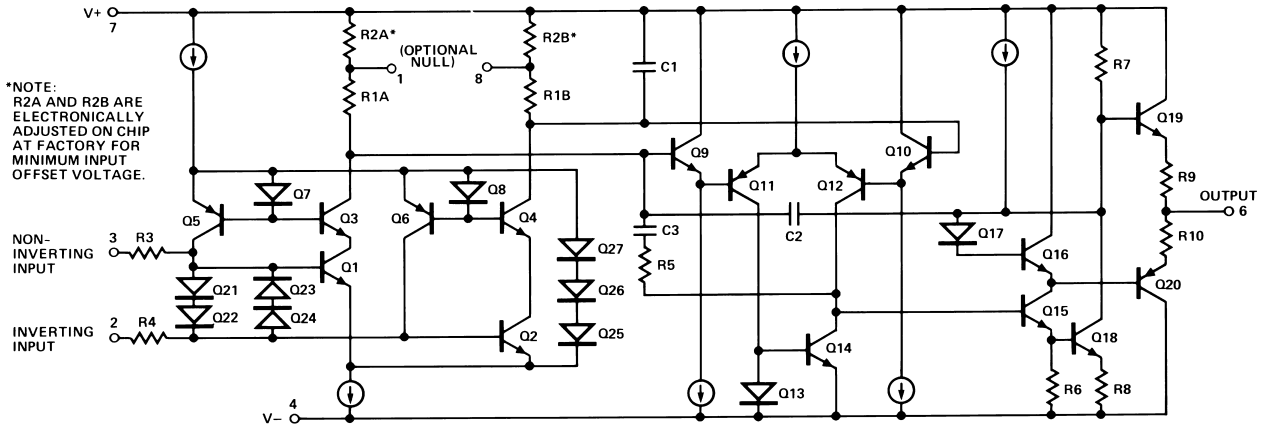


Podobná struktura OZ, ale se vstupními tranzistory NPN a zapojením pro minimalizaci Millerovy kapacity a průrazu přechodu BE. Komentář včetně nastavení P_0 viz přednáška.

$$
\begin{aligned}
A_0 &\approx 200 \cdot 10^3 \\
U_{os} &\approx 1\,\mathrm{mV} \\
\mathrm{CMRR} &\approx 90\,\mathrm{dB} \\
I_{in} &\approx 80\,\mathrm{nA} \\
f_t &\approx 1\,\mathrm{MHz} \\
R_{id} &= 1\,\mathrm{M\Omega} \\
I_{cc} &\approx 2\,\mathrm{mA}
\end{aligned}
$$

převzato z datasheetu.

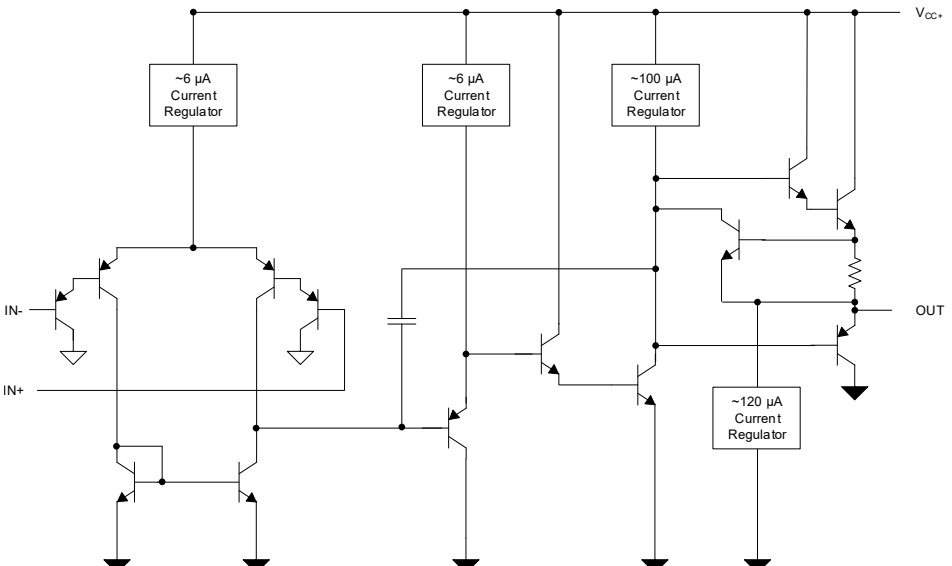
Vnitřní struktura operačního zesilovače OP07



Obrázek 16.100: Vnitřní zapojení BJT OZ typu OP07 (27, 37) s kompenzací vstupních proudů a s použitím „dvojnásobného“ rozdílového zesilovače pro zvýšení CMRR. První stupeň plně symetrický pro malou U_{os} a v kaskodovém zapojení pro minimalizaci Millerovy kapacity, více viz přednáška.

Vybrané parametry: $A_0 \approx 400 \cdot 10^3$, $U_{os} \approx 30\,\mu\mathrm{V}$, CMRR $\approx 120\,\mathrm{dB}$, $I_{in} \approx 1{,}2\,\mathrm{nA}$ $f_t \approx 0{,}6\,\mathrm{MHz}$, $R_{id} \approx 50\,\mathrm{M\Omega}$, $I_{cc} \approx 2\,\mathrm{mA}$, převzato z datasheetu AD, nebo alternace TI, případně OP27.

Vnitřní struktura operačního zesilovače LM358



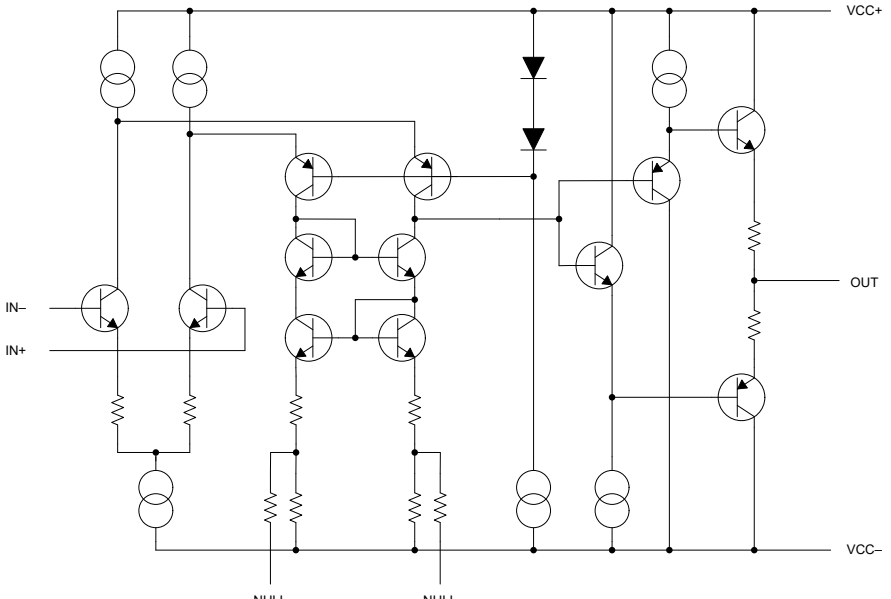
Struktura jednoduchého „průmyslového“ OZ pro nesymetrické napájení (lze použít pro souhlasnou složku $U_s = 0$), komentář viz přednáška.

Vybrané parametry:

$$A_0 \approx 100 \cdot 10^3$$
$$U_{os} \approx 2\,\mathrm{mV}$$
$$\mathrm{CMRR} \approx 85\,\mathrm{dB}$$
$$I_{in} \approx 50\,\mathrm{nA}$$
$$f_t \approx 1\,\mathrm{MHz}$$
$$I_{cc} \approx 1\,\mathrm{mA}$$

převzato z datasheetu.

Zjednodušená struktura operačního zesilovače OPAx891



Nízkošumový audio OZ s velmi malým harmonickým zkreslením, velkou šířkou pásma a rychlostí přeběhu, viz také kapitolu 16.15, případně OZ LME49720.

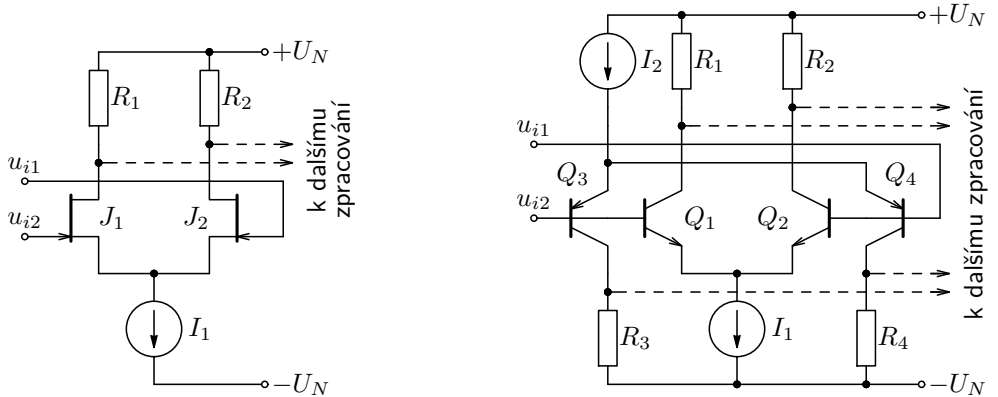
Vybrané parametry:

$$
\begin{aligned}
U_{os} &\approx 0{,}2\,\mathrm{mV} \\
A_0 &\approx 100\,\mathrm{dB} \\
f_t &\approx 180\,\mathrm{MHz} \\
\mathrm{SR} &\approx 100\,\mathrm{V/\mu s} \\
\mathrm{THD+N} &\approx -130\,\mathrm{dB} \\
U_n &\approx 0{,}95\,\mathrm{nV/\sqrt{Hz}} \\
I_{in} &\approx 10\,\mu\mathrm{A} \\
I_{cc} &\approx 8\,\mathrm{mA} \\
I_{out} &\leq 200\,\mathrm{mA}
\end{aligned}
$$

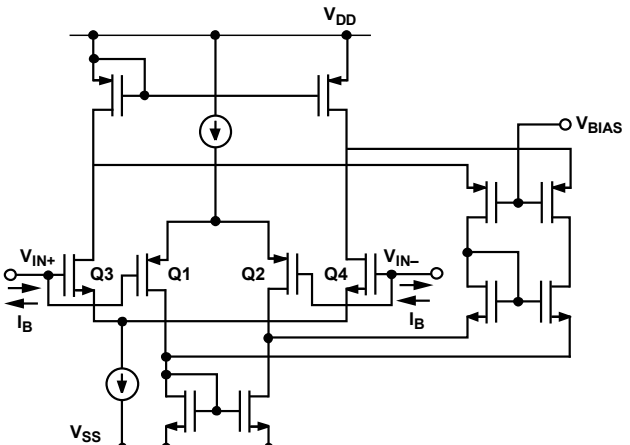
převzato z datasheetu.

Vstupní část OZ s možností zpracování $u_i \in \langle -U_N, +U_N \rangle$ – Rail-to-Rail Input

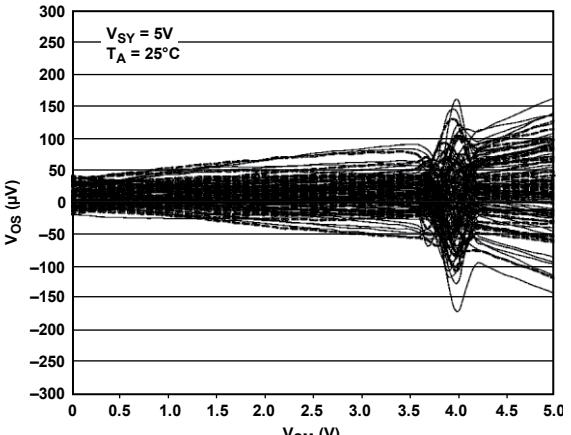
Zde jsou uvedeny další možnosti řešení: s tranzistory JFET, kde $U_{GS} < 0$ a tím lze zpracovat signál $U_i = -U_N$ při nenulovém DC napětí na I_1, případně „komplementátním“ zapojením (b), kde napětí u_i blízké $+U_N$ jsou zpracovány Q_1, Q_2 a pro $U_i \approx -U_N$ naopak Q_3, Q_4. Zapojení dalšího stupně viz dále (obrázek 16.104).



Obrázek 16.101: Zapojení vstupní části pro zpracování souhlasného signálu až do $-U_N$ (a) a v celém rozsahu napájecího napětí (b).

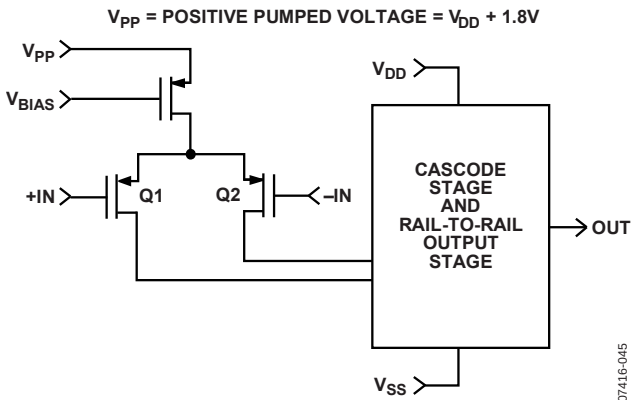


(a)

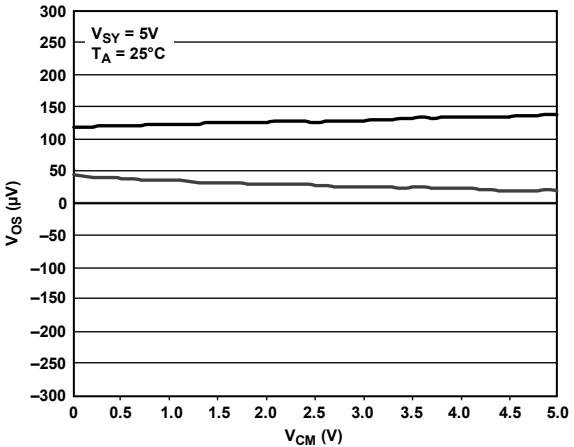


(b)

Obrázek 16.102: Typické zapojení vstupní části tzv. „Rail-to-Rail Input“ operačního zesilovače s komplementárním rozdílovým stupněm realizovaným MOS tranzistory (a) s navázáním kaskododou podobně jako 16.64 a typické závislosti napěťové nesymetrie na vstupním souhlasném napětí (b), převzato z www.analog.com.



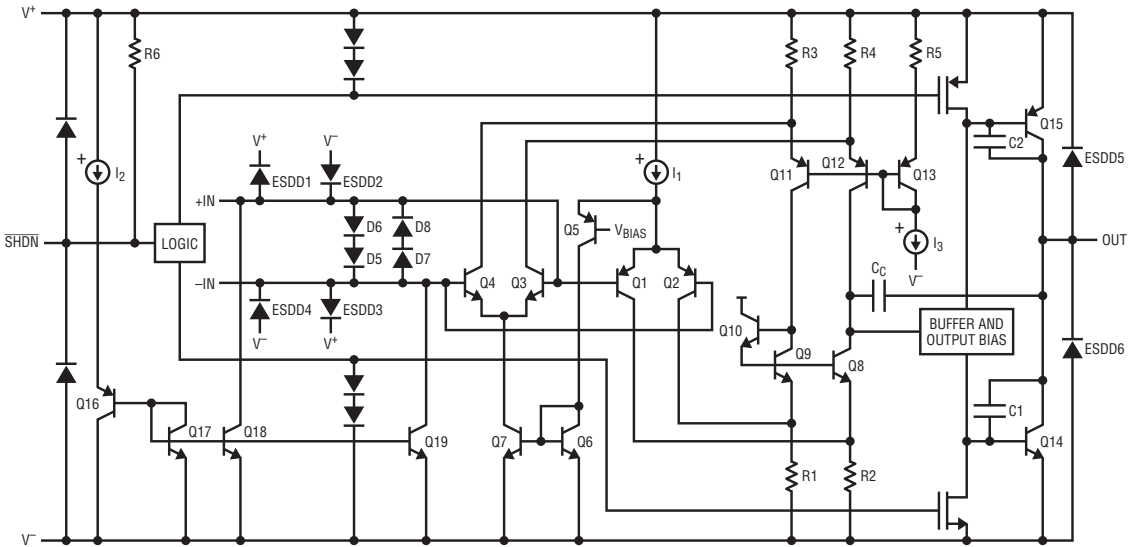
(a)



(b)

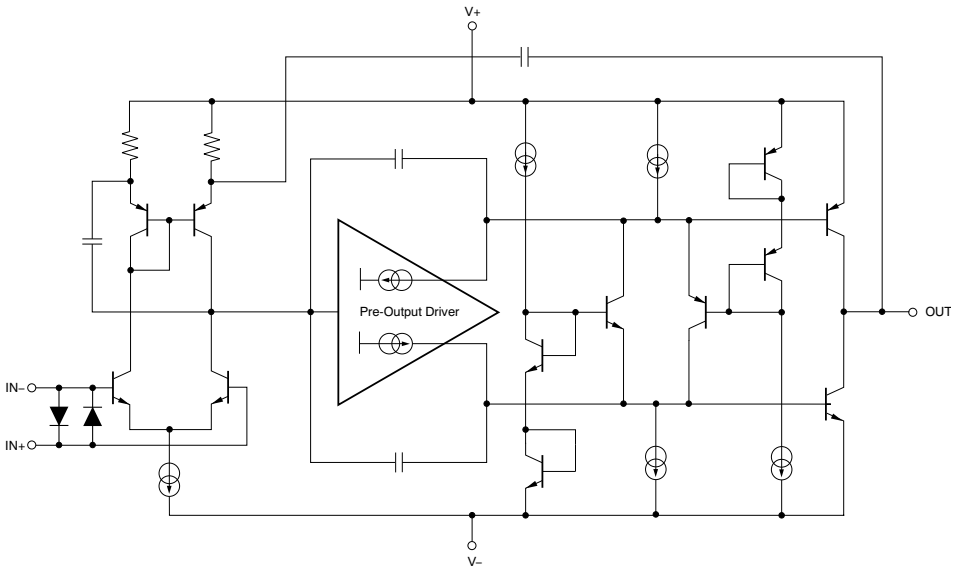
Obrázek 16.103: Zapojení vstupní části obvodu ADA4505 se vstupní částí tzv. „Rail-to-Rail Input“ napájeným nábojovou pumpou, kde $V_{pp} > V_{DD}$ – viz obrázek (a) a typické hranice závislosti napěťové nesymetrie na vstupním souhlasném napětí (b), viz datasheet.

Vnitřní struktura operačního zesilovače LTC6258 typu „Rail-to-Rail Input/Output“



Obrázek 16.104: Zapojení OZ LTC6258, vybrané parametry: $A_0 \approx 10 \cdot 10^3|_{R_z=10\,\mathrm{k\Omega}}$, $U_{os} \approx 400\,\mu\mathrm{V}$, CMRR $\approx$ $95\,\mathrm{dB}$, $I_{in} \approx 75\,\mathrm{nA}$, $f_t \approx 1{,}3\,\mathrm{MHz}$, $V_{cc} \in \langle 1{,}8\,..\,5{,}25\rangle\,\mathrm{V}$, $I_{cc} \approx 20\,\mu\mathrm{A}$, (5 µA shutdown), viz. datasheet.

Zjednodušená struktura operačního zesilovače OPA1611 typu „Rail-to-Rail Output“

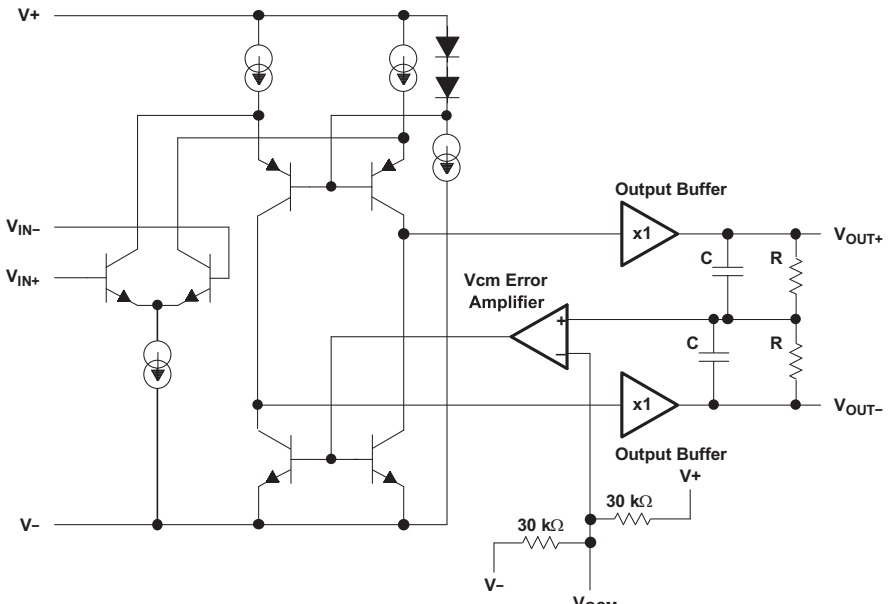


Struktura audio-OZ LTC6258 se zapojením budičů koncových tranzistorů (SE, tj. výstup „Rail-to-Rail“) a vybrané parametry.

$$A_0 \approx 130\,\mathrm{dB}$$
$$U_{os} \approx 0{,}1\,\mathrm{mV}$$
$$u_n \approx 1{,}1\,\mathrm{nV}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$$
$$\mathrm{THD} \approx 0{,}000015\,\%$$
$$\mathrm{SR} \approx 27\,\mathrm{V}/\mu\mathrm{s}$$
$$f_r \approx 40\,\mathrm{MHz}$$
$$I_{cc} \approx 3{,}6\,\mathrm{mA}$$
$$V_{cc} \in \langle \pm 2{,}25,\ \pm 18 \rangle\,\mathrm{V}$$

převzato z datasheetu.

Zjednodušená struktura IO, symetrického zesilovače OPA1632



Struktura OPA1632 – OZ s rozdílovým výstupem (použití: budiče ADC, audio budiče a předzesilovače, aktivní filtry, ...). Komentář, viz přednáška.

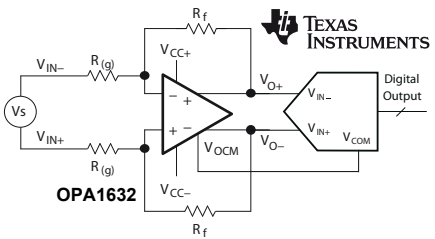
Vybrané parametry:

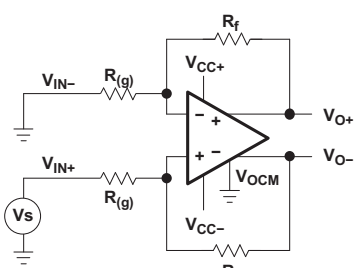
$$\begin{aligned}
\mathrm{THD} &\approx 0{,}000022\,\% \\
u_n &\approx 1{,}3\,\mathrm{nV}/\sqrt{\mathrm{Hz}} \\
\mathrm{SR} &\approx 50\,\mathrm{V}/\mu\mathrm{s} \\
f_t &\approx 180\,\mathrm{MHz} \\
A_0 &\approx 78\,\mathrm{dB} \\
I_{om} &\approx 85\,\mathrm{mA} \\
I_{cc} &\approx 14\,\mathrm{mA} \\
V_{cc} &\in \langle \pm 2{,}5, \pm 16 \rangle\,\mathrm{V}
\end{aligned}$$

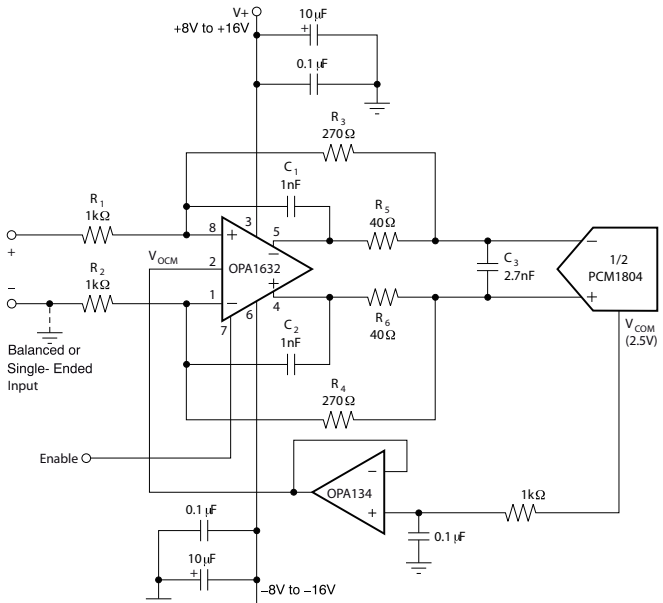
převzato z datasheetu.

Typická zapojení symetrického zesilovače OPA1632

Symetrický zesilovač A/D převodníku, „symetrizační“ budič a kompletní zapojení audio-převodníku, viz datasheet.







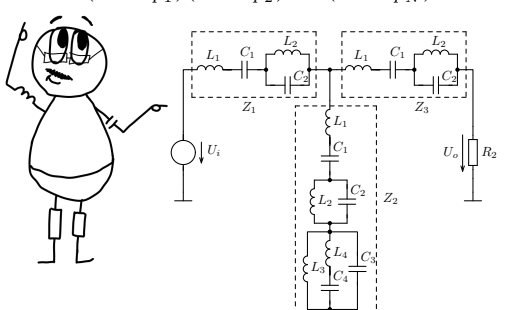
Poznámky XVI

Kapitola 17

Úvod do implementace (realizace) elektrických kmitočtových filtrů

Tato kapitola je věnována obvodové realizaci přenosové funkce analogového filtru. Uživatel se seznámí s obvodovou implementací filtru jak pomocí pasivních struktur RC a LC, tak zejména pomocí aktivních obvodů, které využívají operačních nebo transkonduktančních zesilovačů, ale i dalších aktivních bloků jako jsou proudové konvejory. V další části jsou pak ukázány možnosti realizace přenosové funkce pomocí obvodů se spínanými kapacitory či proudy. Jedná pouze o úvod do velmi široké oblasti. Podrobnější rozbor lze najít v citované literatuře.

$$H(s) = H_C \frac{(s - s_{n_1})(s - s_{n_2}) \cdots (s - s_{n_M})}{(s - s_{p_1})(s - s_{p_2}) \cdots (s - s_{p_N})}$$



Jak realizovat filtr elektrickým obvodem?

Existuje celá řada možností možností realizace kmitočtového filtru elektrickým obvodem. V této kapitole je pouze úvod do některých možností. Využívá se mnoha principů a postupů návrhu, které jsou popsány v literatuře, viz např. [15, 16, 17, 18]. Základní dělení elektrických filtrů lze uvést následujícím výčtem:

Pasivní filtry

- Elektromechanické filtry, $10^1\,\mathrm{kHz} < f < 10^2\,\mathrm{kHz}$,
- RC filtry většinou pouze 2. řádu pro nenáročné aplikace, $10^0\,\mathrm{kHz} < f < 1\,\mathrm{GHz}$,
- LC filtry, $10^0\,\mathrm{kHz} < f < 1$, případně krystalové filtry, $10^1\,\mathrm{kHz} < f < 1\,\mathrm{GHz}$,
- Filtry s povrchovou akustickou vlnou (Surface Acoustic Wave – SAW), $10\,\mathrm{MHz} < f < 3\,\mathrm{GHz}$,
- Mikrovlnné filtry (Cavity filters), $f > 1\,\mathrm{GHz}$.

Implementace kmitočtových filtrů pomocí aktivních obvodů – ARC filtry

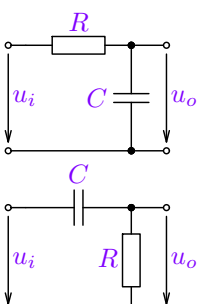
- Zapojení s operačními, případně transimpedančními zesilovači,
- filtry s transkonduktančními zesilovači (OTA),
- implementace pomocí proudových konvejorů (Current conveyors – current-mode filters),
- filtry využívající nelineární charakteristiky (Log-domain a Square-root domain),
- spínané filtry (Disrete time filters) implementované technikou SC nebo SI .

Pro realizaci se využívají různé techniky, přičemž nejpoužívanější z nich jsou níže stručně představeny.

17.1. Realizace filtrů pomocí RC struktur

Filtry implementované pomocí RC obvodu se používají jako elementární fitry omezení pásma v signálových, ale i napájecích cestách. Jedná o pasivní obvod, tj. nepotřebuje napájení, ale nemůže být zároveň použit pro zesílení signálu. Lze s ním realizovat přenosovou funkci pouze s reálnými póly, tj, $Q \leq 0{,}5$. Z tohoto důvodu se tyto implementace používají pouze pro filtry 1. nebo 2. řádu a nelze s nimi realizovat filtry vyšších řádů s aproximacemi představenými v kapitole 9.2.

Základními RC filtry 1. řádu jsou integrační a derivační článek, jak uvádí následující obrázek. Jejich vlastnosti byly přestaveny v kapitole 8.2.1, konkrétně v tabulkách. 8.3 a 8.4, včetně fázových charakteristik a časových odezev.

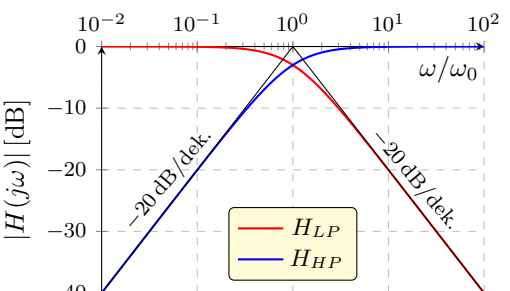


$$H_{LP}(s) = \frac{1}{1+sRC} = \frac{H_0\omega_0}{s+\omega_0},$$

kde $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, $H_0 = 1$.

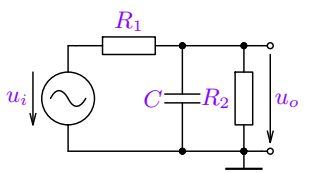
$$H_{HP}(s) = \frac{sRC}{sRC+1} = \frac{H_\infty s}{s+\omega_0},$$

kde $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, $H_\infty = 1$.



Obrázek 17.1: Dolní a horní propust 1. řádu realizované integračním a derivačním RC článkem.

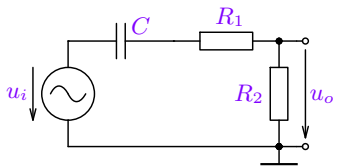
Jednoduchou úpravou předchozích zapojení lze měnit přenos v propustném pásmu, ale minimální útlum v propustném pásmu je $0\,\mathrm{dB}$ pro $R_2 \to \infty$ u LP, resp. $R_1 \to 0$ u HP, což pak vede na předchozí zapojení.



$$H_{LP}(s) = \frac{\frac{R_2}{R_1+R_2}}{sRC+1} = \frac{H_0\omega_0}{s+\omega_0},$$

kde $R = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$, $\omega_0 = \frac{1}{RC}$,

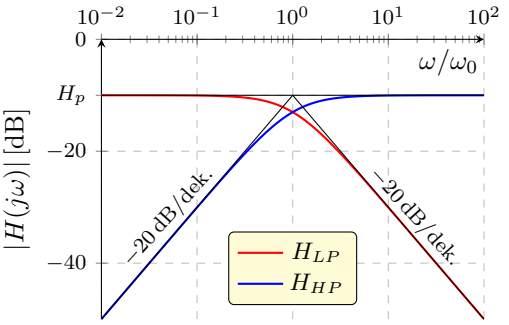
$H_0 = \frac{R_2}{R_1+R_2}$.



$$H_{HP}(s) = \frac{sR_2C}{s(R_1+R_2)C+1} =$$

$$= \frac{H_\infty s}{s+\omega_0}, \text{ kde } \omega_0 = \frac{1}{(R_1+R_2)C},$$

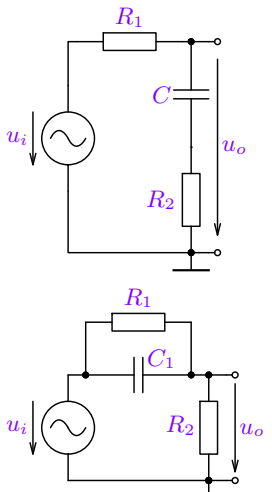
$H_\infty = \frac{R_2}{R_1+R_2}$.



$H_p = 20\log H_0$, resp. $H_p = 20\log H_\infty$

Obrázek 17.2: Dolní a horní propust 1. řádu s proměnným útlumem v propustném pásmu.

Základní korekční RC filtry 1. řádu typu dolní a horní propusti vycházejí z přenosové funkce z tabulky 8.5, včetně obvodové realizace, kterou lze modifikovat např. zapojeními 17.2. Níže jsou uvedeny vlastnosti dvou zapojení.



$$H_L(s) = \frac{sR_2C + 1}{s(R_1 + R_2)C + 1} = H_{\infty_L} \frac{s + \omega_{n_L}}{s + \omega_{0_L}}$$

kde $\omega_{0_L} = \frac{1}{(R_1+R_2)C}$, $\omega_{n_L} = \frac{1}{R_2C}$,

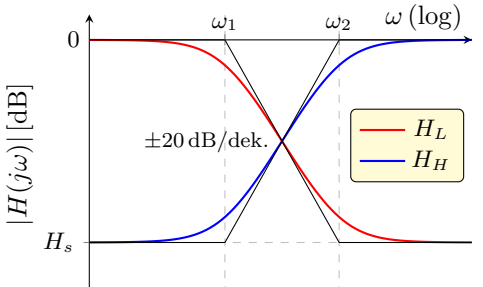
$H_{\infty_L} = \frac{R_2}{R_1+R_2}$, $H_H(0) = 1$.

$$H_H(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{sR_1C_1 + 1}{sRC_1 + 1} =$$

$$= H_{\infty_H} \frac{s + \omega_{n_H}}{s + \omega_{0_H}}, \text{ kde } R = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2},$$

$\omega_{0_H} = \frac{1}{RC_1}$, $\omega_{n_H} = \frac{1}{R_1C_1}$, $H_{\infty_H} = 1$,

$H_H(0) = H_{\infty_H} \frac{\omega_{n_H}}{\omega_{0_H}} = \frac{R_2}{R_1+R_2}$.



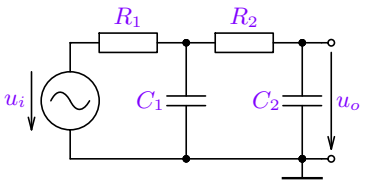
$$H_s = 20 \log H_{\infty_L} = 20 \log H_H(0).$$

Pro $C_1 = C\frac{R_1+R_2}{R_1}$, pak:

$\omega_1 = \omega_{0_L} = \omega_{n_H}$ a $\omega_2 = \omega_{n_L} = \omega_{0_H}$.

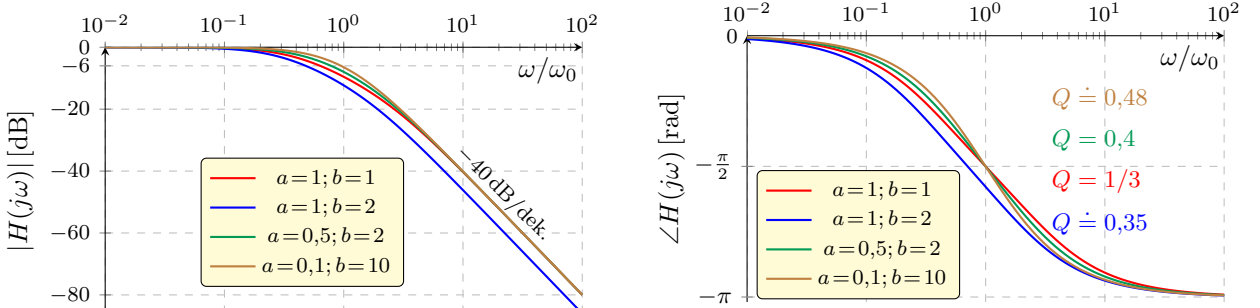
Obrázek 17.3: Základní korekční filtry 1. řádu.

Realizace **RC filtru 2. řádu typu dolní propusti** vychází ze zapojení integračního RC článku obrázku 17.1, jehož přenosová funkce vychází ze vztahu (8.6). Poznámky k návrhu viz v závěru této podkapitoly na straně XVII-12.



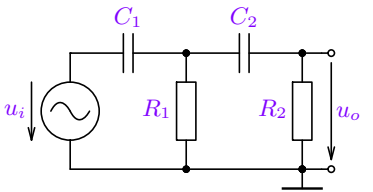
$$H(s) = \frac{H_0\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \quad \text{kde pro} \quad C_2 = aC_1 = aC, \quad R_2 = bR_1 = bR \quad \text{platí:}$$

$$H_0 = 1, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{ab}RC}, \quad Q = \frac{\sqrt{ab}}{1 + a(b+1)} \leq 0{,}5. \qquad (17.1)$$



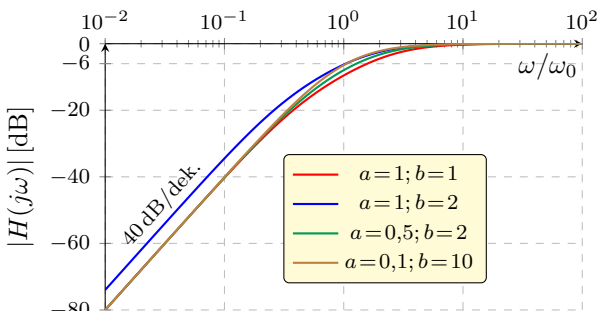
Obrázek 17.4: Dolní propust 2. řádu realizovaná dvojnásobným integračním RC článkem.

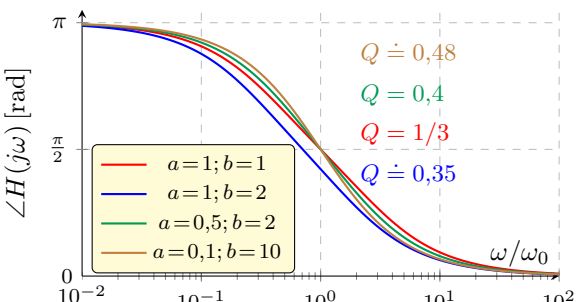
Realizace **RC filtru 2. řádu typu horní propusti** je analogií předchozího případu. Její přenosová funkce vychází ze vztahu (8.8) a výsledné vztahy pro parametry se shodují s předešlým, což platí i o diskusi k návrhu.



$$H(s) = \frac{H_\infty s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \quad \text{kde pro} \quad C_2 = aC_1 = aC, \quad R_2 = bR_1 = bR \quad \text{platí:}$$

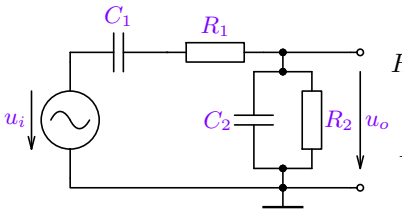
$$H_\infty = 1, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{ab}RC}, \quad Q = \frac{\sqrt{ab}}{1 + a(b+1)} \leq 0{,}5. \tag{17.2}$$





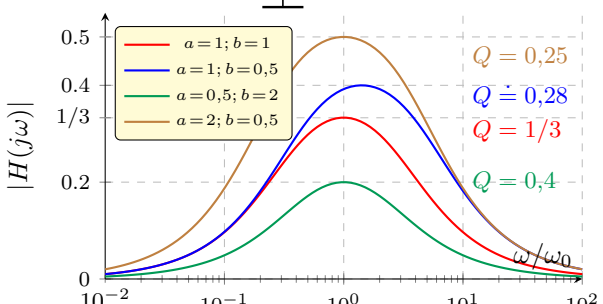
Obrázek 17.5: Horní propust 2. řádu realizovaná dvojnásobným derivačním RC článkem.

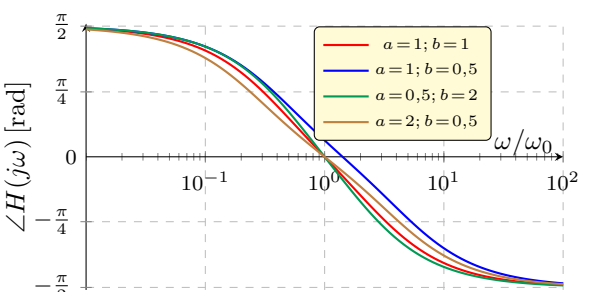
Realizaci **RC filtru 2. řádu typu pásmové propusti** lze uskutečnit několika způsoby. Přenosová funkce vychází ze vztahu (8.9) a výsledné vztahy pro tuto realizaci Wienův článek následují, viz také poznámky na straně XVII-12.



$$H(s) = \frac{H_B \frac{\omega_0}{Q} s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}, \text{ kde pro } \quad C_1 = aC_2 = aC, \quad R_1 = bR_2 = bR \quad \text{platí:}$$

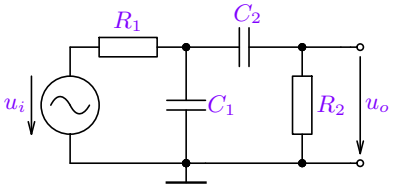
$$H_B = \frac{a}{1 + a(b+1)} < 1, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{ab}RC}, \quad Q = \frac{\sqrt{ab}}{1 + a(b+1)} \leq 0{,}5. \quad (17.3)$$





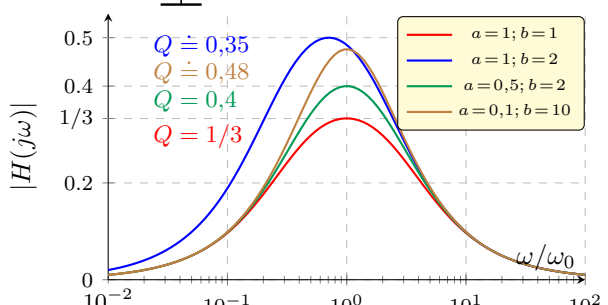
Obrázek 17.6: Pásmová propust 2. řádu realizovaná Wienovým RC článkem.

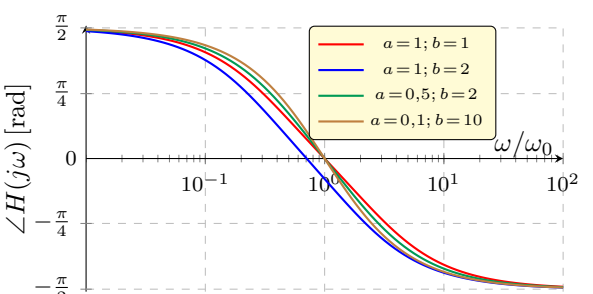
Wienův článek je vhodné používat při $a = b = 1$. Pro větší přenos H_B se zmenšuje činitel jakosti Q. V těchto případech je lépe použít buď kombinaci integračního a derivačního článku v níže uvedeném řazení (RCCR) nebo s opačným řazením (CRRC) a podobnými vlastnostmi, viz také [17].



$$H(s) = \frac{H_B \frac{\omega_0}{Q} s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}, \text{ kde pro } \quad C_2 = aC_1 = aC, \quad R_2 = bR_1 = bR \quad \text{platí:}$$

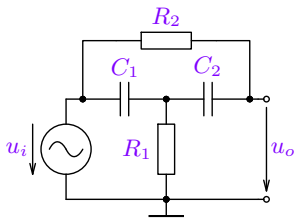
$$H_B = \frac{ab}{1 + a(b+1)} < 1, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{ab}RC}, \quad Q = \frac{\sqrt{ab}}{1 + a(b+1)} \leq 0{,}5. \quad (17.4)$$





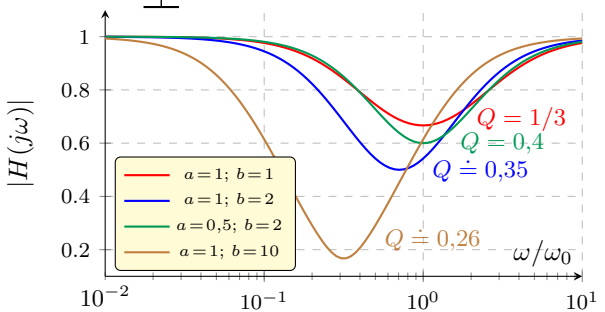
Obrázek 17.7: Pásmová propust 2. řádu realizovaná integračním a derivačním RC článkem.

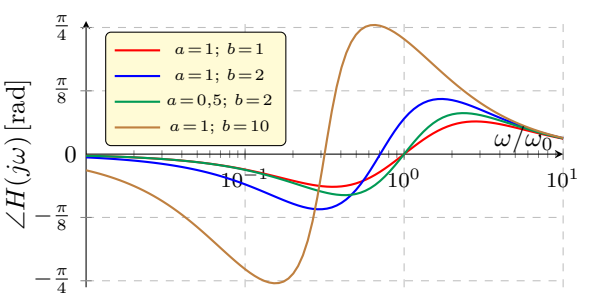
Pro realizaci **RC filtru 2. řádu typu pásmové zádrže** lze použít „obrácený Wienův článek“, který však nesplňuje přenosovou funkci z tabulky 8.13 a tudíž nedosahuje $H_{min} = 0$. To platí i níže uvedený přemostěný T-článek, který však může dosáhnout při nižších H_{min} vyšších Q, a navíc při výhodné volbě $C_1 = C_2 = C$.



$$H(s) = \frac{s^2 + \frac{\omega_0(a+1)}{\sqrt{ab}}s + \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}, \text{ kde pro } \quad C_2 = aC_1 = aC, \quad R_2 = bR_1 = bR \quad \text{platí:}$$

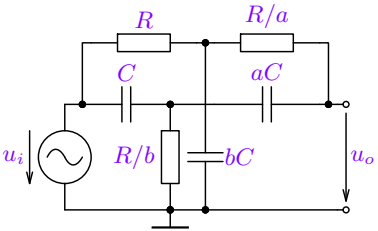
$$H(j\omega_0) = H_{min} = \frac{a+1}{1+a(b+1)} < 1, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{ab}RC}, \quad Q = \frac{\sqrt{ab}}{1+a(b+1)} \leq 0{,}5. \tag{17.5}$$





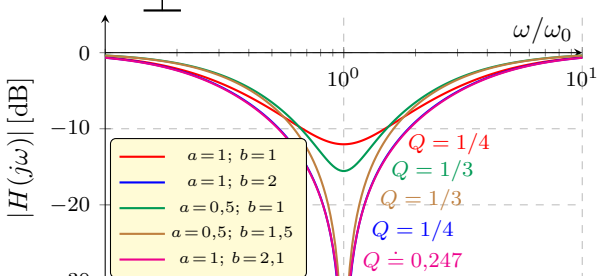
Obrázek 17.8: Pásmová zádrž 2. řádu realizovaná přemostěným T-článkem.

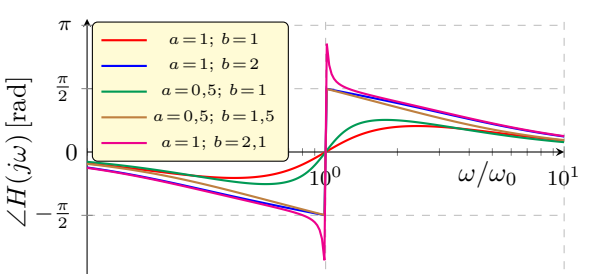
Nevýhodu malého útlumu přemostěného T-článku řeší dvojitý T článek níže. Obecně to je systém 3. řádu, nicméně pro uvedené nastavení hodnot se jedná opět o **RC filtr 2. řádu typu pásmové zádrže**, přičemž pro $a - b = 1$, tj. $Q_n \to \infty$ a $H_{min} = 0$ se jedná o klasickou přenosovou funkci zádrže dle tabulky 8.13, více viz komentář dále.



$$H(s) = \frac{s^2 + \frac{\omega_0}{Q_n}s + \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}, \quad \text{kde} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}, \quad Q = \frac{b}{b^2 + ab + a + 1} \leq 0{,}5 \qquad (17.6)$$

$$Q_n = \frac{b}{a - b + 1} \quad \text{a} \quad H(j\omega_0) = H_{min} = \frac{Q}{Q_n} = \frac{a - b + 1}{b^2 + ab + a + 1} < 1. \qquad (17.7)$$





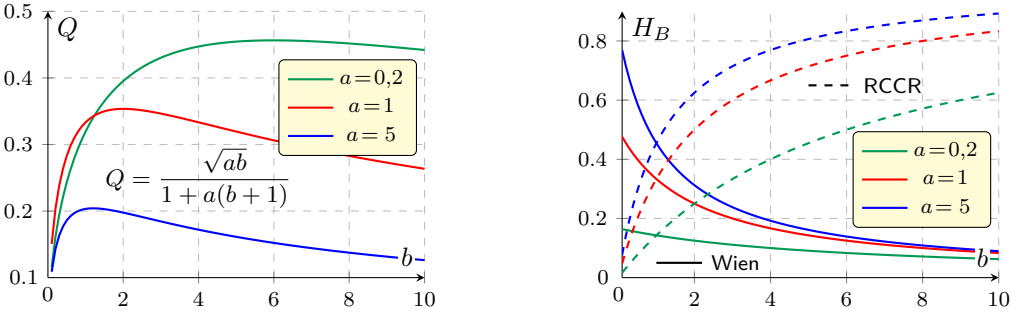
Obrázek 17.9: Pásmová zádrž 2. řádu realizovaná dvojitým T-článkem.

Poznámky k návrhu RC filtrů 2 řádu

Jak bylo uvedeno, přenosové funkce RC filtrů nemohou mít komplexně sdružené póly, tj. činitel jakosti $Q \leq 0{,}5$ a tudíž nemohou realizovat filtry druhého a vyšších řádů s aproximacemi popsanými v kapitole 9.2. zlomový kmitočet ω_0 je dán časovou konstantou RC a případně koeficienty a a b, pokud $ab \neq 1$. Pokud lze, je vhodné volit $a = 1$, jelikož kapacitory mají velký rozptyl kapacit a stejné hodnoty lze snadno vybrat měřením. Koeficienty a a b ovlivňují také velikost přenosu H_B a H_{min} u pásmových propustí a zádrží.

LP a HP 1. řádu podle obrázku 17.1 jsou elementárními, široce používanými zapojeními i pro liché řády ARC kaskádních filtrů (LP, HP)s OZ, viz kapitolu 17.6.
Pro vyšší strmosti, ale s vyšším útlumem pro $\omega = \omega_0$ lze použít RC filtry 2. řádu, které vychází ze zapojení na obrázku 17.4 a 17.5. Ve většině případů se volí $a = b = 1$. Pro vyšší činitele jakosti Q je pak vhodná volba $a = 0{,}5$; $b = 2$, případně $a = 1$; $b = 2$ (maximum Q pro $a = 1$, viz obrázek 17.10). Další zvyšování Q nevede k požadovanému nárůstu strmosti kmitočtové charakteristiky, ale nepříjemně zvyšuje poměr hodnot prvků. Pro dvojnásobný reálný pól přenosové funkce (maximum $Q = 0{,}5$) by muselo platit $a \to 0$ a $b \to 1/a$.

BP 2. řádu se pro RC implementaci obvykle používá Wienův článek na obrázku 17.6. Ten je však vhodný pro $a = b = 1$, případně při požadavku velké šířky propustného pásma, tj. malé hodnoty Q, přičemž pro $H_B \to 1$ je třeba volit velké a a b=1/a. Nicméně i v případech velké šířky pásma je často vhodnější použití spojení integračního a derivačního RC článku (RCCR), jak ukazuje obrázek 17.7, pro který se pak volí také velké a, ale $b = a$ (v případě opačného pořadí – CRRC se pro malé Q volí naopak malé $a = b$). Pro úzkopásmové filtry jsou implementace s RC články (RCCR nebo CRRC) výhodnější, jelikož s rostoucím Q roste i přenos H_B, na rozdíl od Wienova článku, viz obrázek 17.10. Tyto filtry se často používají pro nf oscilátory, viz kapitolu 18.1.4.



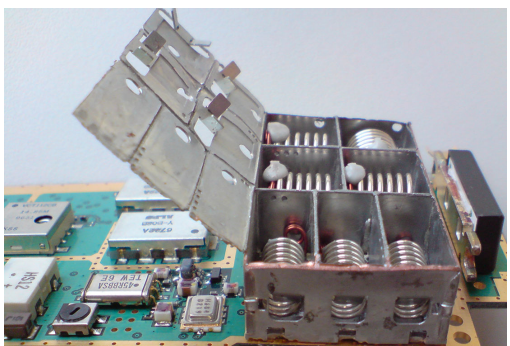
Obrázek 17.10: Závislost činitele jakosti Q a přenosu H_B pro BP na volbě koeficientů a a b.

BS Jako nejjednodušší zapojení RC pásmové zádrže se používá přemostěný T-článek z obrázku 17.8. V tomto případě se volí $C_1 = C_2 = C$ a pro vyšší útlum (nižší $H_{min} = H(j\omega_0)$) se pak volí větší hodnoty koeficientu $b \in \langle 2, 10\rangle$. Záměnou R a C lze získat jeho alternativu, což vede na volbu $R_1 = R_2$, která je méně vhodná, viz také [17]. Přemostěný T-článek se opět využívá např. pro oscilátory – kapitola 18.1.4.
Přenosovou funkci BS dle tabulky 8.13 lze realizovat dvojitým T článkem pro $b = a + 1$ ($Q_n \to \infty$), viz obrázek 17.9. Obvykle se volí $a = 1$, ale díky toleranci hodnot prvků nelze dosáhnout $H_{min} = 0$. Pro toleranci $0{,}1\,\%$ vychází $H_{min} \approx -60\,\mathrm{dB}$, více viz analýzu.

Návrh RC filtrů vyšších řádů je komplikovaný a vzhledem k tomu, že $Q < 0{,}5$, je jejich využití minimální.

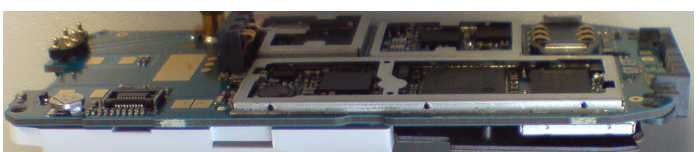
17.2. Realizace filtrů pomocí LC struktur

Filtry implementované pomocí LC obvodu mají dlouhou historii s podrobným teoretickým základem a propracovanými postupy návrhu. Používaly se hojně v telekomunikační technice. Dnes jsou nahrazovány technologiemi, umožňujícími miniaturizaci, tj. integraci. Nezastupitelné místo včak mají ve výkonové elektronice.



(a)

LC filtry se však stále využívají zejména v oblastni výkonových filtrů, kde je jejich náhrada jinou implementací problematická. Jejich další výhodou je skutečnost, že se jedná opět o pasivní obvod, má malé ztráty (oproti RC) a také velmi dobré citlivostní parametry (malá závislost přenosu na tolerancích hodnot prvků oproti ostatním typům).



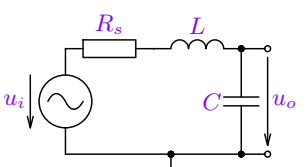
(b)

Obrázek 17.11: Ukázka použití filtrů v mobilním telefonu: (a) 90. léta 20. století, (b) jeden z nástupců mobilních telefonů při přechodu na $f > 1\,\mathrm{GHz}$ (využití filtru SAW).

17.2.1. Realizace LC filtrů 2. řádu

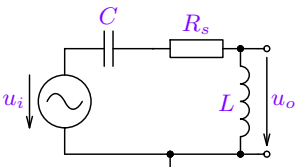
Zapojení základních LC jednostranně zakončených LC filtrů 2. řádu byly uvedeny v tabulkách včetně základních návrhových vztahů. Zapojení s jednostranným zakončením sériovým rezistorem R_s:

dolní propust – LP



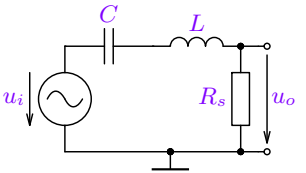
$$H(s) = \frac{H_0\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

horní propust – HP



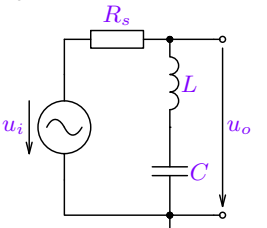
$$H(s) = \frac{H_\infty s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

pásmová propust – BP



$$H(s) = \frac{H_B\frac{\omega_0}{Q}s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

pásmová zádrž – BS



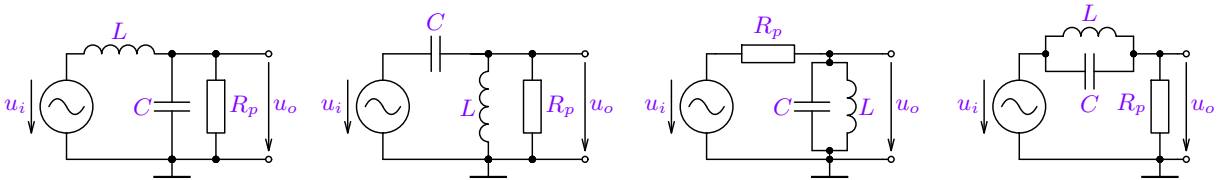
$$H(s) = \frac{H_0(s^2 + \omega_0^2)}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

Obrázek 17.12: Zapojení jednostranně zakončených LC filtrů 2. řádu se sériovým odporem R_s.

U všech zapojení platí stejné relace pro zlomový kmitočet, který souhlasí s (5.29) (viz také příklad 4.2) i činitel jakosti, který souhlasí s činitelem jakosti rezonančního obvodu (5.30) a jakosti cívky Q_L, viz (5.33):

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad Q = \frac{\sqrt{L/C}}{R_s} = \frac{\omega_0 L}{R_s} = \frac{1}{R_s\omega_0 C}, \qquad H_0 = H_\infty = H_B = 1. \tag{17.8}$$

Činitel jakosti závisí na velikosti odporu a lze ho tedy nastavit nezávisle na ω_0 a hlavně $Q > 0{,}5$, tj. zapojení může realizovat komplexně sdružené póly, což je podmínka pro implementaci filtrů s používanými aproximacemi modulových charakteristik (viz kapitola 9.2). Vlastnosti jednotlivých zapojení, včetně kmitočtových charakteristik jsou uvedeny v tabulkách 8.8 až 8.13 a také analýzách (kliknutím na příslušný obrázek). Ze zapojení je dále zřejmé, že v propustném pásmu filtry nezesilují (mohou mít převýšení modulu pro $Q > 1/\sqrt{2}$), ale ani nezeslabují: $H_0 = H_\infty = H_B = 1$ a $H_{min} = H(j\omega_0) = 0$ pro pásmovou zádrž. Analogicky k zapojením 17.12 jsou níže uvedena zapojení s paralelním rezistorem R_p. Jejich vlastnosti jsou identické, mění se díky R_p pouze vztah pro činitel jakosti. Ten evidentně souhlasí s činitelem jakosti rezonančního obvodu (5.32) a činitelem $\frac{1}{\tan\delta}$, viz (5.34).

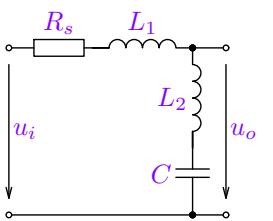


dolní propust – LP | horní propust – HP | pásmová propust – BP | pásmová zádrž – BS

Obrázek 17.13: Alternativní zapojení výše uvedených LC filtrů 2. řádu s paralelním rezistorem R_p.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad Q = R_p\sqrt{\frac{C}{L}} = \omega_0 C R_p = \frac{R_p}{\omega_0 L}. \tag{17.9}$$

Zbývající přenosové funkce dle tabulek 8.11 a 8.12 odpovídají eliptickým filtrům dolní a horní propusti (LPN a HPN), tj. s nulou přenosu na imaginární ose na nenulovém, konečném kmitočtu, podobně jako BS. Jejich zapojení je uvedeno níže na obrázku 17.14 se sériovým, resp. 17.15 s paralelním rezistorem (porovnej se zapojením BS z obrázku 17.12, resp. 17.13). Charakteristiky byly uvedeny ve zmíněných tabulkách, viz také obvodovou analýzu (kliknutím na obrázek), případně i systémovou analýzu (kliknutím na přenosovou funkci).

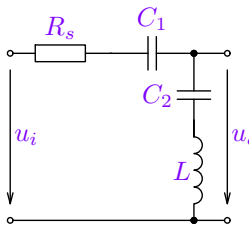


$$H(s) = \frac{H_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_n^2}(s^2+\omega_n^2)}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

ω_0 a Q dány (17.8), kde $L = L_1 + L_2$,

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{L_2 C}}, \quad H_0 = 1, \quad H(\infty) = \frac{L_2}{L_1 + L_2}$$

(a)



$$H(s) = \frac{H_\infty(s^2+\omega_n^2)}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

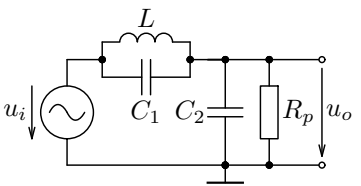
ω_0 a Q dány (17.8), kde $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$,

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC_2}}, \quad H_\infty = 1, \quad H(0) = \frac{C_1}{C_1 + C_2}.$$

(b)

Obrázek 17.14: Zapojení jednostranně zakončených eliptických LC filtrů 2. řádu typu dolní (a) a horní (b) propusti se sériovým rezistorem R_s.

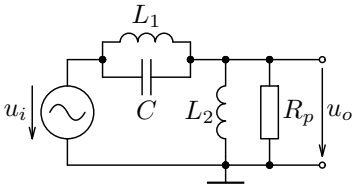
Podobně jako v předchozím případě i zde existují zapojení s paralelním rezistorem R_p.



ω_0 a Q dány (17.9), kde $C = \dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$,

$\omega_n = \dfrac{1}{\sqrt{LC_1}}, \quad H_0 = 1, \quad H(\infty) = \dfrac{C_1}{C_1 + C_2}.$

(a)



ω_0 a Q dány (17.9), kde $L = \dfrac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$,

$\omega_n = \dfrac{1}{\sqrt{L_1 C}}, \quad H_\infty = 1, \quad H(0) = \dfrac{L_2}{L_1 + L_2}.$

(b)

Obrázek 17.15: Zapojení jednostranně zakončených eliptických LC filtrů 2. řádu typu dolní (a) a horní (b) propusti s paralelním rezistorem R_p.

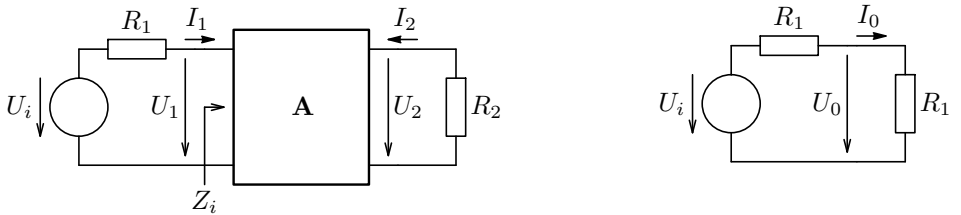
Návrh LC filtrů vyšších řádů je komplikovanější. Nelze využít základních vztahů pro rezonanční kmitočet, jelikož jednotlivé obvody se zatěžují. Pro návrh bylo vyvinuto několik postupů, které lze samozřejmě použít i na filtry 2. řádu. Syntéza těchto struktur je založena na obvodových funkcích (popisu) dvojbranu, které jsou nejprve stručně uvedeny dále.

17.2.2. Obvodové funkce LC filtrů

Syntéza kmitočtových nejenom LC filtrů ale i RC obvodů využívá teoretické základy z oblasti syntézy dvojlólů a dvojbranů, viz [15, 16] a řadu dalších publikací, které jsou v literatuře citovány. Zde se zaměříme na velmi stručný úvod do této problematiky. LC filtr představuje strukturu uvedenou na obrázku 17.16 (a). Vlastní struktura obvodu LC je imitanční funkcí, která má následující vlastnosti

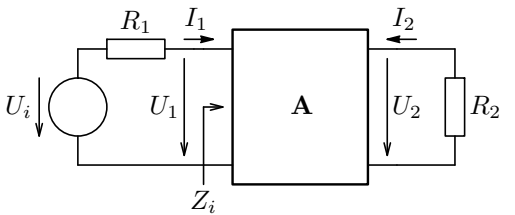
- póly a nulové body se střídají a leží výlučně na imaginární ose roviny s – jedná se bezeztrátový LC obvod,
- je tvořena podílem dvou polynomu (sudého a lichého nebo opačně).

Pro účely reálného filtru (stabilního systému) musí být tato LC struktura zakončena buď oboustranně rezistory R_1, R_2 nebo jednostranně (naprázdno $R_2 \to \infty$ nebo nakrátko $R_1 \to 0$), viz obrázek níže.



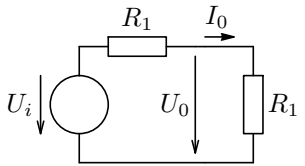
Obrázek 17.16: Obecné uspořádání LC filtru (a) a odpovídající struktura s maximálním přenosem výkonu (b).

Přenosová funkce $H(s)$ uvedeného systému je definována jako podíl Laplaceových obrazů výstupní $\chi_2(s)$ a vstupní $\chi_i(s)$ veličiny a její převrácenou hodnotu nazýváme inverzním přenosem $G(s)$.



$$H(s) = \frac{\chi_2(s)}{\chi_1(s)}$$

$$G(s) = \frac{1}{H(s)} = \frac{\chi_1(s)}{\chi_2(s)}$$



Po účely syntézy se na základě výkonů definuje tzv. provozní činitel přenosu jako (vše dále jako Laplaceovy obrazy)

$$G = \sqrt{\frac{U_0 I_0}{U_2(-I_2)}} = \frac{1}{H}\,. \tag{17.10}$$

Výkon $U_0 I_0$ je definován podle obrázku 17.16 (b), přičemž $R_2 = R_1$, tj. představuje maximální výkon na vstupu reaktančního dvojbranu na obrázku (a). Pokud je přenos definován jako poměr napětí (napěťový přenos), tj. $H_U = \frac{U_2}{U_i}$, pak zavádíme napěťový činitel přenosu $G_U = \frac{1}{H_U} = \frac{U_i}{U_2}$. Mezi provozním činitelem přenosu G a napěťovým činitelem přenosu G_U lze odvodit vztah:

$$U_0 = U_i \frac{R_1}{R_1 + R_1} = \frac{U_i}{2},\ I_0 = \frac{U_i}{2R_1},\ -I_2 = \frac{U_2}{R_2} \Rightarrow G = \sqrt{\frac{U_i}{2}\frac{U_i}{2R_1}\frac{1}{U_2}\frac{R_2}{U_2}} = \frac{U_i}{U_2}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_2}{R_1}} = G_U\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}. \tag{17.11}$$

Pozor, tím je dána i relace mezi provozním činitelem přenosu, tj. provozním útlumem a, používaném v tolerančních schématech (viz např. kapitolu 9.4) a napěťovým přenosem.

$$|H_U|_{[\mathrm{dB}]} = 20\log\left|\frac{U_2}{U_i}\right| \Rightarrow a = |G_U|_{[\mathrm{dB}]} = -|H_U|_{[\mathrm{dB}]} + 20\log\frac{1}{2} + 10\log\frac{R_2}{R_1} \doteq -|H_U|_{[\mathrm{dB}]} - 6{,}02 + 10\log\frac{R_2}{R_1}. \tag{17.12}$$

Pokud je tedy $R_1 = R_2$, pak napěťový přenos v propustném pásmu LC filtru nezačíná v $0\,\mathrm{dB}$, ale cca v $-6\,\mathrm{dB}$! Pro Čebyševovu a Cauerovu aproximaci (A,B) sudého řádu musí být $R_1 \neq R_2$ (viz obrázek 9.20, případně 9.14) a pak $H_U(0)_{[\mathrm{dB}]} \doteq -a_p - 6{,}02\,\mathrm{dB}$.

17.2.3. Vztah přenosových funkcí a dvojbranových parametrů filtrů

Vztahy mezi obvodovými veličinami LC struktury z obrázku 17.16 (a), tj. reaktančního dvojbranu lze vyjádřit pomocí dvojbranových parametrů. Nejčastěji se používají kaskádní (přenosové) parametry $\mathbf{A}$, ale syntézu lze uskutečnit i s pomocí impedančních $\mathbf{Z}$ či admitančních $\mathbf{Y}$ parametrů, viz např. [16]. V tomto materiálu se omezíme na kaskádní popis, který byl uveden v kapitole 7.4.6:

$$U_1 = a_{11}U_2 + a_{12}(-I_2)$$
$$I_1 = a_{21}U_2 + a_{22}(-I_2)$$

Pokud je dvojbran buzen do vstupní brány a výstupní brána je zatížena impedancí $Z_2 = R_2 = U_2/(-I_2)$, pak vstupní impedanci $Z_i(s)$ lze evidentně napsat ve tvaru (17.13) včetně verze naprázdno a nakrátko, přičemž dvojbranové parametry i obvodové veličiny jsou opět vyjádřeny Laplaceovými obrazy (neindikováno).

$$Z_i = \frac{U_1}{I_1} = \frac{a_{11}U_2 + a_{12}(-I_2)}{a_{21}U_2 + a_{22}(-I_2)} = \frac{a_{11}Z_2 + a_{12}}{a_{21}Z_2 + a_{22}} \quad \text{a} \quad Z_n = Z_i|_{R_2\to\infty} = \frac{a_{11}}{a_{21}}, \quad Z_k = Z_i|_{R_2\to 0} = \frac{a_{12}}{a_{22}}. \tag{17.13}$$

Pokud matici LC struktury rozšíříme o rezistor R_1 (viz řazení dvojbranů v kapitole 7.4.9, tabulku 7.1), dostaneme:

$$\begin{bmatrix} U_i \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_i \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{21}R_1 & a_{12} + a_{22}R_1 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \tag{17.14}$$

$$U_i = a_{v11}U_2 + \frac{a_{12}}{R_2}U_2 = (a_{11} + a_{21}R_1)U_2 + \frac{1}{R_2}(a_{12} + a_{22}R_1)U_2. \tag{17.15}$$

Podobně lze odvodit vztah pro proudový přenos. Vzhledem k relacím $U_0 = \frac{U_i}{2}$, $I_0 = \frac{U_0}{R_1}$ a $-I_2 = \frac{U_2}{R_2}$ platí:

$$H(s) = \frac{1}{G(s)} = \sqrt{\frac{U_2(-I_2)}{U_0 I_0}} = \frac{2\sqrt{R_1 R_2}}{R_2 a_{11}(s) + a_{12}(s) + R_1 R_2 a_{21}(s) + R_1 a_{22}(s)}\ , \tag{17.16}$$

Přenosová funkce filtru, resp. její kvadrát, který byl zaveden vztahem 9.3, lze pak vyjádřit z (17.16) a funkce $H(-s)$. Tu lze sestavit vzhledem k vlastnostem kaskádních parametrů reaktančního dvojbranu: $a_{11}(-s) = a_{11}(s), a_{22}(-s) = a_{22}(s), a_{12}(-s) = -a_{12}(s), a_{21}(-s) = -a_{21}(s)$ [15]. Pak dostaneme níže uvedený vztah (17.17).

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + \dfrac{\big(R_2 a_{11}(s) - R_1 a_{22}(s)\big)^2 - \big(a_{12}(s) - R_1 R_2 a_{21}(s)\big)^2}{4R_1 R_2}} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \varphi(s)\varphi(-s)} = \frac{1}{G(s)G(-s)}, \tag{17.17}$$

kde $\varphi(s)$ je charakteristická funkce filtru (viz kapitolu 9.2), ε je chyba mohulu přenosu v propustném pásmu a G je výše uvedený je provozní činitel přenosu definovaný vztahem (17.10).

Porovnáním uvedených vztahů lze získat i vyjádření pro charakteristickou funkci pro $\varepsilon = 1$ a dále vztah mezi vstupní impedancí filtru a přenosovými vlastnostmi. Z něho pak už lze syntetizovat zapojení filtru, jak bude ukázáno dále. Detailní odvození je uvedeno např. v [15].

$$\varphi(\pm s) = \frac{R_2 a_{11}(s) \pm a_{12}(s) \mp R_1 R_2 a_{21}(s) - R_1 a_{22}(s)}{2\sqrt{R_1 R_2}} \tag{17.18}$$

$$\frac{H^{-1}(s) + \varphi(s)}{H^{-1}(s) - \varphi(s)} = \frac{1}{R_1}\frac{a_{11}(s)R_2 + a_{12}(s)}{a_{21}(s)R_2 + a_{22}(s)} \Rightarrow \frac{Z_i}{R_1} = \frac{H(s)^{-1} \pm \varphi(s)}{H(s)^{-1} \mp \varphi(s)}. \tag{17.19}$$

Podobně lze odvodit i dvojbranové parametry. Zde jsou uvedeny pouze kaskádní parametry (pro odštěpování T-článků zepředu – od zdroje), odvození je uvedeno v [15]. Impedanční a admitanční parametry viz např. [16].

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\Big(H^{-1}(s) + H^{-1}(-s) + \varphi(s) + \varphi(-s)\Big) & \frac{\sqrt{R_1R_2}}{2}\Big(H^{-1}(s) - H^{-1}(-s) + \varphi(s) - \varphi(-s)\Big) \\ \frac{1}{2\sqrt{R_1R_2}}\Big(H^{-1}(s) - H^{-1}(-s) - \varphi(s) + \varphi(-s)\Big) & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}\Big(H^{-1}(s) + H^{-1}(-s) - \varphi(s) - \varphi(-s)\Big) \end{bmatrix} \tag{17.20}$$

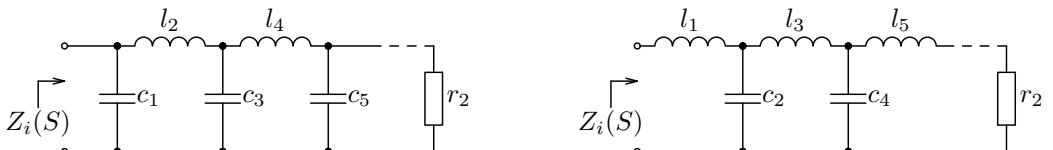
Uvedené vztahy platí jak pro symetrické, tak nesymetrické zakončení $R_1 = R_2$, resp. $R_1 \neq R_2$, ale nikoli pro případ nakrátko, resp. naprázdno, tj. $R_1 = 0$, resp. $R_2 \to \infty$. Pro tyto případy lze analogicky lze odvodit vztahy jak přenosové funkce, tak obvodové parametry. To však přesahuje rámec tohoto materiálu a uživatel je najde ve zmíněných citacích [16, 15].

Z výsledků aproximační úlohy, tj. přenosové a charakteristické funkce lze tedy odvodit parametry, např. vstupní impedanci Z_i danou vztahem (17.19) nebo kaskádní parametry dle (17.20). Tyto parametry již umožňují nalézt obvodovou implementaci LC struktury, jak je ukázáno v další kapitole.

17.2.4. Syntéza LC struktury NLP

Obvodové parametry, ze kterých bude syntetizované obvodové zapojení LC struktury vycházely z přenosové a charakteristické funkce filtru. Ty jsou dále použity jako normované, tj. popisující přenosové vlastnosti normované dolní propusti NLP (zlomový kmitočet $\Omega_p = 1$). Tím i obdržené LC struktury budou strukturami NLP filtru. Navíc se tento materiál zabývá pouze implementací LC struktury pomocí tzv. příčkové struktury (viz dále obrázky 17.17 a 17.18), která je nejpoužívanější a vykazuje nejlepší (nejmenší) citlivosti na změny hodnot prvků.

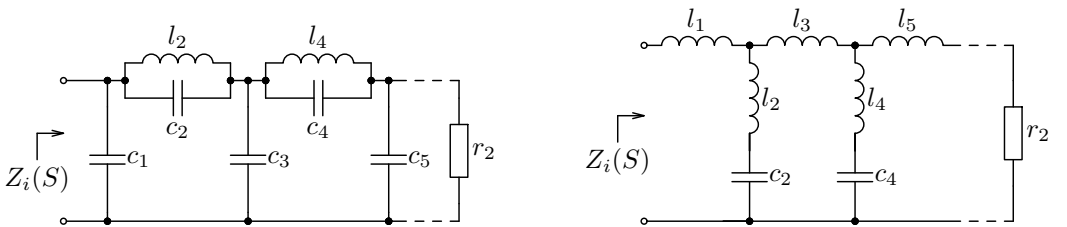
Mimo kmitočtové transformace a normování (viz kapitolu 9.4) se používá i normování impedanční – zakončovací odpory se volí normované[1] ($r = 1$). Základní obvodová struktura příčkového LC filtru typu dolní propusti, resp. NLP je uvedena na obrázku 17.17. Je možné ji vytvářet od vstupní nebo výstupní brány pomocí T nebo Π články.



Obrázek 17.17: Struktura základních filtrů NLP, resp. LP tvořená (a) Π články a (b) s T články.

[1] Normované prvky se obvykle značí malými písmeny.

Uvedenou strukturou 17.17 lze realizovat pouze polynomiální přenosové funkce filtrů, tj. bez nul přenosu (Butterworth, Čebyšev). Pro tzv. eliptické filtry (s nulami přenosu na konečných kmitočtech – inverzní Čebyšev, Cauer), je třeba strukturu upravit – namísto podélných induktorů zapojeny paralelní rezonanční obvody nebo místo příčných kapacitorů sériové rezonanční obvody jak ukazuje obrázek 17.18.



Obrázek 17.18: Struktura eliptických filtrů NLP, resp. LP tvořená buď Π články s paralelními RO v podélných větvích (a) nebo T články se sériovými RO v příčných větvích (b).

Pokud je LC struktura pouze jednostranně zakončená nelze použít některé varianty. Pro LC strukturu začínající Π článkem nelze použít variantu nakrátko, jelikož $r_1 = 0$ a struktura začíná příčným kapacitorem, jehož vliv tak eliminován (pouze zatěžuje zdroj vstupního signálu). Pokud je u této varianty navíc realizován filtr sudého řádu nelze použít ani zakončení naprázdno, jelikož pak struktura končí podélným induktorem, který by se pro $r_2 \to \infty$ neuplatnil (netekl by přes něj proud). Stejně je tomu u struktury začínající T článkem, realizující filtr lichého řádu.

Ze struktury filtru NLP (obrázky 17.17 a 17.18) lze zpětnou transformací, tzv. kmitočtovým odnormováním dle transformačních vztahů (9.12) až (9.18) dostat strukturu požadovaného typu filtru, jak ukazuje následkující tabulka 17.1. Výsledné hodnoty prvků LC vyplývají jednak kmitočtového odnormování (z $\Omega_p = 1$ na požadovaný kmitočet ω_p), a jednak impedančního odnormování, přičemž c a l jsou normované hodnoty struktury NLP a R_0 je normovací hodnota impedance, tj. $R_1 = r_1 R_0$ a $R_2 = r_2 R_0$. Z tabulky je zřejmé, že pro pro pásmové filtry (BP a BS) se zvyšuje řád filtru dvakrát.

NLP	Odnormované (transformované) stavební prvky pro výsledný typ filtru			
	LP	HP	BP	BS
l	$L = \frac{lR_0}{\omega_p}$	$C = \frac{1}{lR_0\omega_{-p}}$	$L = \frac{R_0 l}{\Delta\omega_p}$, $C = \frac{\Delta\omega_p}{R_0 l \omega_m^2}$	$L = \frac{\Delta\omega_p R_0 l}{\omega_m^2}$, $C = \frac{1}{R_0 l \Delta\omega_p}$
c	$C = \frac{c}{R_0\omega_p}$	$L = \frac{R_0}{c\,\omega_{-p}}$	$L = \frac{\Delta\omega_p R_0}{c\,\omega_m^2}$, $C = \frac{c}{R_0\Delta\omega_p}$	$L = \frac{R_0}{c\Delta\omega_p}$, $C = \frac{c\Delta\omega_p}{R_0\omega_m^2}$

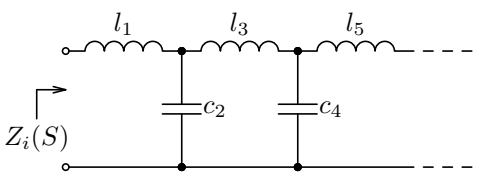
Tabulka 17.1: Transformace LC prvků NLP na filtr dolní (LP), horní (HP), pásmové propusti (BP) a zádrže (BS).

Syntéza LC struktury NLP ze vstupní impedance

Tato metoda vychází ze vstupní (normované) impedance $Z_i(S)$, kterou lze sestavit z přenosové a charakteristické funkce filtru NLP dle vztahu (17.19), tj.:

$$Z_i(S) = r_1 \frac{H(S)^{-1} \pm \varphi(S)}{H(S)^{-1} \mp \varphi(S)}. \tag{17.21}$$

Realizace NDP je pak založena na tzv. odštěpování pólů v nekonečnu (pro $S \to \infty$) ze vstupní imitance – aplikace Cauerova algoritmu. Pokud má vstupní impedance pól v nekonečnu struktura začíná podélným induktorem. Její rozvoj v řetězový zlomek a tomu odpovídající zapojení příčkové LC struktury dvojpólu je uvedeno na následujícím obrázku, kde S je Laplaceův operátor pro normovaný kmitočet a r, l, c jsou normované hodnoty prvků.



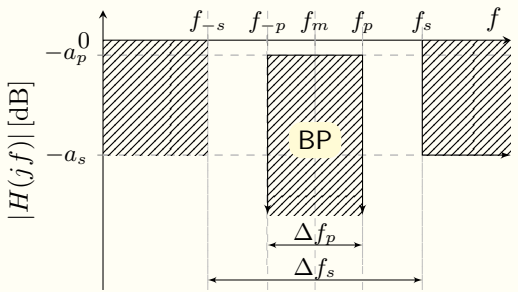
$$Z_i(S) = Sl_1 + \cfrac{1}{Sc_2 + \cfrac{1}{Sl_3 + \cfrac{1}{Sc_4 + \cfrac{1}{Sl_5 + \cfrac{1}{\ddots}}}}} \tag{17.22}$$

Pokud nemá impedance $Z_i(S)$ pól v $S = \infty$, má ho $Y_i(S) = 1/Z_i(S)$ a LC struktura začíná příčným kapacitorem dle obrázku 17.17 (b). Postup je ukázán na následujícím příkladu.

Příklad 17.1 Návrh a syntéza LC struktury filtru pásmové propusti

Zadání: Určete přenosovou funkci $H(s)$ filtru pásmové propusti pro Butterworthovu aproximaci a následně jeho LC strukturu pro zakončovací odpor $R_2 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, pokud jsou zadány následující hodnoty tolerančního schématu. Výsledky ověřte v aplikaci SYNTFIL.

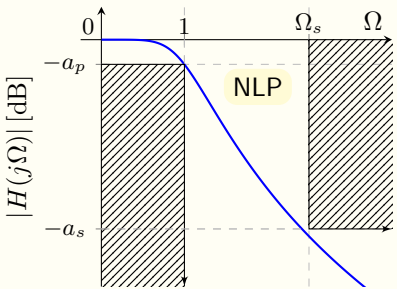
$$
\begin{aligned}
a_p &= \frac{1}{\sqrt{2}} \doteq 3{,}02\,\mathrm{dB},\\
a_s &= 23\,\mathrm{dB},\\
f_m &= 20\,\mathrm{kHz},\\
\Delta f_p &= 16\,\mathrm{kHz},\\
\Delta f_s &= 40\,\mathrm{kHz}.
\end{aligned}
$$



Řešení: Nejprve určíme meze nepropustného pásma a sekundární parametry, které jsou nezbytné pro výpočet aproximační úlohy: Z relací $\Delta f_s = f_s - f_{-s}$ a $f_m^2 = f_s f_{-s}$ dostáváme pro výše uvedené hodnoty $f_s \doteq 48{,}2843\,\mathrm{kHz}$ a dle (9.1) dostaneme $\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{a_p}{10}} - 1} = 1 \Rightarrow k_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{10^{\frac{a_s}{10}} - 1}} \doteq 0{,}07097.$

Nyní lze určit normované kmitočty tolerančního pásma, pro něž platí $\Omega_p = 1$ a z (9.16) pro $f = f_s$ dostaneme mez nepropustného pásma NLP (tzv. selektivitu)

$$\Omega_s = \frac{f_s^2 - f_m^2}{\Delta f_p \cdot f_s} = 2{,}5.$$



Stupeň přenosové funkce určíme z (9.5), přičemž $\frac{1}{k} = \Omega_s$. Vzhledem k tomu, že stupeň musí být přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$, platí:

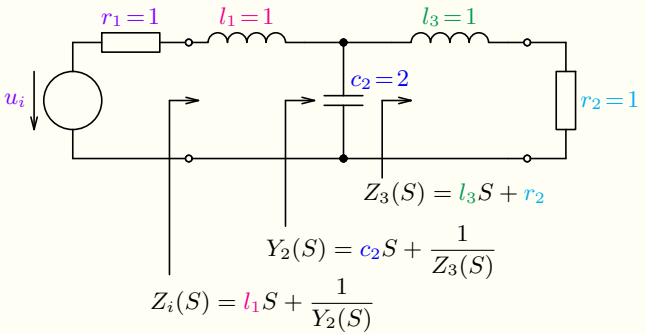
$$n \geq \frac{\log \frac{1}{k_1}}{\log \frac{1}{k}} \doteq 2{,}887141 \;\Rightarrow\; n = 3.$$

Nyní lze již sestavit přenosovou funkci. Vzhledem k tomu, že $\varepsilon = 1$ lze pro určení koeficientů Butterworthova polynomu (provozního činitele přenosu) použít přímo vztah (9.5) nebo jejich vyčíslení z tabulky 9.1 pro $n = 3$. Charakteristickou funkci $\varphi(s)$ má pro Butterworthovu aproximaci jednoduchý tvar, viz. (9.4).

$$H(S) = \frac{1}{G(S)} = \frac{1}{S^3 + 2S^2 + 2S + 1} \quad \text{a z (9.4)} \quad \varphi(S) = -S^3. \tag{17.23}$$

Pokud zvolíme normovanou hodnotu $r_1 = 1$, je normovaná vstupní impedance pro NLP dána vztahem (17.21), z něhož po úpravě na řetězový zlomek (continued-fraction) dostaneme tvar přímo vyjadřující hledanou LC strukturu filtru NLP, jak je patrné z následujícího obrázku.

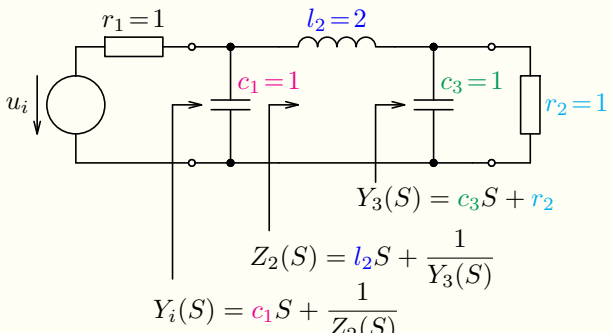
$$Z_i(S) = \frac{H^{-1}(S) + \varphi(S)}{H^{-1}(S) - \varphi(S)} = \frac{2S^3 + 2S^2 + 2S + 1}{2S^2 + 2S + 1} = 1S + \cfrac{1}{2S + \cfrac{1}{1S + 1}}. \tag{17.24}$$



Obrázek 17.19: Hledaná struktura filtru NLP sestavená pomocí T článků, viz také analýzu.

Pokud vyjdeme ze vstupní admitance $Y_i(S) = \frac{1}{Z_i(S)}$, dostaneme strukturu začínající příčným kapacitorem, tj. sestavenou od pomocí T článků. Postup je analogický, jak dokládá následující ukázka.

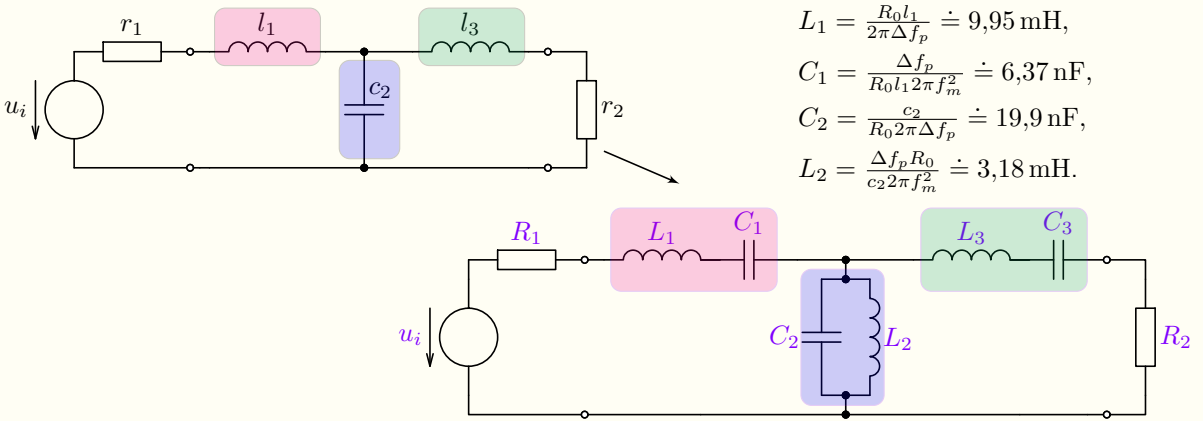
$$Y_i(S) = \frac{H^{-1}(S) - \varphi(S)}{H^{-1}(S) + \varphi(s)} = \frac{2S^2 + 2S + 1}{2S^3 + 2S^2 + 2S + 1} = \cfrac{1}{1S + \cfrac{1}{2S + \cfrac{1}{1S + 1}}}. \tag{17.25}$$



Obrázek 17.20: Hledaná struktura filtru NLP sestavená pomocí Π článků.

Výsledný filtr požadovaného typu pásmové propusti dostaneme kmitočtovou transformací jednotlivých prvků dle tabulky 17.1. Zároveň provedeme i impedanční odnormování dle zadání ($R_0 = 1\,\mathrm{k\Omega}$) a dostaneme, přičemž vzhledem k simetrii platí $R_1 = R_2$, $L_1 = L_3$ a $C_1 = C_3$:

$$R_1 = r_1 R_0 = 1\,\mathrm{k\Omega},$$
$$L_1 = \frac{R_0 l_1}{2\pi\Delta f_p} \doteq 9{,}95\,\mathrm{mH},$$
$$C_1 = \frac{\Delta f_p}{R_0 l_1 2\pi f_m^2} \doteq 6{,}37\,\mathrm{nF},$$
$$C_2 = \frac{c_2}{R_0 2\pi\Delta f_p} \doteq 19{,}9\,\mathrm{nF},$$
$$L_2 = \frac{\Delta f_p R_0}{c_2 2\pi f_m^2} \doteq 3{,}18\,\mathrm{mH}.$$

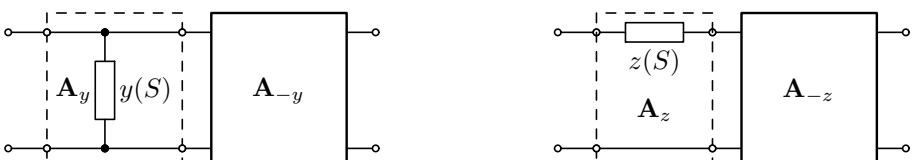


Obrázek 17.21: Struktura filtru BP získaná transformací z NLP, viz analýzu.

Syntéza LC struktury NLP z kaskádní matice

Nevýhodou předchozí metody realizace LC struktury ze vstupní impedance je její nemožnost použití pro eliptické filtry, tj. vykazující nuly přenosu. Obecné metody, které tuto výhodu odstraňují vycházejí z dvojbranového popisu LC struktury. Dále je stručně představena metoda, vycházející z kaskádní matice struktury. Metody založené na impedančním nebo admitančním popisu jsou uvedeny v [16].

Realizace reaktančního dvojbranu z kaskádní matice $\mathbf{A}$ je založena na tzv. odštěpení dvojbranu v příčné a podélné větvi, jak ukazuje následující obrázek, kde $\mathbf{A}_z$, resp. $\mathbf{A}_y$ jsou matice (17.26) odštěpených dvojbranů a $\mathbf{A}_{-z}$, resp. $\mathbf{A}_{-y}$ jsou zbytkové matice struktury po odštěpení.



Obrázek 17.22: Odštěpení dvojbranu příčné (a) a podélné (b) větve LC struktury popsané kaskádní maticí $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A}_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y & 1, \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_z = \begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{17.26}$$

Pro zbytkové matice platí vztahy vyplývající z relace $\mathbf{A} = \mathbf{A}_z \cdot \mathbf{A}_{-z}\mathbf{A}_y \cdot \mathbf{A}_{-y}$, přičemž $\mathbf{A}$ s prvky $a_{11}(S)$, $a_{12}(S)$, $a_{21}(S)$, $a_{22}(S)$ je výchozí matice struktury, ze které se odštěpuje.

$$\mathbf{A}_{-y} = \mathbf{A}_y^{-1} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}(S) & a_{12}(S) \\ a_{21}(S) - y \cdot a_{11}(S) & a_{22}(S) - y \cdot a_{12}(S) \end{bmatrix}, \tag{17.27}$$

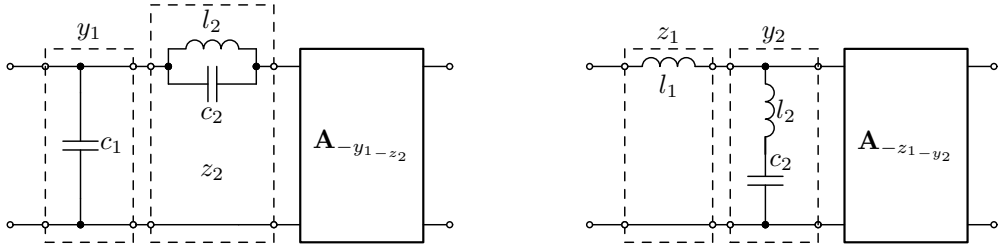
$$\mathbf{A}_{-z} = \mathbf{A}_z^{-1} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}(S) - z \cdot a_{21}(S) & a_{12}(S) - z \cdot a_{22}(S) \\ a_{21}(S) & a_{22}(S) \end{bmatrix}. \tag{17.28}$$

V případě polynomiálních přenosových funkcí se odštěpuje pouze kapacitor nebo induktor, přičemž pro jejich hodnoty[2] vzhledem k relacím $z_{11} = \frac{a_{22}}{a_{21}}$ a $y_{11} = \frac{a_{22}}{a_{12}}$ (viz kapitolu 7.4.8) platí:

$$c = \frac{1}{S} \cdot \frac{a_{22}(S)}{a_{12}(S)}\bigg|_{S=\infty}, \quad l = \frac{1}{S} \cdot \frac{a_{11}(S)}{a_{21}(S)}\bigg|_{S=\infty}. \tag{17.29}$$

V případě eliptických přenosových funkcí se mimo základních prvků odštěpují i rezonanční obvody (RO) struktury eliptického filtru NLP na obrázku 17.18. Postup je ukázán dále na obrázku 17.23.

[2] Opět se jedná o prvky NLP, tj. používáme značení c, l pro obvodové prvky a S pro normovaný operátor.



Obrázek 17.23: Odštěpení dvojbranů Π (a) nebo T-struktury (b) eliptického LC filtru NLP.

Podle obrázku (a) se odštěpí nejprve dvojbran y_1 s příčným kapacitorem c_1 a vypočte se zbytková matice $\mathbf{A}_{-y_1}$ dle (17.27). Následně se odštěpí dvojbran z_2 s paralelním RO o ipmpedanci $Z_2(S) = \frac{Sl_2}{1+S^2 l_2 c_2} = \frac{S}{c_2(S^2+\Omega_{\infty 2}^2)}$ a vypočte zbytková matice $\mathbf{A}_{-y_{1-z_2}}$ dle (17.28). Hodnoty prvků se určí z následujících relací:

$$c_1 = \frac{1}{S} \cdot \frac{a_{22}(S)}{a_{12}(S)}\bigg|_{S^2=-\Omega_{\infty 2}^2}, \quad \frac{1}{c_2} = \frac{S^2+\Omega_{\infty 2}^2}{S} \cdot \frac{a_{11_{(-y_1)}}(S)}{a_{21_{(-y_1)}}(S)}\bigg|_{S^2=-\Omega_{\infty 2}^2}, \quad l_2 = \frac{1}{\Omega_{\infty 2}^2 c_2} \quad \text{pro případ (a)} \quad (17.30)$$

kde $j\Omega_{\infty i} = j\frac{1}{\sqrt{c_i l_i}}$ jsou póly kaskádních parametrů = nuly přenosové funkce.

Analogicky se postupuje v případě realizace T-struktury podle obrázku 17.18 (b). Po odštěpení dvojbranu s podélným induktorem l_1, vypočte se zbytková matice $\mathbf{A}_{-z_1}$ dle (17.28) a následně se odštěpí dvojbran y_2 se paralelním RO o admitanci $Y_2(S) = \frac{Sc_2}{1+S^2 l_2 c_2} = \frac{S}{l_2(S^2+\Omega_{\infty 2}^2)}$ a vypočte zbytková matice $\mathbf{A}_{-z_{1-y_2}}$ dle (17.27). Hodnoty prvků se určí z následujících relací:

$$l_1 = \frac{1}{S} \cdot \frac{a_{11}(S)}{a_{21}(S)}\bigg|_{S^2=-\Omega_{\infty i}^2}, \quad \frac{1}{l_2} = \frac{S^2+\Omega_{\infty i}^2}{S} \cdot \frac{a_{22_{(-z_1)}}(S)}{a_{12_{(-z_1)}}(S)}\bigg|_{S^2=-\Omega_{\infty i}^2}, \quad c_2 = \frac{1}{\Omega_{\infty i}^2 l_2} \quad \text{pro případ (b)} \qquad (17.31)$$

Následuje příklad použití.

Příklad 17.2 *Syntéza LC struktury filtru z kaskádní matice*

Zadání: Určete LC strukturu NLP z příkladu 17.1 pomocí odštěpování prvků z kaskádní matice.

Řešení: Pro $s = 0$ platí pro napěťový přenos $H_U(0) = \frac{r_2}{r_1+r_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow r_2 = r_1 = 1$, což souhlasí s relací (17.11), resp. (17.12). Pak dle (17.20) sestavíme kaskádní matici, přičemž $H(S)$ a $\varphi(S)$ je dáno (17.23).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1+2S^2 & 2S^3+2S \\ 2S & 1+2S^2 \end{bmatrix} \qquad (17.32)$$

Podle (17.29) odštěpíme nejprve podélný induktor l_1, vypočteme zbytkovou matici $\mathbf{A}_{-z_1}$ dle (17.28), dále odštěpíme příčný kapacitor c_2, vypočteme zbytkovou matici $\mathbf{A}_{-z_{1-y2}}$ dle (17.27), ze které je zřejmé, že zbývá odštěpit poslední podélný induktor l_3, přičemž poslední zbytková matice vyjde jednotková.

$$l_1 = \frac{1}{S} \cdot \frac{a_{11}(S)}{a_{21}(S)}\bigg|_{S=\infty} = 1, \quad \mathbf{A}_{-z_1} = \begin{bmatrix} 1 & S \\ 2S & 1+2S^2 \end{bmatrix}, \quad c_2 = \frac{1}{S} \cdot \frac{a_{22_{-z_1}}(S)}{a_{12_{-z_1}}(S)}\bigg|_{S=\infty} = 2,$$

$$\mathbf{A}_{-z_{1-y2}} = \begin{bmatrix} 1 & S \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad l_3 = \frac{a_{12_{-z_{1-y2}}}}{S} = 1, \quad \mathbf{A}_{-z_{1-y2-z_3}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ve výsledku dostaneme samozřejmě stejnou strukturu jako na obrázku 17.19. Pokud sestavíme matici pro odštěpování Π článků ($a_{11} \leftrightarrow a_{22}$, $a_{12} \leftrightarrow a_{21}$), dostaneme výchozí matici v následujícím tvaru a analogickým postupem dostaneme strukturu 17.20.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1+2S^2 & 2S \\ 2S^3+2S & 1+2S^2 \end{bmatrix}, \quad c_1 = \frac{1}{S} \cdot \frac{a_{22}(S)}{a_{12}(S)}\bigg|_{S=\infty} = 1, \quad \mathbf{A}_{-y_1} = \begin{bmatrix} 1+2S^2 & 2S \\ S & 1 \end{bmatrix},$$

$$l_2 = \frac{1}{S} \cdot \frac{a_{11_{-y_1}}(S)}{a_{2,1_{-y_1}}(S)}\bigg|_{S=\infty} = 2, \quad \mathbf{A}_{-y_{1-z_2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S & 1 \end{bmatrix}, \quad c_3 = \frac{a_{21_{-y_{1-z_2}}}}{S} = 1, \quad \mathbf{A}_{-y_{1-z_{2-y_3}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uvedený postup syntézy lze odvodit i pro případ odštěpování prvků směrem od zátěže. Pro struktury filtrů zakončené naprázdno nebo nakrátko nelze pro syntézu použít výkonový přenos, ale je nutné pracovat s napěťovým nebo proudovým přenosem. Mění se pak vztahy pro prvky matice dvojbranu, které je třeba pro danou variantu upravit. Odvození přesahuje rámec tohoto materiálu a lze ho nalézt např. v [16, 15].

Úprava struktury a optimalizace LC filtrů

Při návrhu struktury se mohou vyskytnout záporné prvky (typicky pro Cauerovu aproximaci sudého řádu), což lze řešit transformátorovou vazbou [15] nebo použitím variant aproximace C, resp. B, viz obrázek 9.14.

Další modifikace se používají při návrhu úzkopásmových (BP) filtrů, u kterých vychází velký rozptyl hodnot prvků pro klasickou příčkovou strukturu. V těchto případech se pak navrhují topologické úpravy využívající:

- induktory s odbočkou,
- Nortnovu transformaci,
- i další postupy.

Problematika syntézy pasivních lineárních obvodů je značně rozsáhlá a velmi dobře propracovaná. Další rozbor přesahuje rámec tohoto materiálu a zájemci mohou vyjít např. z [16], kde je uvedeno i mnoho odkazů na další literaturu.

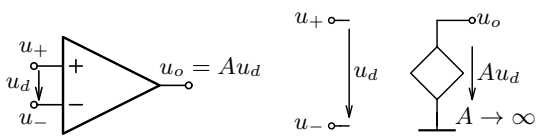
Jak bylo uvedeno, pasivní filtry jsou prakticky nezastupitelné ve výkonové elektronice. Nicméně v oblastech, kde lze použít integrované formy implementace jsou vytlačovány. Výhodou inovativních řešení je jejich miniaturizace i další výhody, vyplývající z použití aktivních prvků, jak bude nastíněno dále.

17.3. Aktivní prvky pro realizaci analogových filtrů

V praxi se často chceme vyhnout použití cívek pro realizaci induktorů. Tento požadavek je aktuální zejména pro integrované filtry. Pro realizaci takových filtrů je třeba buď induktor nahradit vhodným zapojením nebo použít jinou techniku realizace přenosové funkce. Ve výsledných zapojeních se bude jako zapojení Všechny metody nevyužívá přímo tranzistorů, ale „speciálních“ prvků z nich složených.

17.3.1. Operační zesilovač

Operační zesilovač je jedním ze základních stavebních prvků analogových obvodů. Jeho funkce byla představena v kapitole 11. OZ jako lineární prvek (zesilovač) musí fungovat se ZZV, jelikož zesílení je v ideálním případě $A = \frac{u_o}{u_d} \to \infty$.

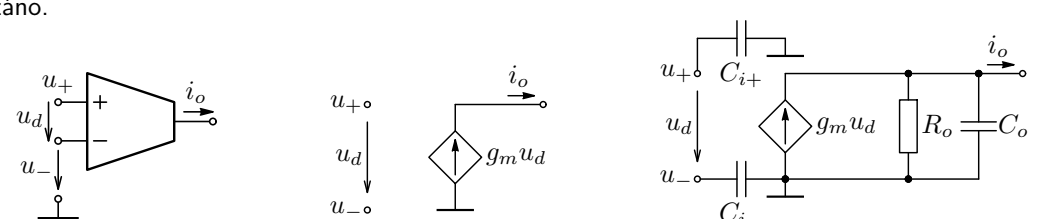


Obrázek 17.24: Schématická značka a model ideálního OZ.

Konstrukci vnitřního zapojení se věnuje kapitola 16 a rozborem jeho reálných vlastností kapitola 12. Z pohledu kmitočtových filtrů není většinou kritická omezená velikost zesílení A, ale jeho kmitočtová závislost se zlomovým kmitočtem f_0 na velmi nízkém kmitočtu (viz kapitolu 12.3.1 a obrázek 12.15), což představuje výrazné omezení zejména pro vf filtry. Pro filtry se mnohdy využívá integrátor, který byl představen v kapitole 11.10, viz také 12.3.4. Pro konstrukci filtrů lze však využít další prvky a to zejména transkonduktanční zesilovač a proudový konvejor.

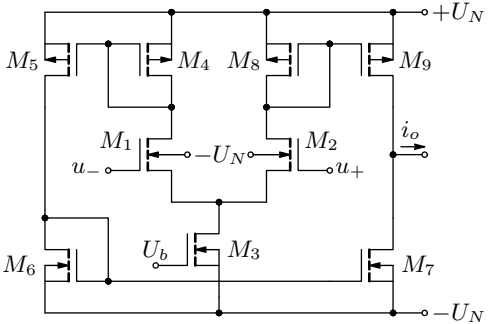
17.3.2. Transkonduktanční zesilovač – OTA

Transkonduktanční zesilovač (Transconductance Operational Amplifier – OTA) je stejně jako operační zesilovač řízen rozdílem napětí na dvou vstupech s minimálním vstupním proudem. Výstupem je však proud, tj. rozdílem vstupních napětí se řídí výstupní proud $i_o = g_m u_d$, jak ukazuje obrázek (b). Na rozdíl od OZ (kde je snahou $A \to \infty$), je hodnota převodní vodivosti OTA g_m konečná (malá) $\Rightarrow$ není nutná ZV, tj. vlastnosti výsledných zapojení závisí na hodnotě g_m, kterou lze řídit. To je výhoda zejména pro konstrukci kmitočtových filtrů, jak bude dále ukázáno.



Obrázek 17.25: Schématická značka OTA (a), náhradní idealizované schéma (b) a lineární model (c).

Oproti OZ je hodnota g_m konečná a využívá se ke změně parametrů výsledného obvodu. Nevýhodou je pak malý rozsah vstupního napětí, který lze zesilovačem zpracovat lineárně – viz obrázek 16.50 pro BJT a 16.53, resp. vztah (16.86) pro FET, jelikož základem implementace OTA je rozdílový stupeň. Jedno z nejjednodušších vnitřních zapojení OTA je uvedeno na dalším obrázku.

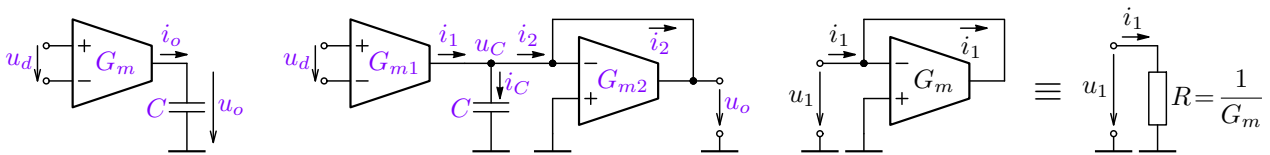


Typické parametry:

- $C_i = 100^1$ fF, $C_o = 100^1$ fF až 10^0 pF,
- $g_m = 10^1$ µS, $g_o = 10^1$ nS,
- příklad IO: OPA860 bipolární OTA pro širokopásmové systémy: $f_t = 80\,\mathrm{MHz}$, $S = 900\,\mathrm{V/\mu s}$, $g_m = 95\,\mathrm{mS}$.

Transkonduktanci g_m lze řídit pomocí I_{M3}, resp. U_b, viz (16.78), (16.89) a komentář. Použití „diskrétních“ OTA je (oproti OZ) požadováno výjimečně – většinou se integruje více zesilovačů na jednom čipu dle konkrétní aplikace.

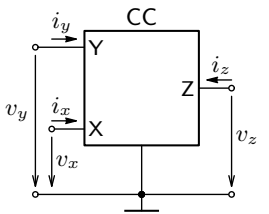
Implementace ideálního a ztrátového integrátoru, tj. základních bloků analogových filtrů je na následujícím obrázku.



(a): $u_o(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t G_m u_d(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ (b): $\dfrac{U_o(s)}{U_d(s)} = \dfrac{G_{m1}U_d(s)\left(Z_C(s)\|\frac{1}{G_{m2}}\right)}{U_d(s)} = \dfrac{G_{m1}}{G_{m2}+sC}$ (c): $\dfrac{u_1}{i_1} = \dfrac{u_1}{u_1 G_m} = \dfrac{1}{G_m}$

Obrázek 17.26: Zapojení ideálního (a) a ztrátového (b) integrátoru a implementace rezistoru pomocí OTA (c).

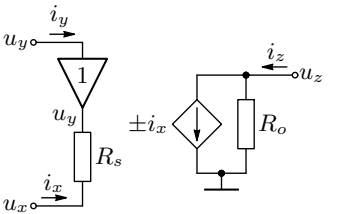
17.3.3. Proudový konvejor – CC



$u_x = u_y,\ i_z = \pm i_x,\ i_y = \alpha i_x,$

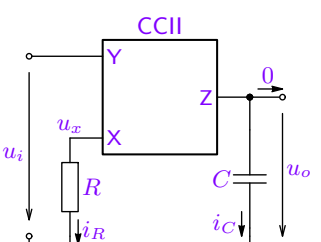
- $0 < \alpha \leq 1$, ,CCI,
- $\alpha = 0$, CCII,
- $\alpha = -1$, CCIII.

(a)



(b)

Obrázek 17.27: Schématická značka proudového konvejoru s popisem idealizovaného chování pro různé typy (a) a odporový lineární model konvejoru CCII (v ideálním případě je $R_s \to 0$ a $R_o \to \infty$).



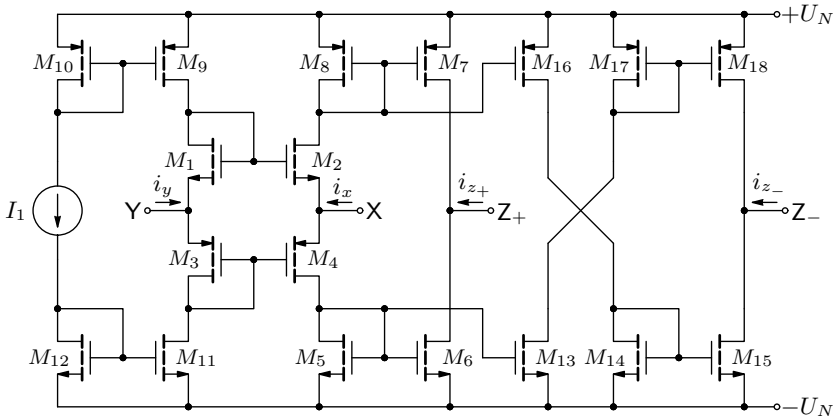
Pro stavbu aktivních filtrů je důležitá implementace integrátoru pomocí CCII, která je uvedena na obrázku vlevo. Dle výše uvedeného pak platí:

$$u_x = u_y = u_i, \quad i_R = \frac{u_i}{R} = -i_x = -i_z = i_C \tag{17.33}$$

$$\Rightarrow u_o(t) = \frac{1}{C}\int_0^\tau i_C(t)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{RC}\int_0^\tau i_C(t)\,\mathrm{d}\tau, \quad H(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{RCs}. \tag{17.34}$$

Obrázek 17.28: Zapojení ideálního integrátoru s proudovým konvejorem a jeho přenos.

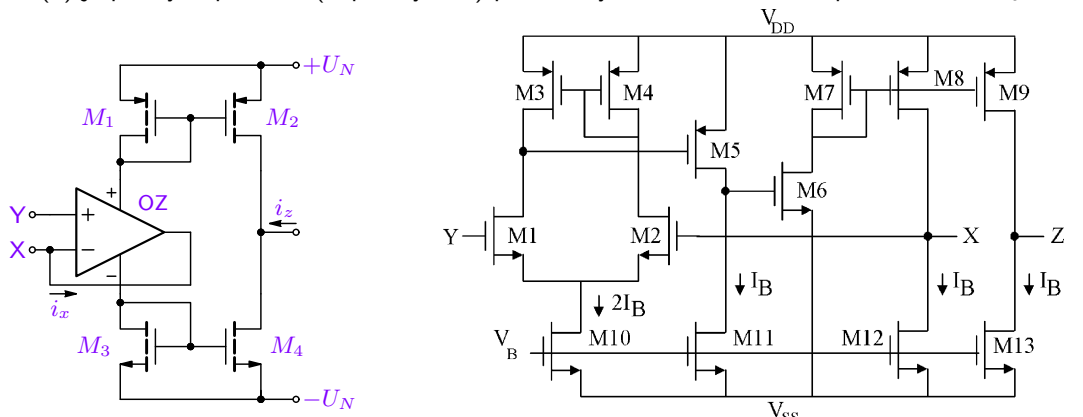
Obvodová implementace proudového konvejoru využívá zejména zrcadlení proudu. Vstupní obvod je pak tvořen buď zapojením SG nebo diferenčním párem, jak ukazuje obrázek 17.30.



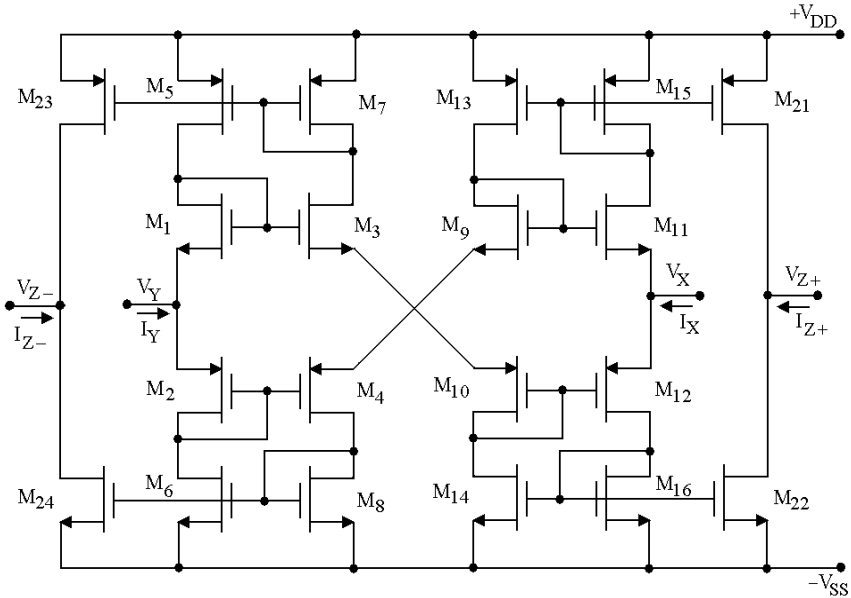
Obrázek 17.29: Obvodová implementace proudového konvejoru CCII s komplementárními výstupy Z_+ a Z_-.

Tranzistory M_1 až M_4 zajišťují podmínku $u_x \doteq u_y$, jelikož napětí gatů jsou stejná a rozdíl napětí sourců je malé (závisí na rozvážení proudů M_2 a M_4 proudem i_x). Proudy M_1 i M_3 jsou dány pouze zdrojem I_1, tj. proud $i_y = 0$ a díky dalším proudovým zrcadlům platí $i_x = i_{z_+} = -i_{z_-}$.

Další obvodová realizace CCII vychází z konceptu zapojení na obrázku 17.30 (a), který se využívá i praktických aplikacích s OZ jako řízený proudový zdroj s dobrou stabilitou i při induktivních zátěžích. Většinou se používají Wilsonova zrcadla pro větší přesnost – 16.1.6, případně modifikace pro větší proudy, viz analýzu. Implementace na tranzistorové úrovni pak vychází s rozdílového stupně s prostým zdrcadlením proudu a ZV zavedenou ze vstupu X. V zapojení (b) je pro vyšší přesnost (napěťový zisk) použita dynamická zátěž M_{11} pro zesilovač M_5.



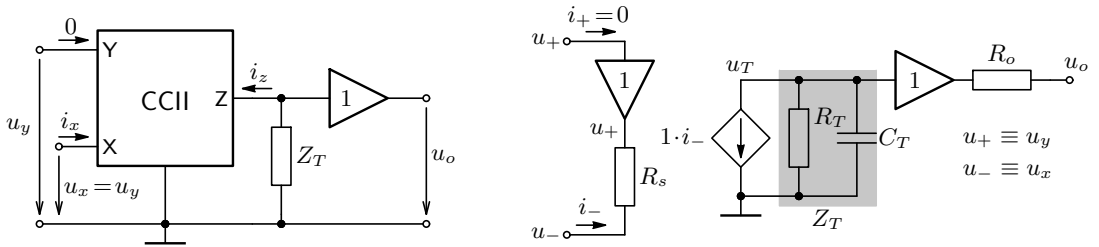
Obrázek 17.30: Zapojení proudového konvejoru CCII s OZ a jeho tranzistorová implementace, obrázek převzat.



Obrázek 17.31: Implementace proudového konvejoru CCIII se zrcadly zajišťujícími $i_y = -i_x$, obrázek převzat.

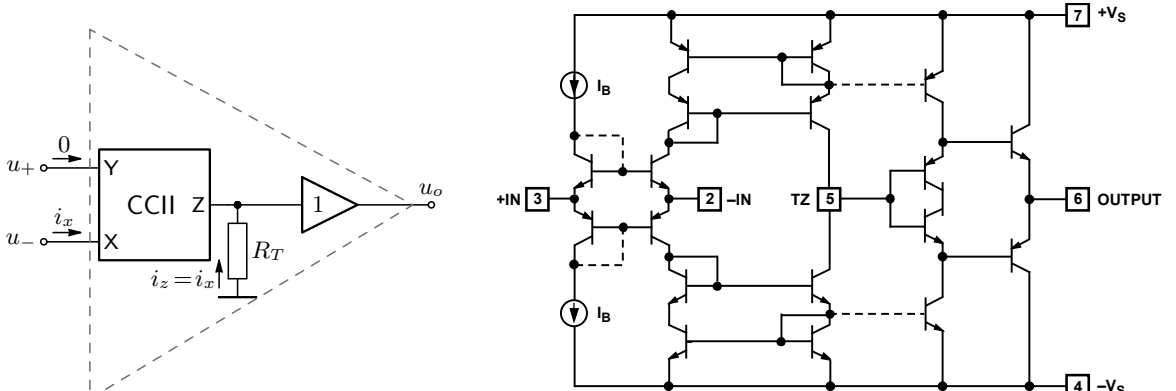
17.3.4. Transimpedanční zesilovač – TIA

Doplněním proudového konvejoru o napěťový sledovač (zesilovač napětí se zesílením 1, nulovým vstupním a nekonečným vstupním odporem) dostaneme tzv. transimpedanční zesilovač. Jeho uspořádání je uvedeno na obrázku 17.32 (a) a základní lineární model na obrázku (b). Jedná se o zesilovač, resp. konverzi vstupního proudu (invertujícího vstupu) na výstupní napětí, přičemž převodní konstantou je transimpedance Z_T. Ta má jednak rezistivní složku R_T a pak i parazitní kapacitní složku C_T, definující kmitočtovou šířku pásma.



Obrázek 17.32: Blokové schéma transimpedančního zesilovače: (a) ideové schéma s CCII a (b) jeho základní lineární model (pro ideální prvek platí $R_S \to 0$, $Z_T \to \infty$ a $R_o \to 0$).

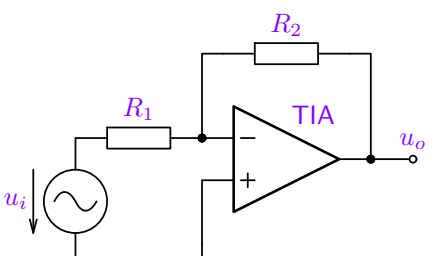
Klasickým představitelem vyráběného typu je zesilovač AD844, jehož zjednodušené schéma je uvedeno níže. Z něho je patrné zapojení vlastního proudového konvejoru typu CCII (analogie zapojení 17.29), jehož výstup 5 vede na napěťový sledovač. V konvejoru jsou použita Wilsonova zrcadla, díky nímž se dosahuje velkého výstupního odporu, který právě představuje transimpedanci R_T. Aby nebyl tento uzel zatížen, je návazný napěťový sledovač (SC) tvořen darligtonovým zapojením, díky čemuž má velmi vysoký vstupní odpor.

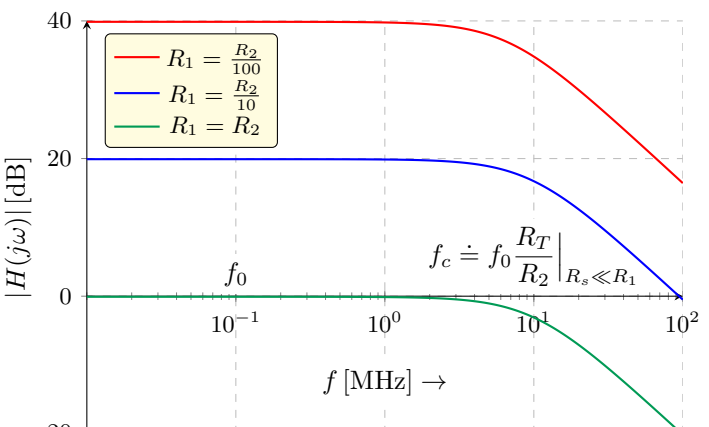


Obrázek 17.33: Blokové schéma transimpedančního zesilovače a jeho zjednodušené zapojení v případě obvodu AD844, obrázek převzat.

Tento zesilovač využívá velmi dobrých kmitočtových vlastností proudového konvejoru, které v kombinaci s proudovým (nízkoimpedančním) vstupem vedou na kmitočtové vlastnosti odvozené v kapitole 10.8.2. To znamená, že zlomový kmitočet modulové charakteristiky je pro $R_s \ll R_2$ dán vztahem (10.19)., tj. jeho nezávislost na zesílení na rozdíl od (10.17). Výsledky lze ověřit analýzou, včetně symbolických a porovnat s výsledky příkladu 10.3.

Transimpedanční zesilovač lze použít místo klasického OZ při realizaci kmitočtových filtrů a dále při zpracování proudových signálů, typicky proudů fotodiod, viz např. LMH34400 a TIA_TI. Uvedené kmitočtové odezvy dostaneme i pro neinvertující zapojení.





Obrázek 17.34: Invertující zesilovač s transimpedančním zesilovačem a jeho modulové charakteristiky.

17.4. ARC filtry – simulace prvků LC prototypu

Jedná se o metodu, která využívá přímou náhradu induktoru aktivním prvkem nebo impedanční transformaci, která v daném obvodovém uspořádání změní charakter použitých prvků. V této oblasti se využívají především dva postupy:

1. Náhrada induktorů v pasivní LC struktuře pomocí transformačních dvojbranů, tj. konvertorů nebo invertorů impedance.
2. Použití Brutonovy transformace a aplikace dvojných kapacitorů realizovaných pomocí konvertoru impedance.

V obou případech se pro realizaci využívá aktivního prvku ve speciálním zapojení, které slouží pro náhrada induktoru nebo realizaci dvojného kapacitoru. Vzhledem k tomu, že je snahou nahradit induktoru, tak jsou kmitočtové vlastnosti zapojení určeny RC strukturami – z toho název ARC (Aktivní RC struktury). Jako aktivní (zesilující) prvek se využívá operační nebo transkonduktanční zesilovač i další typy, které jsou stručně představeny v předchozí podkapitole.

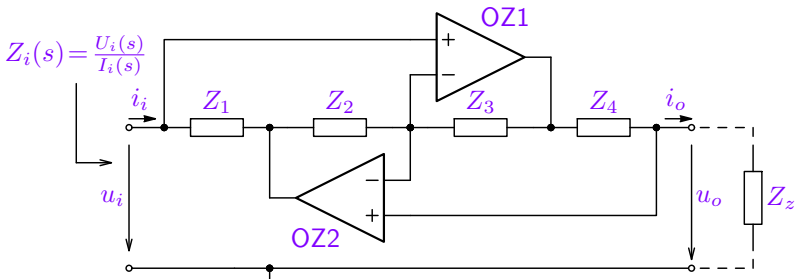
Pro konverzi impedance slouží tzv. transformační dvojbrany, které dělíme na

- ➢ Konvertory, které impedanci konvertují a lze jimi řešit oba výše uvedené postupy (❶ i ❷).
- ➢ Invertory, které invertují impedanci z jedné strany na druhou a umožňují řešit náhradu induktorů (bod ❶).

Dále jsou oba přístupy stručně představeny.

17.4.1. Použití konvertorů impedance pro implementaci LC filtru

Impedanční konvertor byl již zmíněn v kapitole 11.13. Z tohoto zapojení vychází obecný, tzv. Antoniův impedanční konvertor (Generalized Impedance Converter – GIC), který je jeden z nejpoužívanějších.



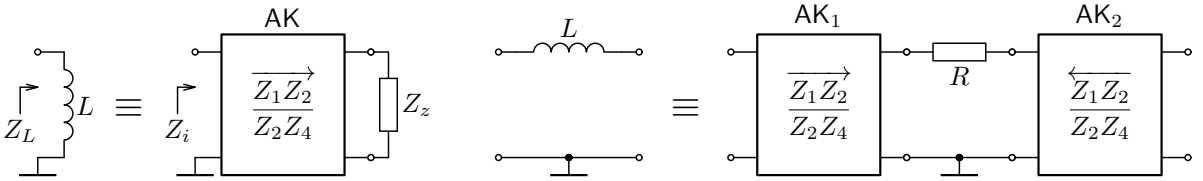
$$Z_i(s) = \frac{Z_1(s)Z_3(s)}{Z_2(s)Z_4(s)} Z_z(s) \qquad (17.35)$$

Obrázek 17.35: Zapojení Antoniova konvertoru a výraz pro vstupní impedanci.

Z odvození vlivu reálných vlastností OZ a stabilitu obvodu (viz [16]) vyplývá doporučený postup návrhu, který vede na podmínku $|Z_2| = |Z_3|$, $|Z_4| = |Z_z|$ a na doporučení pro dvě varianty konvertoru s OZ pro realizaci „syntetického induktoru“:

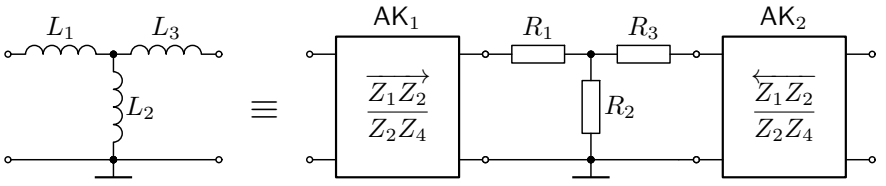
- $Z_2(s) = \frac{1}{sC_2}$, ostatní Z = odpory $\Rightarrow Z_i(s) = sL = s\frac{R_1 R_3 R_z C_2}{R_4}$, při dodržení $R_3 = |(\omega_p C_2)^{-1}|$, $R_z = R_4$,
- $Z_4(s) = \frac{1}{sC_4}$, ostatní Z = odpory $\Rightarrow Z_i(s) = sL = s\frac{R_1 R_3 R_z C_4}{R_2}$, při dodržení $R_z = |(\omega_p C_4)^{-1}|$, $R_3 = R_2$,

Induktor ve struktuře LC filtru pak lze nahradit níže uvedenými zapojeními. Je třeba zdůraznit, že konvertor pracuje vůči společné svorce. Plovoucí (neuzemněný) induktor lze realizovat zapojením se dvěma konvertory. Z tohoto důvodu je snahou minimalizovat jejich počet nebo strukturu LC filtru připravit tak, aby bylo možné konvertovat jejich skupinu, buď v podobě T-článku, jako na obrázku 17.37. Analogicky lze realizovat i Π-článek.



(a): $Z_i = \frac{Z_1 Z_3}{Z_2 Z_4} Z_z = Z_L = sL$ (b)

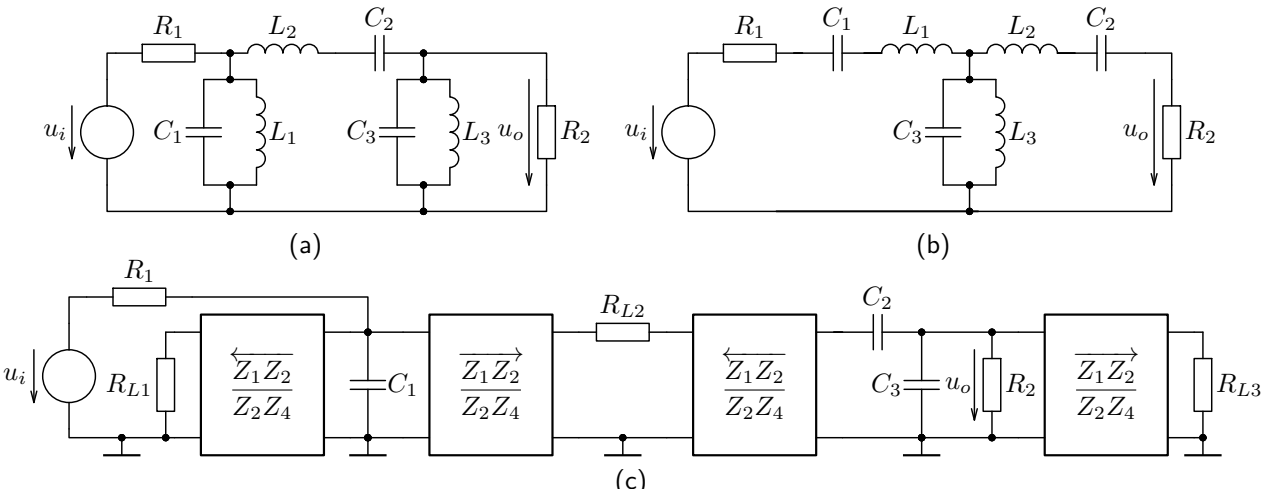
Obrázek 17.36: Využití Antoniova konvertoru pro realizaci induktoru (a) uzemněného a (b) plovoucího.



kde $L_k = R_k \frac{Z_1 Z_3}{Z_2 Z_4}$ pro $k = 1, 2, 3$.

Obrázek 17.37: Realizace induktorového T-článku pomocí konvertoru.

Následuje ukázka realizace LC filtru 6. řádu typu pásmová propust. Transformací filtru NLP lze získat následující LC struktury a následně jejich ARC realizaci.



Obrázek 17.38: Varianty pásmové propusti se strukturou T (a) nebo Π-článku (b) s prvky odnormovanými dle tabulky 17.1 a realizace varianty (a) s induktory implementovanými pomocí impedančních konvertorů (c).

V tomto případě je však výhodnější aplikace Nortonovy transformace (zejména pro úzkopásmové PP kde vychází příznivěji poměr hodnot prvků), která povede na dva podélné induktory a tři příčné paralelní rezonanční obvody. Na tuto strukturu pak lze s výhodou aplikovat Brutonovu transformace představenou dále, a tím redukovat zapojení pouze na 3 GIC (a 8 rezistorů a 2 kapacitory), viz [16].

Brutonova transformace

Další možností realizace LC filtru pomocí ARC struktury je použití zmíněné Brutonovy transformace, která transformuje impedance $Z(s)$ prvků LC struktury vztahem

$$Z_T(s) = Z(s)\frac{1}{sC_B}, \qquad (17.36)$$

kde C_B je transformační konstanta.

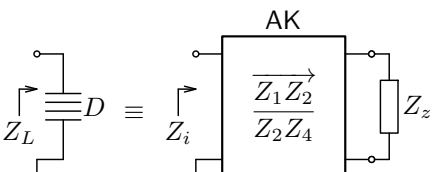
Transformace vede k **vyloučení induktoru ze struktury LC filtru**, které se transformují na rezistory, jak ukazuje tabulka 17.2 vpravo. Rezistory se transformují na kapacitory a dále se zavádí nový prvek, tzv. dvojný kapacitor D, který je výsledkem transformace klasického kapacitoru. Ten je třeba realizovat ARC strukturou – konvertorem.

původní prvek	⇒	transformovaný prvek
$Z(s) = sL$	⇒	$Z_T(s) = \frac{L}{C_B} = R_T$
$Z(s) = R$	⇒	$Z_T(s) = \frac{R}{sC_B} = \frac{1}{sC_T}$
$Z(s) = \frac{1}{sC}$	⇒	$Z_T(s) = \frac{1}{s^2C_BC} = \frac{1}{s^2D}$

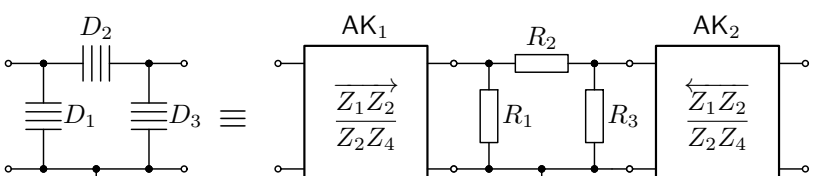
Tabulka 17.2: Brutonova transformace obvodových prvků L, R a C na transformované R_T, C_T a D.

Pro realizaci dvojného kapacitoru se opět využívá Antoniův konvertor, jak je ukázáno na následujícím obrázku. Pro realizaci dvojného kapacitoru jsou doporučeny následující tři varianty konvertoru s OZ:

- $Z_1(s) = \frac{1}{sC_1}$, $Z_z(s) = \frac{1}{sC_z} \Rightarrow Z_i(s) = \frac{1}{s^2 D} = \frac{R_3}{s^2 C_1 C_L R_2 R_4}$, při dodržení $R_4 = |(\omega_p C_L)^{-1}|$, $R_3 = R_2$,
- $Z_3(s) = \frac{1}{sC_3}$, $Z_z(s) = \frac{1}{sC_z} \Rightarrow Z_i(s) = \frac{1}{s^2 D} = \frac{R_1}{s^2 C_3 C_L R_2 R_4}$, při dodržení $R_2 = |(\omega_p C_3)^{-1}|$, $R_4 = |(\omega_p C_z)^{-1}|$,
- $Z_1(s) = \frac{1}{sC_1}$, $Z_3(s) = \frac{1}{sC_3} \Rightarrow Z_i(s) = \frac{1}{s^2 D} = \frac{R_z}{s^2 C_1 C_3 R_2 R_4}$, při dodržení $R_2 = |(\omega_p C_3)^{-1}|$, $R_4 = R_z$.



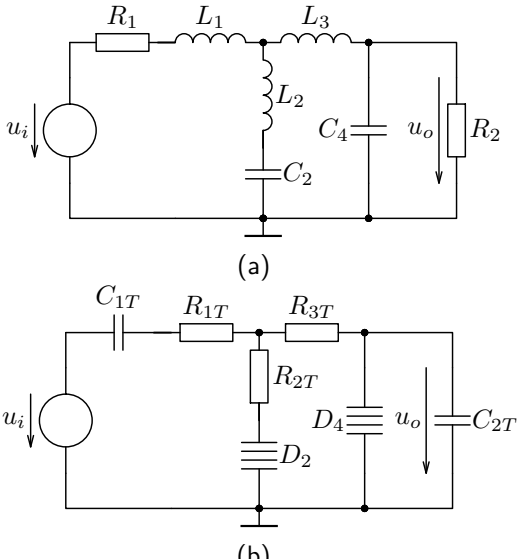
$$Z_i = \frac{Z_1 Z_2}{Z_2 Z_4} Z_z = Z_D = \frac{1}{s^2 D} \qquad (17.37)$$

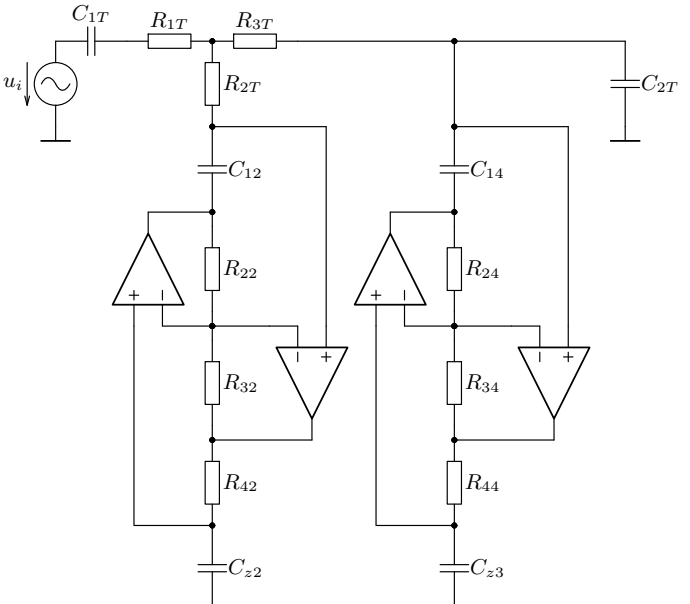


kde $D_k = R_k \frac{Z_1 Z_2}{Z_2 Z_4}$ pro $k = 1, 2, 3$.

Obrázek 17.39: Využití Antoniova konvertoru pro realizaci dvojného kapacitoru a konverze pro Π-článek.

Postup návrhu ukazují následující obrázky.



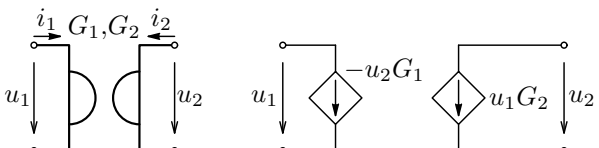


Obrázek 17.40: Zapojení LC filtru typu LP (a), jeho Brutonova transformace (b) a realizace pomocí GIC.

Uvedená řešení pomocí konvertorů jsou použitelná pouze v oboru nižších kmitočtů, díky kmitočtovým omezením použitých OZ. Pro vyšší kmitočty lze v omezeném rozsahu použít TIA, které mají však v těchto strukturách horší vlastnosti v oboru nízkých kmitočtů, což lze potvrdit simulací.

17.4.2. Použití invertorů impedance pro implementaci LC filtru

Další možností realizace syntetického induktoru je invertor – invertuje impedanci. Ten je reprezentován tzv. gyrátorem jehož schématická značka a model je na obrázku vpravo.



Obrázek 17.41: Schématická značka gyrátoru a jeho model.

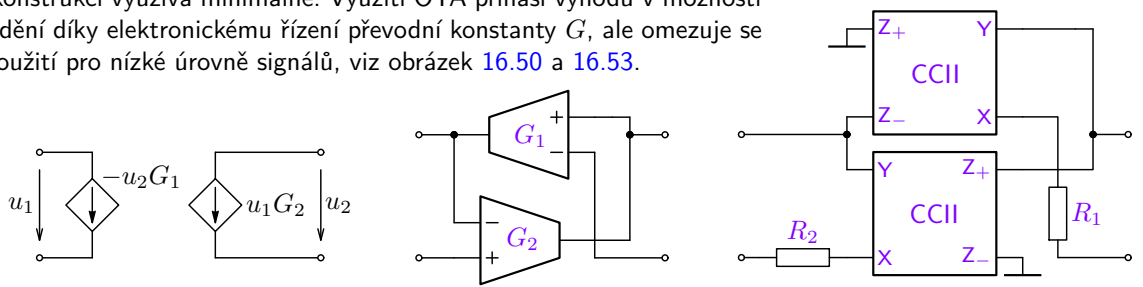


$$\frac{U_2(s)}{-I_2(s)} = Y(s) = \frac{U_2(s)}{-U_1(s)G_2} \Rightarrow$$

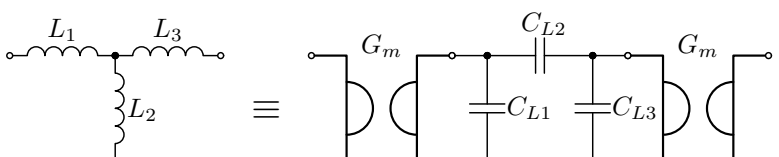
$$Z_i(s) = \frac{U_1(s)}{I_1(s)} = \frac{Y(s)}{G_1G_2} \quad (17.38)$$

Obrázek 17.42: Vstupní impedance gyrátoru pro zakončení admitancí Y.

Z obvodového modelu vyplývá i realizace gyrátoru jak pomocí transkonduktančních zesilovačů OTA, tak pomocí proudového konvertoru, jak je ukázáno na následujícím obrázku. Implementace gyrátoru pomocí OZ se pro složitou konstrukci využívá minimálně. Využití OTA přináší výhodu v možnosti přeladění díky elektronickému řízení převodní konstanty G, ale omezuje se na použití pro nízké úrovně signálů, viz obrázek 16.50 a 16.53.



Obrázek 17.43: Obvodová implementace gyrátoru pomocí OTA a proudového konvejoru druhého typu (CCII).



kde pro symetrický gyrátor platí

$$L_k = \frac{C_{Lk}}{G_m^2} \text{ pro } k = 1, 2, 3.$$

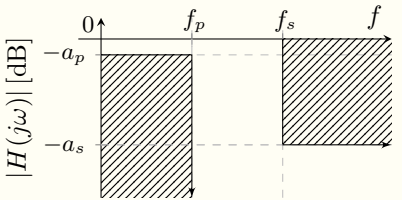
Obrázek 17.44: Gyrátor invertuje mimo jednotlivých prvků i strukturu – princip duality.

Konkrétní použití gyrátorové struktury pro realizaci LC filtru je ukázán na níže uvedeném příkladu.

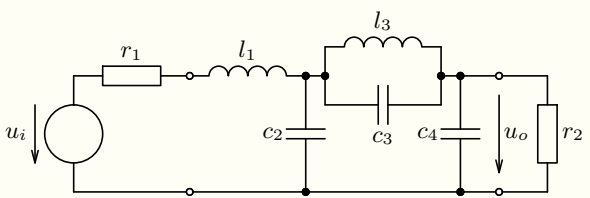
Příklad 17.3 *Funkční simulace LC prototypu Cauerovy dolní propusti*

Zadání: Navrhněte LC filtr typu dolní propust s následujícími hodnotami tolerančního schématu a implementujte jako ARC filtr pomocí gyrátorové struktury:

$$f_p = 100\,\mathrm{kHz}, \quad f_s = 190\,\mathrm{kHz}, \quad a_p = 1\,\mathrm{dB}, \quad a_s = 40\,\mathrm{dB}.$$



Řešení: Návrh provedeme v návrhovém systému SYNTFIL, ze kterého pro Cauerovu aproximaci varinty C získáme zapojení (obrázek vpravo) a hodnoty prvků. V tomto případě budou výhodnější normované hodnoty vzhledem k větším možnostem návrhu hodnot prvků výsledného zapojení.



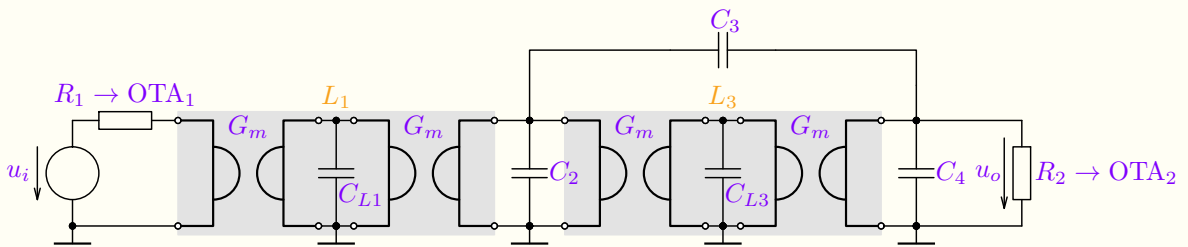
Pro hodnoty prvků NLP platí: $r_1 = r_2 = 2$, $l_1 \doteq 1{,}55$, $c_2 \doteq 1{,}48$, $l_3 \doteq 1{,}36$, $c_3 \doteq 0{,}13$, $c_4 \doteq 1{,}43$.

Pro odnormování hodnot prvků NLP platí vztahy dle tabulky 17.1, tj. $R = rR_0$, $L = \frac{lR_0}{\omega_p}$, $C = \frac{c}{R_0\omega_p}$. Pro následnou transformací L_1 a L_2 je hodnota C_{L1} a C_{L1} dána transformačním vztahem (17.38). Pokud zvolíme vodivosti všech gyrátorů stejné $G_{i1} = G_{i2} = G_m = \frac{1}{R_0}$, pak $C_{L1} = \frac{l_1 R_0 G_m^2}{\omega_p} = \frac{l_1 G_m}{\omega_p}$ a $C_{L3} = \frac{l_3 R_0 G_m^2}{\omega_p} = \frac{l_3 G_m}{\omega_p}$ a dále $C_i = \frac{c_i G_m}{\omega_p}$ pro $i = 2,\ 3,\ 4$.

Pro numerické hodnoty je vhodné provést volbu tak, aby vyhovovaly hodnoty kapacitorů i transkonduktancí zvolené technologii realizace. V tomto případě bylo zvoleno $G_m = 20\,\mu\mathrm{S}$. Hodnoty kapacit pak jsou:

$$C_{L1} \doteq 49{,}5\,\mathrm{pF},\ C_2 \doteq 47{,}2\,\mathrm{pF},\ C_{L3} \doteq 43{,}4\,\mathrm{pF},\ C_3 \doteq 4{,}15\,\mathrm{pF},\ C_4 \doteq 45{,}6\,\mathrm{pF}.$$

Implementace gyrátoru, resp. rezistorů R_1 a R_2, pomocí OTA jak je ukázáno na obrázku 17.43, resp. 17.26 (c), přináší výhodu v možnosti přelaďování/dolaďování filtru na přesný kmitočet, viz analýzu.

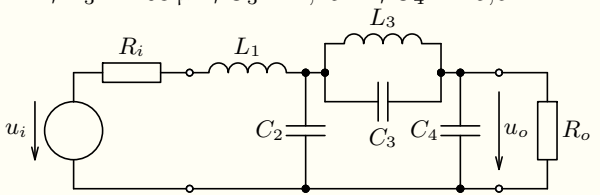


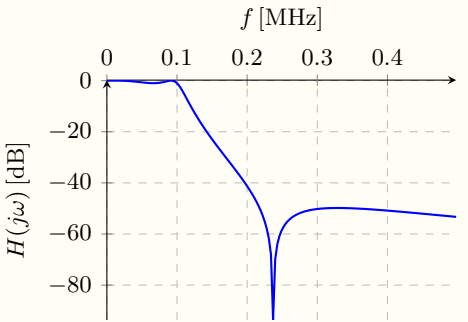
17.5. Implementace pomocí funkční simulace LC prototypu

Funkční simulace je další metoda implementace LC filtru pomocí aktivních prvků. Na rozdíl od předešlé metody se v tomto případě hledá systémový popis LC prototypu, který lze pak realizovat známými elektronickými bloky, zejména sumátory, integrátory, zesilovači (OZ, OTA, . . .). Postup je ukázán na konkrétním příkladu dolní propusti. V tomto případě se o implementaci pomocí funkční simulace, opět se zesilovači OTA, které umožňují přeladění filtru, viz simulace. Pro implementaci jiných typů filtrů, případně s jinými aktivními prvky viz [16].

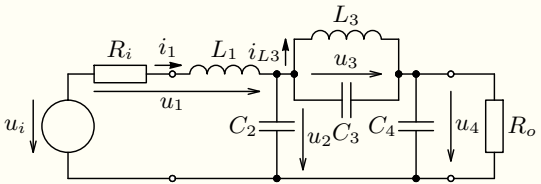
Příklad 17.4 *Funkční simulace LC prototypu Cauerovy dolní propusti*

Zadání: Je navržen LC filtr typu dolní propust s Cauerovou aproximací modulové charakteristiky, viz obrázky. Hodnoty prvků jsou následující: $R_i = R_o = 50\,\Omega$, $L_1 \doteq 124\,\mu\text{H}$, $C_2 \doteq 47{,}2\,\text{nF}$, $L_3 \doteq 108\,\mu\text{H}$, $C_3 \doteq 4{,}15\,\text{nF}$, $C_4 \doteq 45{,}6\,\text{nF}$.





Řešení: V obvodové struktuře označíme obvodové veličiny, které pak popíšeme odpovídajícími vztahy, přičemž proudy převedeme na napětí impedančním normováním konstantou R.



Všechny veličiny jsou uvažovány jako Laplaceovy obrazy, tj. $I_1 \equiv I_1(s)$, $U_2 \equiv U_2(s)$, ...

$$I_1 = \frac{1}{R_i + sL_1}\big(U_g - U_2\big) \Rightarrow U_1' = \frac{R}{sL_1 + R_i}\big(U_g - U_2\big),$$
$$I_{L3} = \frac{1}{sL_3}\big(U_2 - U_4\big) \Rightarrow U_3' = \frac{R}{sL_3}\big(U_2 - U_4\big),$$

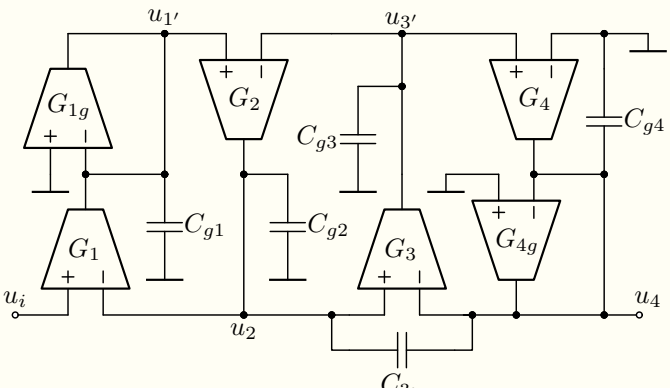
$$U_2 = \frac{1}{sC_2}\Big(I_1 - I_{L3} - sC_3\big(U_2 - U_4\big)\Big) = \frac{1}{sC_2R}\Big(U_1' - U_3' - sC_3R\big(U_2 - U_4\big)\Big),$$
$$U_4 = \frac{1}{\frac{1}{R_o} + sC_4}\Big(I_{L3} + sC_3\big(U_2 - U_4\big)\Big) = \frac{1}{\frac{R}{R_o} + sC_4R}\Big(U_3' + sC_3R\big(U_2 - U_4\big)\Big).$$

Získáme tak napěťové přenosy, které představují přenos ideálního nebo ztrátového integrátoru:

$$H_1 = \frac{R}{R_i + sL_1}, \qquad H_2 = \frac{1}{sC_2R}, \qquad H_3 = \frac{R}{sL_3} \quad \text{a} \quad H_4 = \frac{1}{\frac{R}{R_o} + sC_4R}. \tag{17.39}$$

Přenosy (17.39) pak lze realizovat pomocí OTA (viz obrázek 17.26) a výsledná realizační struktura pak odpovídá výše uvedeným relacím:

$$
\begin{aligned}
U_1' &= H_1\big(U_g - U_2\big)\\
U_2 &= H_2\Big(U_1' - U_3' - sC_3R\big(U_2 - U_4\big)\Big)\\
U_3' &= H_3\big(U_2 - U_4\big)\\
U_4 &= H_4\Big(U_3' + sC_3R\big(U_2 - U_4\big)\Big).
\end{aligned}
$$



Porovnáním přenosů (17.39) a vztahů z obrázku 17.26 dostaneme:

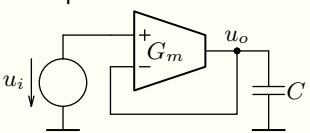
$$H_1 = \frac{R}{R_i + sL_1} = \frac{G_1}{G_{1g} + sC_{g1}} \;\Rightarrow\; C_{g1} = \frac{L_1G_1}{R}, \qquad H_2 = \frac{1}{sC_2R} = \frac{G_2}{sC_{g2}} \;\Rightarrow\; C_{g2} = G_2C_2R,$$

$$H_3 = \frac{R}{sL_3} = \frac{G_3}{sC_{g3}} \;\Rightarrow\; C_{g3} = \frac{G_3L_3}{R}, \qquad H_4 = \frac{1}{\frac{R}{R_o} + sC_4R} = \frac{G_4}{G_{4g} + sC_{g4}} \;\Rightarrow\; C_{g4} = C_4RG_4.$$

Z předchozích relací platí pro převodní vodivosti a kapacity struktury s OTA:

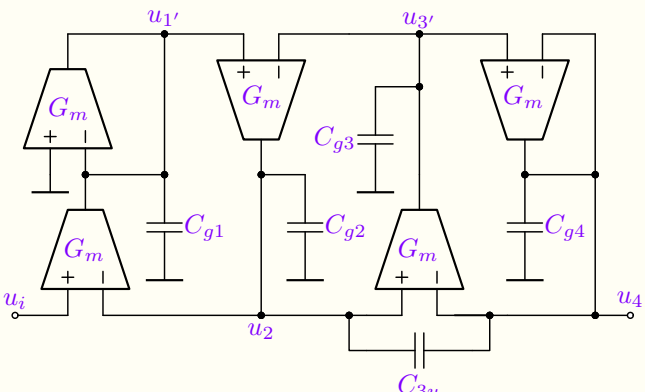
$$\frac{G_{1g}}{G_1}=\frac{R_i}{R},\quad C_{g1}=\frac{L_1G_1}{R},\quad C_{g2}=G_2C_2R,\quad C_{g3}=\frac{G_3L_3}{R},\quad \frac{G_{4g}}{G_4}=\frac{R}{R_o},\quad C_{g4}=C_4RG_4 \qquad (17.40)$$

Pokud zvolíme $R=R_o$, platí $G_{4g}=G_4$. Pak lze upravit koncovou větev dle obrázku níže.



$$\frac{U_o(s)}{U_i(s)}=\frac{G_m}{Cs+G_m}$$

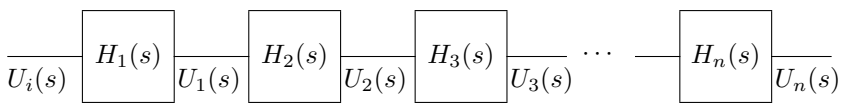
Vzhledem k relaci $R_i=R_o$ lze ve výsledném zapojení volit $G_1=G_{1g}=G_2=G_3=G_4=G_m$. Tuto úpravu však nelze provést u vstupní větve (pak by $u_1'=u_2$). Nakonec je nutné přepočítat i hodnotu C_3, tj. $C_{3u}=C_3G_mR$.



Pro volbu např. $G_m=6\,\mu\mathrm{s}$ pak pro hodnoty výsledných kapacit platí: $C_{1g}\doteq 14{,}8\,\mathrm{pF}$, $C_{2g}\doteq 14{,}1\,\mathrm{pF}$, $C_{3g}\doteq 13\,\mathrm{pF}$, $C_{4g}\doteq 13{,}7\,\mathrm{pF}$ a $C_{3u}\doteq 1{,}2\,\mathrm{pF}$. Pro ověření správnosti viz analýzu.

17.6. ARC filtry – kaskádní syntéza

Kaskádní syntéza je založena na rozkladu přenosové funkce na sekce druhého řádu – bikvadratické sekce, tzv. bikvady a jejich realizaci obvodovou strukturou. Jednotlivé sekce jsou zapojeny v kaskádě za sebou a jejich přenosové funkce odpovídají typům uvedeným v tabulkách 8.8 až 8.13.



$$H(s) = \frac{U_n(s)}{U_i(s)} = \prod_{k=1}^{n} H_k(s) \tag{17.41}$$

Obrázek 17.45: Blokové uspořádání kaskádní struktury filtru s n bloky a celková přenosová funkce.

Postup návrhu kaskádních filtrů

1. přiřazení pólů a nul = formování bikvadratických sekcí 2. řádu – bikvadů,
2. stanovení řazení sekcí (bikvadů),
3. rozdělení celkového zisku mezi jednotlivé sekce a
4. implementace bikvadů elektrickým obvodem.

Body 1 a 2 lze z matematického hlediska řešit libovolně, nicméně vzhledem k reálným vlastnostem zejména aktivních prvků existují doporučení, která je vhodné dodržet, viz např. [19] a návrhový systém SYNTFIL. Úlohu 3 je třeba řešit numericky tak, aby maxima všech přenosů $H_{i\to k}(s)$ byla stejná, viz vztah (8.6) a obrázky 9.16 až 9.18.

Realizace přenosových funkcí 2. řádu elektrickým obvodem

V obecném případě je třeba realizovat přenosovou funkci (8.5), resp. funkci v následujícím tvaru:

$$H_2(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2} \tag{17.42}$$

Při návrhu obvodu se nevyužívá induktoru, ale komplexně sdružené póly se realizují zpětnovazební RC strukturou se zesilujícím prvkem. Jako zesilující prvek se používá operační nebo transkonduktanční zesilovač a další typy, které byly představené v sekci 17.3. Na obvodové zapojení jsou kladeny následující požadavky:

- požadavek realizovatelnosti: vhodné hodnoty R a C pro danou technologii a s tím související rozptyl hodnot těchto obvodových prvků,
- pokud možno nezávislé nastavování parametrů filtru (ω_0, Q, ...) pomocí R a C a
- optimální citlivostní parametry obvodu.

Rozlišujeme relativní citlivosti parametrů ω_0 a Q bikvadratické přenosové funkce (17.42) na pasivní prvky na zesílení neinvertujícího zesilovače K i na konečné zesílení A_d reálného OZ a tzv. „Gain-sensitivity product“ Γ_x^P:

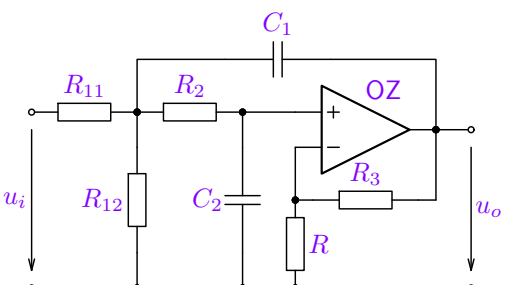
$$S_{x_i}^{\omega_0} = \frac{\partial \omega_0}{\partial x_i}\frac{x_i}{\omega_0}, \quad S_{x_i}^{Q} = \frac{\partial Q}{\partial x_i}\frac{x_i}{Q}; \qquad S_{K}^{\omega_0} = \frac{\partial \omega_0}{\partial K}\frac{K}{\omega_0}, \quad S_{K}^{Q} = \frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Q}; \tag{17.43}$$

$$S_{A_d}^{\omega_0} = \frac{\partial \omega_0}{\partial A_d}\frac{A_d}{\omega_0}, \quad S_{A_d}^{Q} = \frac{\partial Q}{\partial A_d}\frac{A_d}{Q}; \qquad \Gamma_A^P = A \cdot S_A^P, \quad \text{resp.} \quad \Gamma_K^P = K \cdot S_K^P. \tag{17.44}$$

Pro přenosovou funkci 2. řádu je nutné použít obvod se dvěma póly – dvěma časovými konstantami, tj. dvěma kapacitory. Tyto reálné póly jsou díky ZV konvertovány na komplexně sdružené (viz kapitolu 10.8.3, obrázek 10.19), k čemuž je nezbytný minimálně jeden aktivní prvek.

17.6.1. Realizace dolní propusti obvodem s jedním OZ

Jedno z nejpoužívanějších zapojení s jedním OZ je uvedeno na následujícím obrázku. Vstupní dělič slouží pouze k úpravě zisku a označme $R_{11}||R_{12} = R_1$. Pokud budeme dále uvažovat relace (17.45), platí níže uvedené vztahy:



$$R_3 = R(K-1), \qquad R_2 = rR_1, \quad C_2 = cC_1, \tag{17.45}$$

$$H(s) = \frac{K}{C_1C_2R_1R_2s^2 + C_1R_1(1-K)s + C_2R_1s + C_2R_2s + 1}, \tag{17.46}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}} = \frac{1}{R_1C_1\sqrt{rc}}, \tag{17.47}$$

$$Q = \frac{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}{R_1C_2 + R_2C_2 + R_1C_1(1-K)} = \frac{\sqrt{rc}}{rc + c + 1 - K}. \tag{17.48}$$

Obrázek 17.46: Realizace přenosové funkce 2. řádu typu LP tzv. obvodem Sallen–Key.

Pro návrh je třeba získat hodnoty čtyř prvků, přičemž jeden lze zvolit a zbývající tři hodnoty určit ze dvou parametrů (ω_0 a Q). Konkrétní návrh lze provést pomocí dvou postupů, které vyplývají z podrobného rozboru citlivostních parametrů, který je uveden v [16]. Výsledkem jsou níže uvedené doporučené postupy. Viz také dodatek P.

1. Návrhový postup vedoucí na minimální citlivosti S_{x_i} (vhodné pro $H_0 \leq 1$ a $Q < 5$)

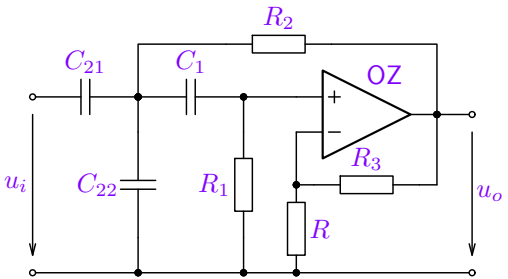
1. Volba $K = 1$ a $r = 1$ vede na $S^Q_{R_1} = S^Q_{R_2} = 0$ a $S^Q_{C_1} = -S^Q_{C_2} = 0{,}5$, ale na nevýhodné $S^Q_K = \Gamma^Q_K = \dfrac{1+r}{r}Q^2$.
2. Doporučení: algoritmus je vhodný pro celkové zesílení $H_0 \leq 1$ a dále pro $Q < 5$, jelikož $\dfrac{C_1}{C_2} = 4Q^2$.
3. Postup návrhu: volba C_1 a určení $C_2 = C_1/(4Q^2)$, $R_1 = R_2 = \dfrac{1}{\omega_0\sqrt{C_1 C_2}}$, $K = 1 \Rightarrow R_3 = 0$.

2. Návrhový postup s volbou citlivosti Γ^Q_K (vhodné pro $Q < 10$)

1. Volba C_1, C_2, přičemž je doporučeno $c = C_2/C_1 < 0{,}1$ pro vyhovující $\Gamma^Q_K = \dfrac{K^2}{1-K+c+rc}$, viz [16].
2. Výpočet optimálního poměru $r_{opt} = \dfrac{1}{18}\dfrac{1+6Q^2c+6Q^2+\sqrt{1+12Q^2c+12Q^2}}{Q^2c}$ dle [16].
3. Určení $R_1 = \dfrac{1}{\omega_0 C_1\sqrt{r_{opt}c}}$, $R_2 = r_{opt}R_1$ a $K = 1 + c(1+r_{opt}) - \dfrac{\sqrt{r_{opt}c}}{Q}$.
4. Úprava vstupního děliče dle požadovaného zesílení H_0 a hodnoty K: $\alpha = \dfrac{H_0}{K}$ a $R_{11} = \dfrac{R_1}{\alpha}$, $R_{12} = \dfrac{R_1}{1-\alpha}$.

17.6.2. Realizace horní propusti obvodem s jedním OZ

Jedná se o analogické zapojení k výše uvedenému obvodu 17.46. Pokud budeme dále uvažovat relace (17.49), platí níže uvedené vztahy:



$$R_3 = R(K-1), \qquad R_2 = rR_1, \quad C_2 = cC_1, \tag{17.49}$$

$$H(s) = \frac{KC_1C_2R_1R_2s^2}{C_1C_2R_1R_2s^2 + C_1R_1(1-K)s + C_1R_2s + C_2R_2s + 1}, \tag{17.50}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}} = \frac{1}{R_1C_1\sqrt{rc}}, \tag{17.51}$$

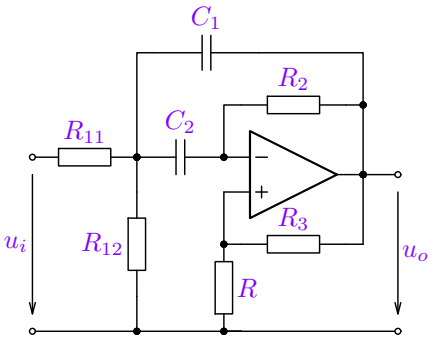
$$Q = \frac{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}{R_2C_1 + R_2C_2 + R_1C_1(1-K)} = \frac{\sqrt{rc}}{rc + r + 1 - K}. \tag{17.52}$$

Obrázek 17.47: Realizace přenosové funkce 2. řádu typu HP tzv. obvodem Sallen–Key.

Vzhledem k uvedeným vztahům jsou stejné i návrhové postupy uvedené v případě dolní propusti s tím rozdílem, že místo odporů platí vztahy pro kapacitory a opačně, tj. $c_{HP} \rightarrow r_{LP}$ a $r_{HP} \rightarrow c_{LP}$ a tím $c_{opt} = \frac{1}{18}\frac{6Q^2(1+r)+1+\sqrt{12Q^2(1+r)+1}}{rQ^2}$, $\Gamma_K^Q = \frac{K^2}{1-K+r+rc}$, $R_{iLP} \rightarrow C_{iHP}$ a $C_{iLP} \rightarrow R_{iHP}$, viz [16].

17.6.3. Realizace pásmové propusti obvodem s jedním OZ

Poslední zapojení stejného typu jako dvě předchozí realizuje pásmovou propust. I zde je vstupní dělič pouze k úpravě zesílení a označme $R_{11}||R_{12} = R_1$. Pokud budeme dále uvažovat pozměněné relace (17.53), platí níže uvedené vztahy:



$$R_3 = \frac{R}{K-1}, \qquad R_1 = \frac{R_2}{r}, \quad C_2 = cC_1, \tag{17.53}$$

$$H(s) = -\frac{KC_2R_2s}{C_1C_2R_1R_2s^2 + C_2R_2(1-K)s + C_1R_1s + C_2R_1s + 1}, \tag{17.54}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}} = \frac{1}{R_2C_1\sqrt{rc}}, \tag{17.55}$$

$$Q = \frac{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}{R_1C_1 + R_1C_2 + R_2C_2(1-K)} = \frac{\sqrt{rc}}{rc + r + c(1-K)}. \tag{17.56}$$

Obrázek 17.48: Realizace přenosové funkce 2. řádu typu BP (Delyiannisovo zapojení).

Tak jako v obou předchozích případech, i zde jsou pro návrh třeba získat hodnoty čtyř prvků. Konkrétní návrh lze opět provést pomocí několika postupů, z nichž dva jsou níže uvedeny níže. Vyplývají opět z podrobného rozboru citlivostních parametrů, který je uveden v [16].

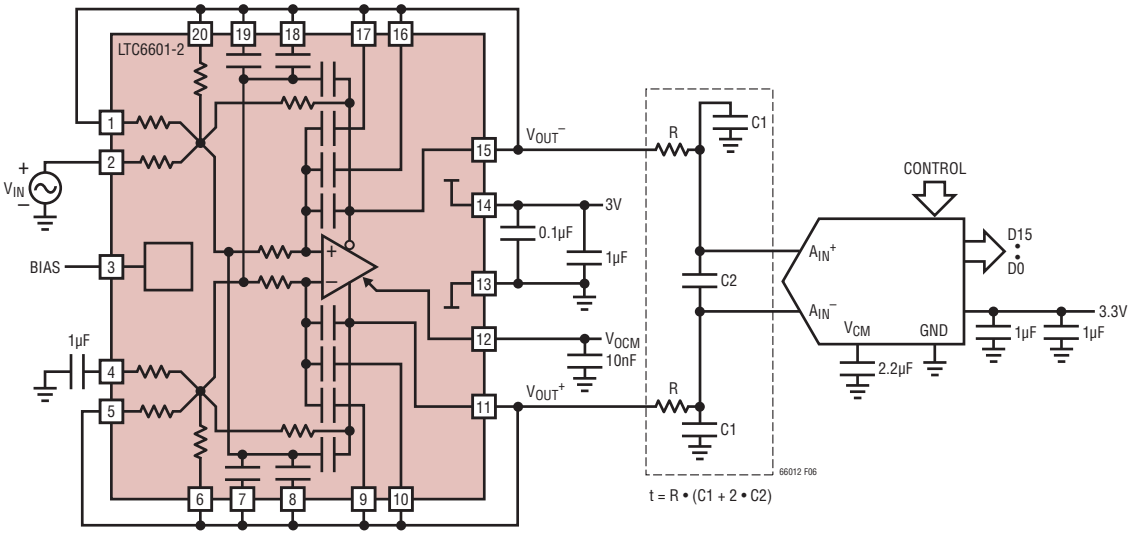
1. Návrhový postup vedoucí na minimální citlivosti S_{x_i} (vhodné pro $H_0 \leq 1$ a $Q < 5$)

1. Volba $K = 1$ a $c = 1$ vede na $S^Q_{R_1} = S^Q_{R_2} = 0{,}5$ a $S^Q_{C_1} = -S^Q_{C_2} = 0$, ale na nevýhodné $S^Q_K = \Gamma^Q_K = \dfrac{1}{2r}$.
2. Doporučení: algoritmus je vhodný pro celkové zesílení $Q < 5$, jelikož $\dfrac{R_2}{R_1} = 4Q^2$.
3. Postup návrhu: volba $C_1 = C_2$ a určení $R_2 = \dfrac{2Q}{\omega_0 C_1}$, $R_1 = \dfrac{R_2}{4Q^2}$, $K = 1 \Rightarrow R_3 = \infty$.
4. Úprava vstupního děliče dle požadovaného zesílení H_B pro $K = 1 = c$: $\alpha = \dfrac{H_B}{2Q^2}$ a $R_{11} = \dfrac{R_1}{\alpha}$, $R_{12} = \dfrac{R_1}{1-\alpha}$.

2. Návrhový postup pro minimalizaci Γ^Q_K (vhodné pro $Q < 15$)

1. Volba C_1, C_2, přičemž je doporučeno $c = C_2/C_1 < 0{,}1$ pro vyhovující $\Gamma^Q_K = \dfrac{c\,K^2}{rc + r + c(1-K)}$, viz [16].
2. Výpočet optimálního poměru $r_{opt} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\left((6Q^2(c+1) + 1 + \sqrt{12Q^2(c+1)+1}\right)c}{9Q^2c^2 + 18Q^2c + 9Q^2}$ dle [16].
3. Určení $R_2 = \dfrac{1}{\omega_0 C_1 \sqrt{r_{opt} c}}$, $R_1 = r_{opt} R_2$ a $K = \dfrac{r_{opt}(c+1)}{c} + 1 - \dfrac{\sqrt{r_{opt}}}{Q\sqrt{c}}$.
4. Úprava vstupního děliče dle požadovaného zesílení H_B a hodnoty K: $\alpha = \dfrac{H_B}{Q\sqrt{r_{opt} c}\left(1 + \frac{1}{c} + \frac{1}{r_{opt}}\right) - 1}$ a $R_{11} = \dfrac{R_1}{\alpha}$, $R_{12} = \dfrac{R_1}{1-\alpha}$.

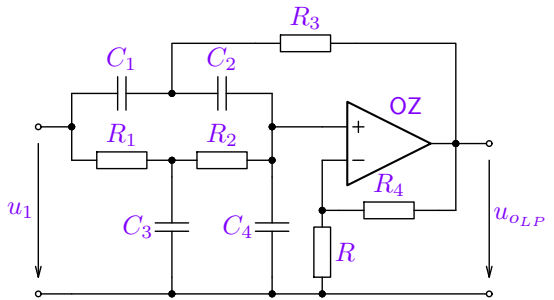
© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL



Obrázek 17.49: Příklad IO pro realizaci bikvadu LP, LTC6601 – pin configurable gain and anti-aliasing filter up to 27 MHz.

17.6.4. Realizace eliptické sekce obvodem s jedním OZ

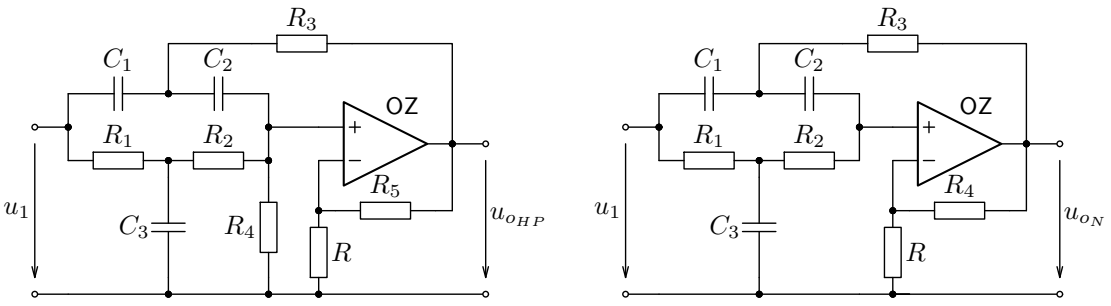
V kapitolách 17.6.1 až 17.6.3 byly představeny obvody s jedním OZ pro realizaci základních přenosových filtrů, tj. filtrů s Butteworthovou nebo Čebyševovou aproximací modulové charakteristiky. Existují i zapojení s jedním OZ pro realizaci eliptických funkcí. Takových zapojení není mnoho a využívají se zřídka. Níže jsou uvedeny tři zapojení pro realizaci eliptických přenosových funkcí typu LP, HP i BS.



Obrázek 17.50: Zapojení bikvadu eliptické přenosové funkce typu LP s jedním OZ.

Symbolická podoba přenosová funkce je poměrně složitá a obecně je třetího řádu, přičemž i čitatel je 3. řádu. Pro požadovanou přenosovou funkci (viz tabulku 8.11) musí platit určité podmínky, v tomto případě $C_3 = C_1 + C_2$, $1/R_3 = 1/R_1 + 1/R_2$, jak je uvedeno v [16] a patrné z analýzy.

Obvody pro realizaci zbývajících funkcí (HP a Notch) jsou uvedeny na následujícím obrázku. I v tomto případě platí, že požadovaný typ přenosové funkce je závislý na tolerancích prvků. Počet prvků je vysoký, což je další nevýhoda. Dle návrhového postupu mohou vycházet i zde značné rozptyly hodnot prvků. Další nevýhodou těchto zapojení je nemožnost nastavení jejich zisku (je plně dán ostatními parametry). Vyplývá z toho, že se jedná o alternativní zapojení, zejména pro realizaci přenosových funkcí s malým činitelem jakosti v případě nutnosti použití pouze jednoho OZ. V ostatních případech je podstatně výhodnější použít realizace s více OZ, viz následující kapitolu 17.6.6 a 17.6.7. Z tohoto důvodu nejsou uvedeny nývrhové vztahy, které uživatel nalezne v [16].

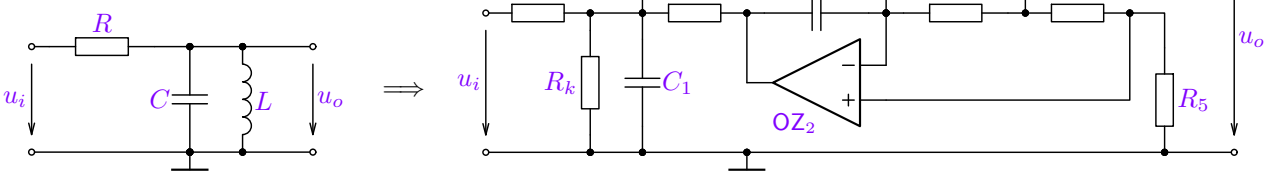


Obrázek 17.51: Zapojení bikvadů eliptické přenosových funkcí typu HP (a) a N (b) s jedním OZ.

17.6.5. Realizace bikvadratické sekce pomocí Antoniova konvertoru

Níže uvedené zapojení využívá rezonanční obvod (viz obrázek 17.13), kde je indukčnost nahrazena aktivním zapojením, často Antoniovým konvertorem (obrázek 17.35), jako v tomto případě. Napěťový výstup se odebírá z výstupu OZ_1. Toto zapojení je vhodné pro $Q < 60$.

$$H(s) = \frac{s\frac{1}{RC}}{s^2 + s\frac{1}{RC} + \frac{1}{LC}}$$



Obrázek 17.52: Realizace přenosové funkce 2. řádu typu BP pomocí Antoniova konvertoru.

Návrhový postup pro zisk $H_B \leq 2$

1. Volba $C_1 = C_2 = C$.
2. $R_1 = R_3 = R_4 = R_5 = \dfrac{1}{\omega_0 C}$ a $R_2 = \dfrac{QR_1}{H_B/2}$.

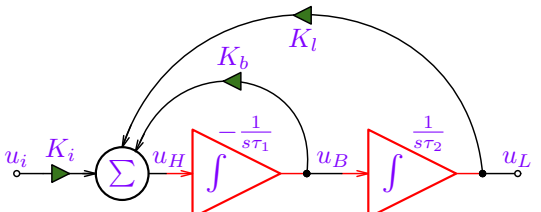
Návrhový postup pro zisk $H_B > 2$

1. Volba $C_1 = C_2 = C$.
2. $R_1 = R_3 = R_4 = \dfrac{\sqrt{H_B - 1}}{\omega_0 C}$, $R_2 = \dfrac{Q}{\omega_0 C}$ a $R_5 = \dfrac{R_1}{H_B - 1}$.

R_k slouží pro případné zmenšení přenosu H_B. Vztahy platí pro $R_k \to \infty$.

17.6.6. Realizace bikvadratické sekce obvodem s více OZ

Velmi univerzální a využívané zapojení bikvadu využívá tzv. dvouintegrátorovou strukturu se zpětnými vazbami. Je vhodné pro všechny typy přenosové funkce prakticky a vykazuje i velmi dobré citlivostní parametry.



$$H_L(s) = \frac{U_L(s)}{U_i(s)} = -\frac{\frac{K_i}{\tau_1\tau_2}}{s^2 + \frac{K_b}{\tau_1}s + \frac{K_l}{\tau_1\tau_2}}, \qquad (17.57)$$

$$H_B(s) = \frac{U_B(s)}{U_i(s)} = -\frac{\frac{K_i}{\tau_1}s}{s^2 + \frac{K_b}{\tau_1}s + \frac{K_l}{\tau_1\tau_2}}, \qquad (17.58)$$

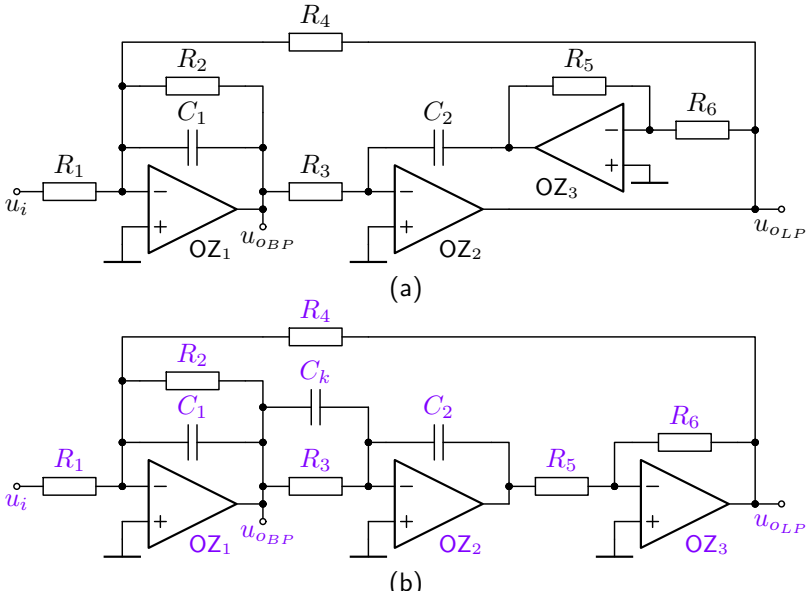
Obrázek 17.53: Realizace přenosové funkce 2. řádu zpětnovazební strukturou se dvěma integrátory a vyjádřením základních přenosů.

$$H_H(s) = \frac{U_H(s)}{U_i(s)} = \frac{K_i s^2}{s^2 + \frac{K_b}{\tau_1}s + \frac{K_l}{\tau_1\tau_2}}, \qquad \omega_0^2 = \frac{K_l}{\tau_1\tau_2}, \qquad Q = \frac{1}{K_b}\sqrt{K_l\tau_1\tau_2}. \qquad (17.59)$$

Dále jsou uvedeny implementace dvouintegrátorových struktur jak pomocí operačních (transimpedančních) zesilovačů, tak i dalších prvků představených v kapitole 17.3.

Přenosové funkce 17.57) a (17.58) lze pak realizovat podle blokového schématu 17.53 s pomocí ztrátového (K_b) invertujícího a neinvertujícího integrátoru a celkové ZV (K_l). Pro neinvertující integrátor lze využít zapojení 11.15 nebo využít kaskádně řazeného invertoru, jak ukazují implementace na obrázku vpravo.

Tow-Thomasovo zapojení je navíc použit kapacitor C_k, kterým lze částečně kompenzovat konečnou šířku pásma použitých operačních zesilovačů. Odvození návrhových vztahů zde není uvedeno, ale vyplývá z přenosů uvedených v analýze a lze ho nalézt také v [16]. Níže je uveden návrhový postup.

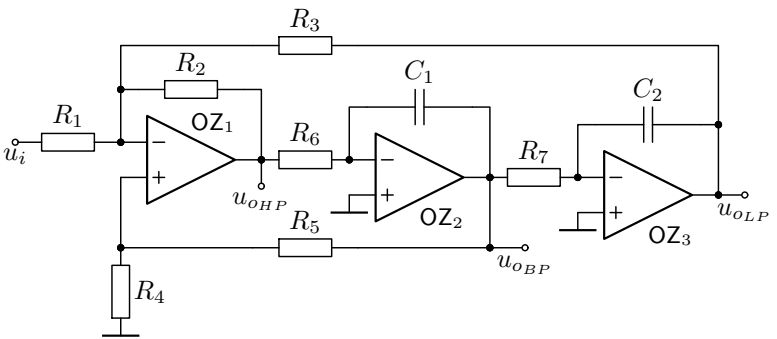


Obrázek 17.54: Bikvady pro polynomiální přenosové funkce: (a) Ackerberg-Mossbergovo a (b) Tow-Thomasovo zapojení.

Návrhový algoritmus pro obvody z obrázku 17.54

1. Volba $C_1 = C_2 = C$ a $R_5 = R_6 = R$.
2. $R_3 = R_4 = \dfrac{1}{\omega_0 C}$, $R_2 = QR_3$ a $R_1 = \dfrac{R_3}{H_0}$, přičemž zesílení $H_0 = H_B$.

Bikvady 17.54 realizované na základě struktury 17.53 využívaly sumační integrátor, čímž není k dispozici výstup pro horní propust (HP). Tento nedostatek řeší zapojení Kerwin-Huelsman-Newcomb bikvadu na obrázku 17.55.

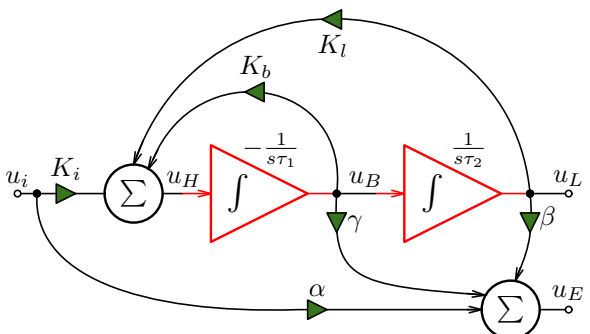


Zpětnou vazbu z prvního integrátoru (K_b) však nelze zavést do invertujícího vstupu sumátoru (byla by zavedena KZV a obvod by byl nestabilní). Je nutné ji zavést do neinvertujícího vstupu, čímž se však zvyšují nároky na CMRR OZ$_1$. Pro realizaci filtru typu HP se pak využívá zapojení obecného bikvadu na obrázku 17.57, viz např. UAF42.

Obrázek 17.55: Bikvad pro polynomiální přenosové funkce včetně výstupu HP – zapojení Kerwin-Huelsman-Newcomb.

17.6.7. Realizace obecné bikvadratické sekce obvodem s více OZ

Obecnou přenosovou funkci 2. řádu lze získat váhovaným součtem vstupního napětí u_i a výstupních napětí u_L a u_B struktury 17.53. Pro přenos platí vztah (17.60). Vzhledem k ke stejnému jmenovateli, jaký platil pro předchozí přenosy, jsou zde platné výrazy (17.57) pro parametry ω_0 a Q. Pro kmitočet nuly ω_n pak platí vztah (17.61).

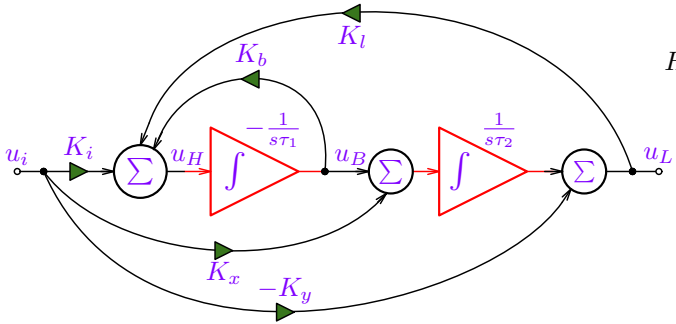


$$H(s) = \frac{U_E(s)}{U_i(s)} = \alpha + \beta H_L(s) + \gamma H_B(s) = \\ = \frac{\alpha s^2 + \frac{K_b\alpha - K_i\gamma}{\tau_1} s + \frac{K_l\alpha - K_i\beta}{\tau_1\tau_2}}{s^2 + \frac{K_b}{\tau_1} s + \frac{K_l}{\tau_1\tau_2}}, \quad (17.60)$$

$$\omega_n^2 = \frac{K_l\alpha - K_i\beta}{\alpha\tau_1\tau_2} \quad \text{pro} \quad K_b\alpha = K_i\gamma. \quad (17.61)$$

Obrázek 17.56: Realizace obecné přenosové funkce 2. řádu strukturou se dvěma integrátory a sumací napětí.

Pro realizaci obecné přenosové funkce 2. řádu, tj. s nulami přenosu na konečném nenulovém kmitočtu pro eliptické filtry[3] se však častěji využívá struktura 17.57. Ta využívá sumačních integrátorů, a tudíž není třeba další sumátor. Přenosová funkce je vyjádřena vztahem (17.62), přičemž $K_x = K_y = 0$ dostaneme pochopitelně tvar (17.57).



$$H(s) = \frac{U_L(s)}{U_i(s)} = -\frac{K_y s^2 + \left(\frac{K_b K_y}{\tau_1} - \frac{K_x}{\tau_2}\right)s + \frac{K_i - K_b K_x}{\tau_1 \tau_2}}{s^2 + \frac{K_b}{\tau_1}s + \frac{K_l}{\tau_1 \tau_2}}, \qquad (17.62)$$

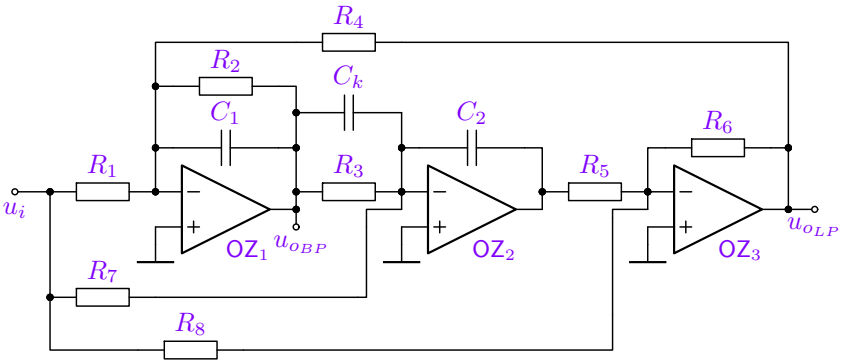
$$\omega_n^2 = \frac{K_i - K_b K_x}{K_y \tau_1 \tau_2} \quad \text{pro} \quad \frac{K_x}{\tau_2} = \frac{K_b K_y}{\tau_1}. \qquad (17.63)$$

Obrázek 17.57: Realizace obecné přenosové funkce 2. řádu strukturou se dvěma integrátory.

[3] případně pro HP, jelikož výstup u_H na obrázku 17.53 pro přenos (17.59) není ve strukturách 17.54 se sumačními integrátory přímo k dispozici.

Obvodová implementace struktury 17.57 pomocí OZ je uvedena na obrázku níže. Odvození návrhových vztahů je poměrně složité a je uvedeno v [16].

Pro realizaci základních přenosů je lépe použít zapojení 17.54, u kterých není třeba nastavovat přesné poměry hodnot, aby se vynulovaly příslušné členy přenosové funkce. To platí např. i pro případ přenosové funkce AP2, tj. fázovacího článku (viz tabulku 8.14). Tu lze vytvořit jako rozdíl jednotkové přenosové funkce a přenosové funkce BP2 (původního signálu a signálu z BP2 sumátorem), jak ukazuje výraz (17.64).

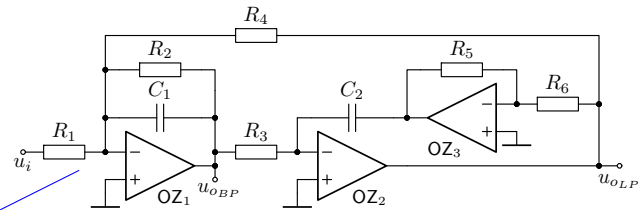


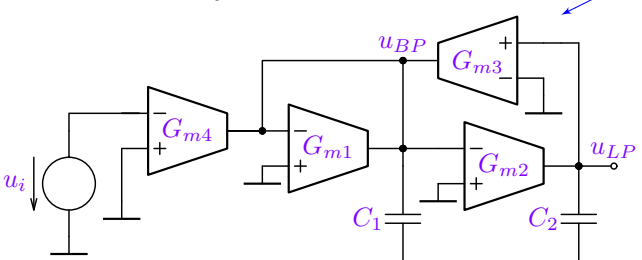
Obrázek 17.58: Zapojení bikvadratické sekce pro realizaci obecné přenosové funkce. Přenosové funkce viz analýzu.

$$H_{\mathrm{AP2}}(s) = 1 - 2H_{\mathrm{BP2}}(s) = 1 - \frac{2\frac{\omega_0}{Q}s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} = -\frac{s^2 - \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \tag{17.64}$$

Realizace bikvadratické sekce pomocí transkonduktančních zesilovačů (OTA)

Implementaci dvouintegrátorových struktur lze implementovat i pomocí transimpedančních zesilovačů. Vzhledem k zapojení ideálního a ztrátového integrátoru podle obrázku 17.26 lze jednoduše převést zapojení bikvadratické sekce s OZ na strukturu s OTA. Odpovídající přenosy a z nich odvozené parametry ω_0 a Q lze získat z analýzy obvodové struktury.





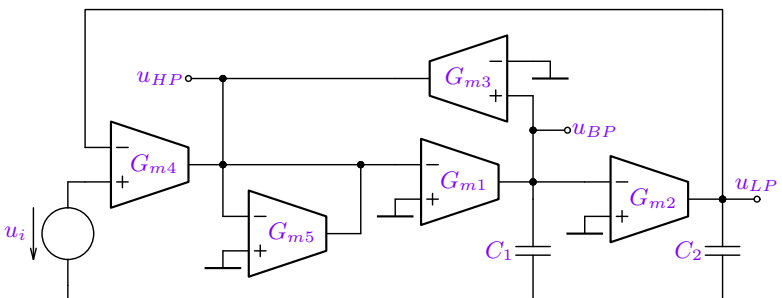
$$H_{LP} = \frac{G_{m2}G_{m4}}{C_1C_2s^2 + C_2G_{m1}s + G_{m2}G_{m3}} \tag{17.65}$$

$$H_{BP} = -\frac{G_{m2}G_{m4}s}{C_1C_2s^2 + C_2G_{m1}s + G_{m2}G_{m3}} \tag{17.66}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{G_{m2}G_{m3}}{C_1C_2}},\ Q = \sqrt{\frac{C_1G_{m2}G_{m3}}{C_2G_{m1}^2}} \tag{17.67}$$

Obrázek 17.59: Jednoduchý biquad s transkonduktančními zesilovači.

Zapojení 17.59 je velmi jednoduchou implementací bikvadratické sekce. Jeho nevýhodou je absence výstupu pro filtr typu HP a nemožnost nezávislého doladění kmitočtu ω_0 nezávisle na činiteli jakosti Q. To částečně řeší složitější zapojení na obrázku 17.60, který však neumožňuje přímou změnu ω_0 nezávisle na Q. Realizaci eliptických přenosových funkcí lze řešit pomocí struktury 17.56 nebo využít dalších, komplexnějších zapojení. Jejich společnou nevýhodou je však omezený dynamický rozsah zpracovávaných napětí, jak bylo uvedeno v kapitole 17.5.



$$H_{LP} = \frac{\frac{G_{m1}G_{m2}G_{m4}}{C_1C_2G_{m5}}}{s^2 + \frac{G_{m1}G_{m3}}{C_1G_{m5}}s + \frac{G_{m1}G_{m2}G_{m4}}{C_1C_2G_{m5}}} \tag{17.68}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{G_{m1}G_{m2}G_{m4}}{C_1C_2G_{m5}}} \tag{17.69}$$

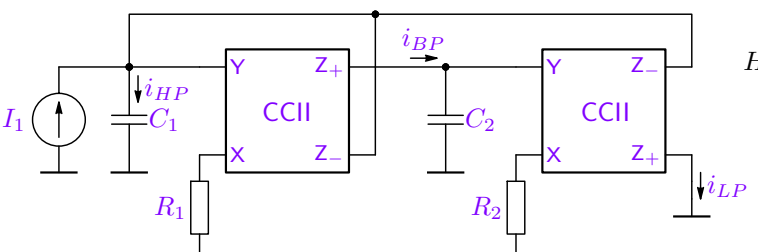
$$Q = \sqrt{\frac{C_1G_{m2}G_{m4}G_{m5}}{C_2G_{m1}G_{m3}^2}} \tag{17.70}$$

Obrázek 17.60: Biquad s transkonduktančními zesilovači pro realizaci základních přenosových funkcí.

$$H_{HP} = \frac{U_{HP}(s)}{U_i(s)} = \frac{\frac{G_{m4}}{G_{m5}}s^2}{s^2 + \frac{G_{m1}G_{m3}}{C_1G_{m5}}s + \frac{G_{m1}G_{m2}G_{m4}}{C_1C_2G_{m5}}}, \quad H_{BP} = \frac{U_{BP}(s)}{U_i(s)} = -\frac{\frac{G_{m1}G_{m4}}{C_1G_{m5}}s}{s^2 + \frac{G_{m1}G_{m3}}{C_1G_{m5}}s + \frac{G_{m1}G_{m2}G_{m4}}{C_1C_2G_{m5}}} \tag{17.71}$$

Realizace bikvadratické sekce pomocí proudových konvejorů

Blokovou strukturu 17.53 lze implementovat i pomocí proudových konvejorů, jak je uvedeno na obrázku 17.61. Základ tvoří opět dva integrátory s konvejory druhého typu, přičemž signály jsou vyjádřeny proudy – bikvad v proudovém módu. Výhodou je jednoduché sčítání signálů a většinou i velká šířka pásma. Nevýhodou je vak vyšší energetická náročnost (odběr z napájecího zdroje).



$$H_{LP} = \frac{I_{LP}(s)}{I_1(s)} = \frac{1}{C_1C_2R_1R_2s^2 + C_2R_2s + 1} \tag{17.72}$$

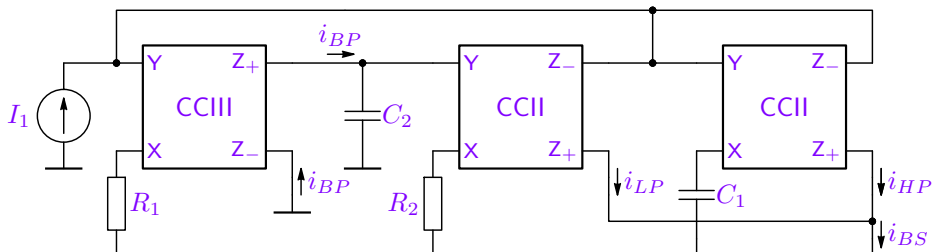
$$\Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C_1C_2R_1R_2}}, \quad Q = \frac{1}{\omega_0 R_2 C_2} \tag{17.73}$$

Obrázek 17.61: Základní bikvadratická implementovaná pomocí proudových konvejorů CCII.

$$H_{HP} = \frac{I_{HP}(s)}{I_1(s)} = \frac{C_1C_2R_1R_2s^2}{C_1C_2R_1R_2s^2 + C_2R_2s + 1}, \quad H_{BP} = \frac{I_{BP}(s)}{I_1(s)} = \frac{C_2R_2s}{C_1C_2R_1R_2s^2 + C_2R_2s + 1} \tag{17.74}$$

Vzhledem k tomu, že kapacitor integruje proud, platí, že $U_{C_2} = R_2 I_{LP}$ a $U_{C_1} = R_1 I_{BP}$, tj. lze odebírat i napěťové signály typu dolní a pásmová propust, viz analýzu.

Pro odběr proudů v zapojení 17.61 by bylo třeba zrcadlit výstupní proudy i_{BP} a i_{HP}. Existuje celá řada dalších zapojení s proudovými konvejory i jejich modifikovanými prvky CDTA. Dále je vedeno modifikované zapojení bikvadratické sekce, kde je přidán konvejor třetího typu umožňující přímou realizaci více typů přenosů.



Obrázek 17.62: Základní bikvadratická implementovaná pomocí proudových konvejorů CCII.

Výsledné vztahy odpovídají výše uvedeným (17.72) až (17.74). Vzhledem k tomu, že lze jednoduše sčítat proudy, je možné jednoduše (dalšími zrcadly vytvořit i další typy přenosů pro pásmovou zádrž a fázovací článek, kde nuly přenosové funkce leží na stejném kmitočtu jako póly, ale s opačným (kladným) znaménkem reálné části, viz analýzu.

$$H_{BS} = \frac{I_{LP}(s) + I_{HP}(s)}{I_1(s)} = \frac{C_1C_2R_1R_2s^2 + 1}{C_1C_2R_1R_2s^2 + C_2R_2s + 1}, \quad H_{AP} = \frac{I_{LP}(s) + I_{HP}(s) - I_{BP}(s)}{I_1(s)} \tag{17.75}$$

17.7. Shrnutí vlastností spojitě pracujících ARC filtrů

Následuje stručné shrnutí vlastností a doporučené použití pro výše uvedené implementace kmitočtových, spojitě pracujících filtrů.

Vlastnosti filtrů z hlediska použitých komponent

- Filtry implementované pomocí techniky ARC s operačními zesilovači (OZ) mají obvykle velmi dobrý dynamický rozsah, jsou však určeny pro nízkofrekvenční filtry (až jednotky, max. desítky MHz). Pro vyšší kmitočty lze v některých aplikacích nahradit OZ transimpedančními zesilovači (TIA). TIA navíc vykazují vysoké hodnoty rychlosti přeběhu. Vzhledem ke kmitočtovému rozsahu je většinou nelze integrovat (velké hodnoty kapacit).
- V oblasti vyšších kmitočtů, kde nelze použít OZ se využívají filtry s proudovými konvejory (CC) – prvek, který je schopen pracovat do vysokých kmitočtů. Pokud filtr pracuje v proudovém módu, mohou být změny uzlových napětí minimální, čímž se minimalizuje vliv parazitních kapacit a celé zapojení je schopno pracovat do vyšších kmitočtů.
- Jednou z nevýhod implementace filtru pomocí OZ/TIA nebo proudových konvejorů je nemožnost přeladění filtru. Prakticky to vede na změnu hodnot obvodových prvků (R i C), což nelze uskutečnit elektronicky. Další nevýhodou je závislost zlomových kmitočtů na absolutních hodnotách prvků, tj. součinu RC. Tolerance hodnot pak vedou k problematické realizaci filtrů s vyššími hodnotami Q (Čebyševova a Cauerova typu) a obecně filtrů vyšších řádů (6. a vyšších). Prakticky to znemožňuje sériové realizace takových filtrů.

- Tyto nevýhody lze do jisté míry řešit použitím transimpedančních zesilovačů (OTA). Podobně jako CC, tak i OTA vychází z jednoduché tranzistorové implementace, většinou neobsahuje velký napěťový zisk a může pracovat do vyšších kmitočtů (až stovky MHz). Vzhledem k tomu, že implementace nemusí obsahovat odpory (ty jsou implementovány také pomocí OTA), filtr obsahuje mimo zesilovače pouze kapacitory. Parametr zesilovačů (transkonduktance G_m) je konečný (na rozdíl od ideálního OZ nebo TIA, u kterých je $A_d \to \infty$) a je tedy i parametrem filtru. Ten lze navíc elektronicky měnit a tím měnit/přelaďovat filtr. Pokud dále „nezáleží“ na absolutních hodnotách kapacitorů (funkční simulace a kaskádní syntéza), ale je třeba dodržovat poměry kapacitorů, což lze v technologii výroby čipů zajistit s velkou přesností. Nevýhodou použití OTA je, jak bylo zmíněno, nutnost dodržení malých napěťových úrovní na jejich vstupech, viz obrázek 16.50 a 16.53.

- Implementace mimo OZ prakticky vylučují realizaci z diskrétními prvky. Např. pro OTA je třeba dodržet prakticky stejné vlastností všech zesilovačů v celé struktuře, což je možné splnit ideálně pouze na jednom čipu.

Vlastnosti ARC filtrů z hlediska metody implementace

- Náhrada induktoru, resp. realizace LC prototypu ARC strukturou je nejčastěji doména pro integrované (zákaznické) filtry pro vyšší kmitočty, tj. na bázi OTA nebo CC. Realizace vychází z LC prototypu (LC filtru) a využívá jeho velmi dobrých citlivostních parametrů. Nahrazují induktor – problematický prvek z pohledu výroby (přesná hodnota a kvalita) a tím umožňují miniaturizaci nebo i integraci filtrů.

- Kaskádní syntéza je nejčastější volbou pro implementaci nízkofrekvenčních, spojitě pracujících filtrů. Vyznačuje se poměrně jednoduchým návrhem i realizací a nastavením – po sekcích.

V případě použití operačních zesilovačů (případně zesilovačů transimpedančních pro vyšší kmitočty) se pro implementaci nečastěji používají:

- obvody s jedním OZ (Sallen-Key) pro základní filtry (neeliptické) s malým činitelem jakosti Q a malým zesílením (pro LP a HP většinou pouze jednotkovým),
- rezonanční obvod se zobecněným impedančním konvertorem jako biquad – nejčastěji jako BP s $Q < 60$.
- Åckerberg-Mossberg (ÅM) a Tow-Thomas (TT) biquad pro neeliptické filtry i s vysokým činitelem jakosti Q a zesílením,
- zobecněný bikvad založený na struktuře ÅM/TT obvodu pro eliptické filtry a filtry typu HP s vyskokým činitelem jakosti Q.

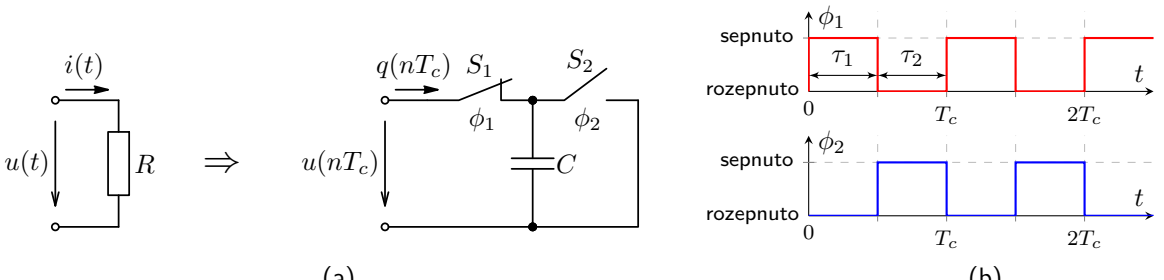
Pro lichý řád filtrů typu LP, resp. HP je struktura zakončena blokem 1. řádu, např. integračním, resp. derivačním RC článkem. Návrhové postupy kaskádních filtrů včetně jednotlivých bloků a optimalizace dynamických poměrů jsou implementovány v návrhovém systému SYNTFIL.

Bikvady realizované pomocí OTA (případně TIA) a CC se nejčastěji používají jako alternativa pro integrované filtry vyšších kmitočtů.

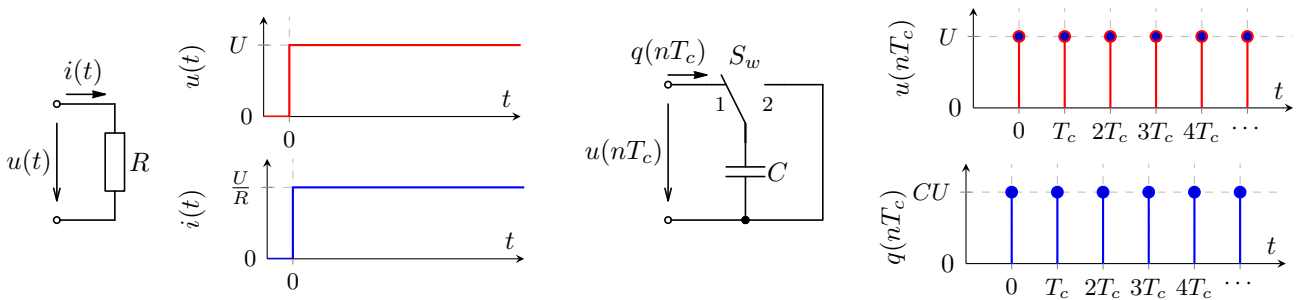
Následuje část věnovaná diskrétně pracujícím filtrům, které jsou alternativou k výše uvedeným a přinášejí nové možnosti.

17.8. Implementace filtrů pomocí periodicky spínaných obvodů s kapacitory (SC)

Nevýhodou ARC filtrů s OZ je jejich obtížná integrovatelnost a prakticky nulová přeladitelnost. Tyto nevýhody se snaží odstranit následující implementace, které využívají náhradu rezistoru tzv. spínaným kapacitorem, viz obrázek 17.63. Spínače S_1 a S_2 jsou periodicky spínané ve fázích ϕ_1 a ϕ_2. Obecně lze obvod spínat v n fázích, nicméně ve většině obvodů jsou spínače řízeny pouze dvoufázově se stejnou délkou fází $\tau_1 = \tau_2$. V dalším textu je budeme značit pouze čísly 1 a 2 a uvedené spojení dvou spínačů nahrazovat přepínačem S_w, jak je uvedeno na obrázku 17.63.



Obrázek 17.63: Náhrada rezistoru spínaným (SC) kapacitorem (a) a časové průběhy řídících signálů spínačů (b).

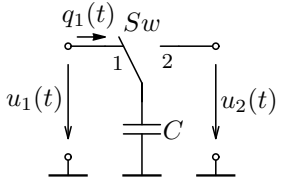


Obrázek 17.64: Časové průběhy obvodových veličin spojitě a diskrétně pracujícího obvodu dle obrázku 17.63.

Ve spojitě pracujícím obvodu (rezistoru) bude po připojení vstupního napětí $u(t)$ téci proud $i(t)$, jak ukazuje obrázek vlevo. V analogickém zapojení přepínaného kapacitoru vpravo bude docházet k odběru kvant náboje (proudu za spínací periodu T_c) ze vstupních svorek. To lze přirovnat k proudu $i(t)$ s tím rozdílem, že k toku náboje (proudu) dochází pouze v diskrétních okamžicích, daných spínací periodou T_c, resp. spínacím kmitočtem

$$f_c = \frac{1}{T_c}. \tag{17.76}$$

Pokud bude kapacitor podle obrázku níže přepínaný mezi napětími u_1 a u_2, kde pro „nespínaný pohled“ platí následující relace, přičemž derivace lze pro malé změny obvodových veličin za Δt převést na podíly diferencí:



$$q_1(t) = Cu_1(t), \quad q_2(t) = Cu_2(t), \quad i(t) = \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} \equiv$$

$$\equiv \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{C\big(u_1(t) - u_2(t)\big)}{T_c} \Rightarrow \boxed{R_{SC} = \frac{u_1(t) - u_2(t)}{i(t)} = \frac{T_c}{C} = \frac{1}{Cf_c}}, \quad (17.77)$$

Obrázek 17.65: Přepínaný kapacitor představující rezistor a ekvivalentním odporem R_{SC}.

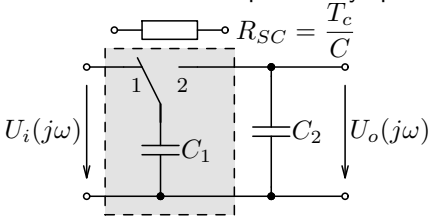
kde i je průměrný proud odpovídající rozdílu/přenosu náboje za periodu ze vstupní svorky na svorku výstupní. Poměr rozdílu napětí $u_1 - u_2$ a tohoto proudu pak odpovídá tzv. ekvivalentnímu odporu R_{SC} zapojenému mezi vstupní a výstupní svorku, který je však nahrazen diskrétně pracujícím obvodem.

Pro platnost této analogie je třeba, aby změny signálů za časové úseky $\Delta t = T_c$ byly velmi malé (např. v porovnání s jejich amplitudou), resp. aby platilo $f_c \gg f$, kde f je maximální kmitočet signálu obsaženého v $u_1(t)$, resp. $u_2(t)$. Spínače jsou realizovány pomocí rychlých spínaných MOS tranzistorů, viz kapitolu 14.6.

Pomocí uvedené náhrady rezistoru dále odvodíme chování spínaného integračního „RC“ článku a představíme další základní obvody jako např. integrátor, což je základní stavební blok filtrů.

17.8.1. Implementace SC integračního článku a jeho analýza

Výše uvedený přístup je zde použit pro analýzu jednoduchého integračního „RC“ článku implementovaného pomocí technikou spínaných kapacitorů. Kmitočtovou charakteristiku pro $f \ll f_c$ popisuje relace (17.78), z níž vyplývají níže uvedené vlastnosti periodicky spínaných filtrů:



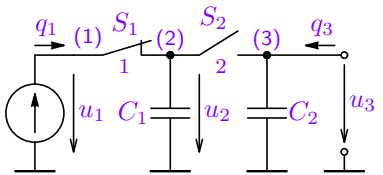
$$H_{RC}(j\omega) = \frac{U_o(j\omega)}{U_i(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega R_{SC} C_2} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{f_c}\frac{C_2}{C_1}} =$$

$$= \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}, \quad \text{kde} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{f_c C_1}{C_2}} \quad \text{a} \quad f_c = \frac{1}{T_c}. \qquad (17.78)$$

Základní vlastnosti periodicky spínaného filtru

- Snadné a jednoduché přelaďování,
- vysoká přesnost díky $\omega_0 \approx C_1/C_2$, což lze vyrobit s přesností $< 0{,}2\,\%$,
- snadná integrovatelnost opět díky $\omega_0 \approx C_1/C_2$, tj. absolutní hodnoty mohou být malé=integrovatelné,
- lze integrovat filtry i pro velmi malé kmitočty (pro $f_c = 100\,\mathrm{kHz}$ a $C = 1\,\mathrm{pF}$ je $R_{SC} = 10\,\mathrm{M\Omega}$!),
- musí ale platit $f \ll f_c$.

Jak bylo uvedeno, tento přístup platí pouze pro $f \ll f_c$ a evidentně nepostihuje vzorkovací princip, který pro diskrétně pracující soustavy (pracující v diskrétních časových okamžicích) musí platit. Pokud chceme toto chování postihnout, je nutné použít diferenční popis. Navíc budeme obvodové veličiny označovat podle fáze ke které přísluší. Vzhledem k tomu, že následující obvody jsou spínané pouze ve dvou fázích, použijeme následující značení: např. u_1 značí napětí v první, resp. $u_{\bar{1}}$ ve druhé fázi. Nechť $t = nT_c$ pro první fázi a $t = (n-1/2)T_c$ pro fázi druhou, pak pro vzorky obvodových veličin SC článku buzeného zdrojem náboje q_1 platí následující diferenční rovnice:



Obrázek 17.66: SC integrační článek.

$$q_1[n] = C_1\big(u_1[n] - u_{\bar{2}}[n-1/2]\big), \quad q_{\bar{1}}[n-1/2] = 0 \tag{17.79}$$

$$q_3[n] = 0 = C_2\big(u_3[n] - u_{\bar{2}}[n-1/2]\big) \tag{17.80}$$

$$q_{\bar{3}}[n-1/2] = 0 = C_1\big(u_{\bar{3}}[n-1/2] - u_2[n-1]\big) + C_2\Big(u_{\bar{3}}[n-1/2] - u_3[n-1]\Big), \tag{17.81}$$

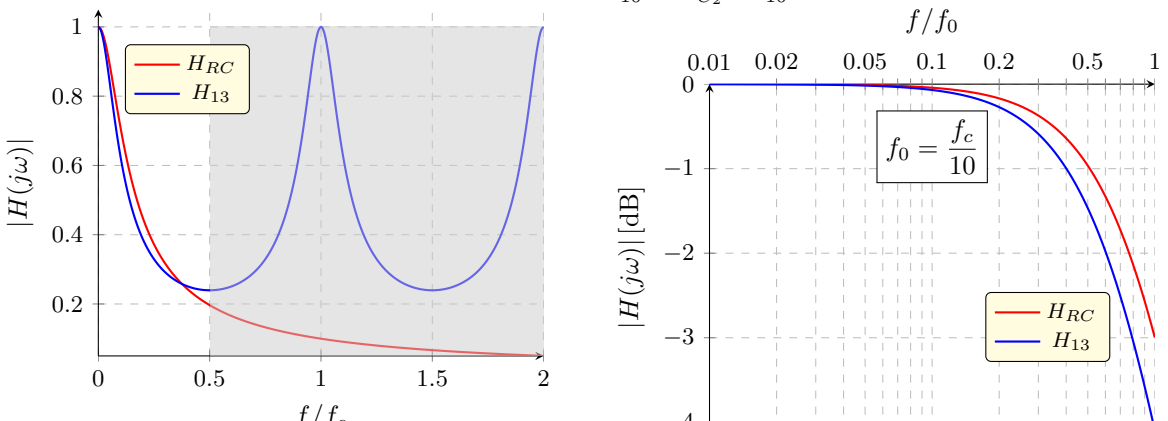
přičemž vzhledem ke spínačům je $u_1[n] = u_2[n]$, $u_{\bar{2}}[n-1/2] = u_{\bar{3}}[n-1/2]$ a $u_{\bar{3}}[n-1/2] = u_3[n]$, jak vyplývá z (17.80). Použitím těchto relací a aplikací $\mathcal{Z}$ transformace pak po úpravě dostaneme (viz také příklad A.8):

$$Q_1(z) = C_1\big(U_1(z) - U_{\bar{2}}(z)z^{-1/2}\big) \tag{17.82}$$

$$z^{-1/2}Q_{\bar{3}}(z) = C_1\big(U_{\bar{3}}(z)z^{-1/2} - U_2(z)z^{-1}\big) + C_2\big(U_{\bar{3}}(z)z^{-1/2} - U_3(z)z^{-1}\big) = 0 \Rightarrow \tag{17.83}$$

$$\Rightarrow C_1U_2(z)z^{-1} = C_1U_1(z)z^{-1} = U_3(z)\Big(C_1 + C_2\big(1-z^{-1}\big)\Big) \Rightarrow H_{13} = \frac{U_3(z)}{U_1(z)} = \frac{C_1}{(C_1+C_2)z - C_2} \tag{17.84}$$

Pro diskrétně pracující soustavy jsou přenosové funkce vyjádřeny pomocí obrazů $\mathcal{Z}$ transformace, což je analogie k Laplaceově transformaci použité v případě popisu spojitě pracujících systémů. **Kmitočtovou charakteristiku** přenosu $H_{13}(z)$ dle (17.84) **získáme pomocí relace** $z = \mathrm{e}^{j\omega T_c}$ (viz kapitolu R.1, vztah (R.2)). Charakteristiky $H_{RC}(j\omega)$ dle (17.78) a $H_{13}(j\omega)$ dle (17.84) jsou pro $f_0 = \frac{f_c}{10}$, tj. $\frac{C_1}{C_2} = \frac{2\pi}{10}$ uvedeny níže.



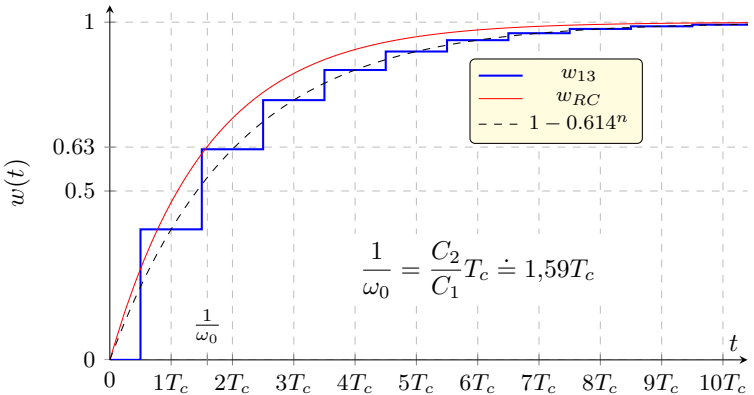
Obrázek 17.67: Amplitudové charakteristiky přenosů (17.78) a (17.84) v lineárních souřadnicích pro $f \in \langle 0,\, 2f_c \rangle$ a logaritmických souřadnicích pro f do $f_0 = \frac{f_c}{10}$.

Je zřejmé, že spínaný princip je nutné uvažovat zejména pro kmitočty blížící se $f_c/2$, pro které **metoda ekvivalentních odporů** (model s prostým rezistorem R_{SC}) vykazuje nezanedbatelné chyby a pro $f > f_c/2$ přestává zcela platit, jelikož **nepostihuje periodicitu kmitočtové charakteristiky**.

Na obrázku 17.68 je zobrazena přechodová charakteristika w_{13}, která je získaná úpravou výrazu zpětné $\mathcal{Z}$ transformace vztahu (17.84) násobeného obrazem jednotkového skoku (viz také vztah (17.85)) a přechodová charakteristika přenosu (17.78), tj. $w_{RC}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H_{RC}(s)\frac{1}{s}\}$.

Náboj $q(nT_C)$ diskrétně pracující náhrady rezistoru z obrázku 17.64 lze pak v $\mathcal{Z}$ transformaci vyjádřit vztahem (17.85).

Existují i další způsoby implementace spínaného rezistoru, viz kapitolu dodatku R.1.7, kde je ukázán jejich vliv na přenosové vlastnosti SC obvodů.



Obrázek 17.68: Přechodové charakteristiky přenosů (17.78) a (17.84).

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} q_i z^{-i} = \left(1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots\right)q = CU\frac{1}{1 - z^{-1}} = CU\frac{z}{z-1} = CU\mathcal{Z}^{-1}\{1\}. \qquad (17.85)$$

17.8.2. Přenosové funkce a vlastnosti periodicky spínaných obvodů

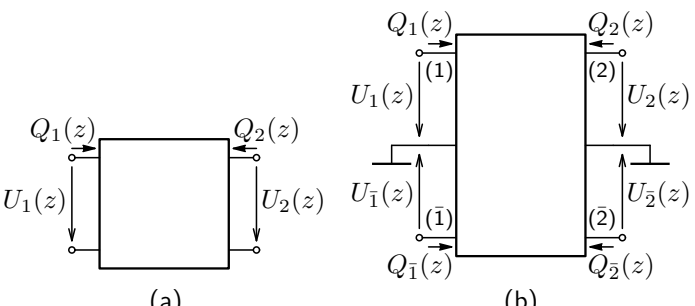
Čtenář si jistě uvědomil, že existují i další typy přenosů. V případě obvodu 17.65 existuje i přenos z první fáze do druhé, tj. $H_{1\bar{3}}(z)$, který získáme z (17.84) použitím relace $U_{\bar{3}}(z) = U_3(z)z^{1/2}$. Viz také analýzu příkladu A.8.

$$H_{1\bar{3}}(z) = \frac{U_{\bar{3}}(z)}{U_1(z)} = \frac{C_1 z^{1/2}}{(C_1 + C_2)z - C_2} \tag{17.86}$$

Jedná se o stejný přenos až na časový posun, tj. amplitudová charakteristika bude shodná jako u (17.84).

Lineární, spojitě pracující obvod lze pro vstupně-výstupní veličiny znázornit známou dvojbranovou reprezentací, jak bylo ukázáno v kapitole 7.4 a jak udává obrázek 17.69 (a). Spínaný obvod lze pak znázornit analogicky s tím, že musíme rozlišovat obvodové veličiny pro jednotlivé fáze, čímž dostaneme pro obvod spínaný ve dvou fázích reprezentaci na obrázku (b). Pro značení obvodových veličin se používá buď výše uvedeného způsobu nebo se **fáze označují jako lichá (even) a sudá (odd)** a značení je pak následující:

$$U_1(z) \equiv U_{1e}(z) \quad \text{a} \quad U_{\bar{1}}(z) \equiv U_{1o}(z). \tag{17.87}$$



Obrázek 17.69: Dvojbranová reprezentace spojitě pracujícího systému a systému spínaného ve dvou fázích.

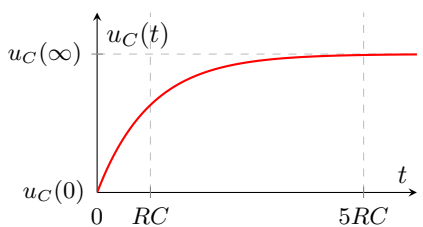
Popis obvodů se spínanými kapacitory je možné pak zobecnit, přičemž lze využít z rovnic (17.82) a (17.83), vycházejících z metody uzlových nábojových rovnic (analogie k metodě uzlových napětí). Maticové vyjádření je uvedeno vztahem (17.88), resp. (17.89). Jejich sestavení a použití je ukázáno v dodatku A.5.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_e(z) \\ z^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Q}_o(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ee} & -\mathbf{C}_{eo} \\ -z^{-1}\mathbf{C}_{oe} & \mathbf{C}_{oo} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_e(z) \\ z^{-\frac{1}{2}}\mathbf{U}_o(z) \end{bmatrix} \quad \text{a po úpravě:} \tag{17.88}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_e(z) \\ \mathbf{Q}_o(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ee} & -z^{-\frac{1}{2}}\mathbf{C}_{eo} \\ -z^{-\frac{1}{2}}\mathbf{C}_{oe} & \mathbf{C}_{oo} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_e(z) \\ \mathbf{U}_o(z) \end{bmatrix}, \tag{17.89}$$

kde $\mathbf{Q}_e(z)$, resp. $\mathbf{Q}_o(z)$ je vektor budicích nábojů v sudé (1.), resp. liché (2.) fázi, $\mathbf{U}_e(z)$, resp. $\mathbf{U}_o(z)$ je vektor uzlových napětí sudé (1.), resp. liché (2.) fázi a $\mathbf{C}_{ee}$, resp. $\mathbf{C}_{eo}$, ... jsou kapacitní matice obvodu pro přenosy ze sudé do sudé, resp. ze sudé (1.) do liché (2.) fáze, ...

Uvedená metoda je použitelná pouze u idealizovaných periodicky spínaných obvodů. To znamená, že se neuplatňují nabíjecí a vybíjecí časy kapacitorů. Je nutné si uvědomit, že kapacitory se nabíjí neideálním zdrojem, tj. přes nenulový vnitřní odpor R napěťového zdroje nebo spínače v sepnutém stavu. Je důležité, aby časová konstanta RC byla podstatně menší než délka trvání přepínací fáze, např. $5RC < T_c/2$. Pak se kapacitor stačí plně přebít (změnit napětí) ještě před aktivací další fáze (přepnutí spínače), jak ilustruje obrázek vpravo.

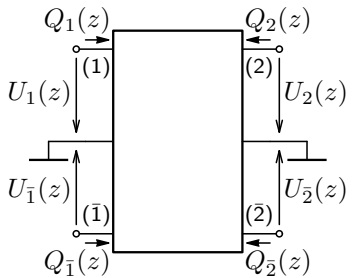


Definice přenosů periodicky spínaných obvodů

Tak jako byl přenos pro analogový, spojitě pracující obvod definován poměrem Laplaceových přenosů, tak i zde se jedná o poměr obrazů, ale v transformaci $\mathcal{Z}$. Po obvod spínaný ve dvou fázích dle obrázku 17.69 (b) existuje však několik přenosů $H(z)$, jak udává následující maticový zápis:

$$\begin{bmatrix} U_2(z) \\ U_{\bar{2}}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{12}(z) & H_{1\bar{2}}(z) \\ H_{\bar{1}2}(z) & H_{\bar{1}\bar{2}}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(z) \\ U_{\bar{1}}(z) \end{bmatrix}, \tag{17.90}$$

kde $U_2(z) \equiv U_{2e}(z)$, $U_{\bar{2}}(z) \equiv U_{2o}(z)$, ... dle značení relace (17.87) a podobně $H_{12}(z) \equiv H_{ee}(z)$, resp. $H_{1\bar{2}}(z) \equiv H_{eo}(z)$ je přenos vstupního napětí v první fázi na výstupní napětí v první resp. druhé fázi, ...



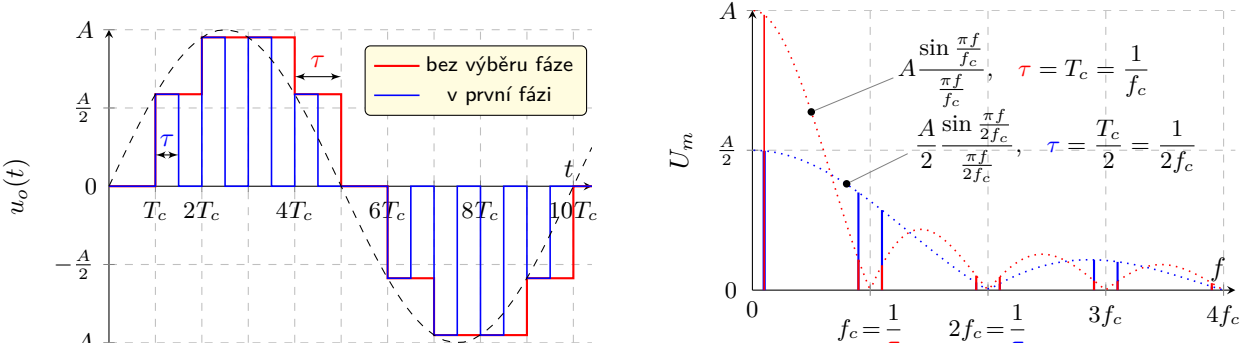
Přenos je definován obvykle naprázdno, nicméně v tomto případě (spínaný obvod ve dvou fázích) je tento přenos možné vyjádřit za dalších podmínek:

$$H_{12}(z) = \left.\frac{U_2(z)}{U_1(z)}\right|_{Q_2=0,\, Q_{\bar{2}}=0,\, Q_{\bar{1}}=0}, \text{ je napěťový přenos z první do první fáze při zakončení všech bran naprázdno.} \tag{17.91}$$

Tento napěťový přenos lze však definovat i pro další podmínky: $Q_2 = 0, Q_{\bar{2}} = 0, U_{\bar{1}} = 0$ (výstup v liché fázi nakrátko), $Q_2 = 0, U_{\bar{2}} = 0, Q_{\bar{1}} = 0$ (vstup v liché fázi nakrátko), $Q_2 = 0, U_{\bar{2}} = 0, U_{\bar{1}} = 0$ (vstup i výstup v liché fázi nakrátko). Obdobně lze podmínky definovat i pro ostatní přenosy.

Výstupní signál spínaného analogového obvodu buzeného harmonickým signálem obsahuje i další harmonické složky. Pro případ SC článku z obrázku 17.65 je na obrázku 17.70 (a) vykreslen výstupní signál bez výběru fáze červeně a s výběrem v první fázi modře. Rozvojem pomocí Fourierovy řady lze takový signál popsat vztahem (17.92), přičemž amplitudy U_m jednotlivých harmonických jsou úměrné tzv. modulační funkci $\frac{\sin(x)}{x}$, viz. obrázek (b).

$$u_o(t) \approx A\frac{\tau}{T_c}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\big((k\omega_c \pm \omega_0)\frac{\tau}{2}\big)}{(k\omega_c \pm \omega_0)\frac{\tau}{2}}\sin\big((k\omega_c \pm \omega_0)t + \varphi_{\pm}(k)\big) \tag{17.92}$$



Obrázek 17.70: Časový průběh výstupního napětí obvodu 17.65 (a) a jeho spektrální vyjádření (b).

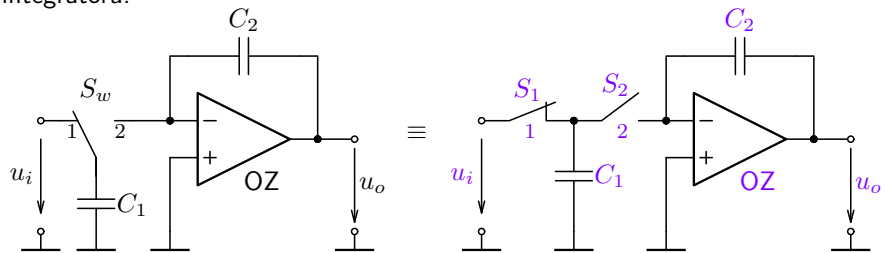
Základní vlastnosti digitálních systémů v porovnání s vlastnostmi analogových, spojitě pracujících systémů jsou představeny v následující tabulce. Vlastnosti analogových, diskrétně pracujících systémů jsou jejich kombinací, viz barevné zvýraznění a komentář.

	spojitý systém	nespojitý systém
typ signálu	analogový	digitální
zpracování v čase	spojité	nespojité
řídící signál	není nutný	vzorkovací signál f_c
kmitočtové vlastnosti	jediná kmitočtová charakteristika	kmitočtová charakteristika se opakuje s periodou $f_c/2$
přesnost	daná přesností hodnot součástek nebo poměrem jejich hodnot, cena roste exp.	v principu neomezená (daná zaokrouhlováním), cena roste lineárně s délkou slova
dynamika	dobrá, omezena šumem a velikostí napájení	daná délkou slova
kmitočtové omezení	dané vlastnostmi prvků	zásadní, dané f_c, počtem operací v cyklu a rychlostí jejich zpracování, šířkou slova
reprodukovatelnost	omezena tolerancemi prvků	prakticky neomezená
možnost integrace	omezená; závislá na implementaci, f_0, ...	z principu neomezená

Tabulka 17.3: Porovnání základních vlastností spojitých a diskrétně pracujících systémů.

17.8.3. Implementace SC integrátoru

Stejně jako i SC článku lze implementovat rezistor pomocí spínaného kapacitoru. Tím vytvoříme základní stavební prvek SC filtrů. Pokud vyjdeme ze zapojení na obrázku 11.13 pro integrátor a 17.77, dostaneme následující zapojení SC invertujícího integrátoru.



Obrázek 17.71: SC integrátor se základní implementací rezistoru pomocí spínaného kapacitoru.

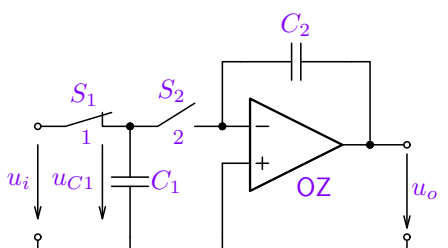
Přepínač nahradíme dvěma spínači, řízenými v různých fázích, tak jako na obrázku 17.65. Vztah pro přenos (z první do první a druhé fáze) lze odvodit v následujícím tvaru, viz analýzu v příkladu A.9.

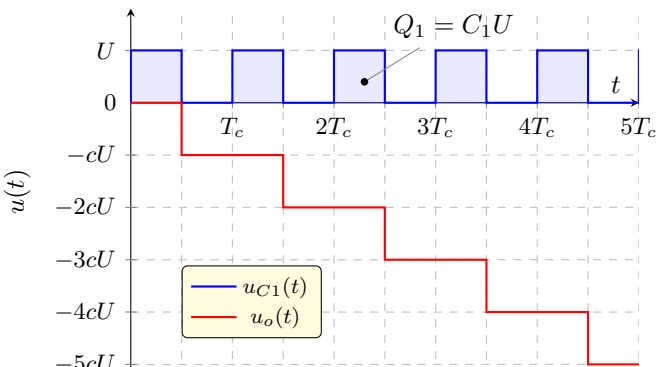
$$H_{io}(z) = \frac{U_o(z)}{U_i(z)} = -\frac{C_1}{C_2}\frac{1}{z-1}, \qquad H_{i\bar{o}}(z) = \frac{U_{\bar{o}}(z)}{U_i(z)} = -\frac{C_1}{C_2}\frac{\sqrt{z}}{z-1} \tag{17.93}$$

Skutečnost, že výše uvedený obvod se chová jako integrátor (invertující) lze potvrdit jednoduchou úvahou pro odezvu na jednotkový skok $u_i = U$: ① V první fázi se na vstup připojí kapacitor C_1 a nabije se na $u_{C1} = U$.

② V druhé fázi se celý jeho náboj $Q_1 = C_1 U$ přenese do C_2, jelikož u_{C1} se díky OZ vybije do 0 a vybíjecí proud proteče C_2, čímž změní jeho jeho náboj o $C_1 U = -\Delta u_o C_2 \Rightarrow \Delta u_o = -U\frac{C_1}{C_2} = -cU$.

③ Při dalším cyklu se k u_o přidá další příspěvek náboje, čímž se u_o po skocích lineárně mění, viz obrázek vpravo $\Longrightarrow$

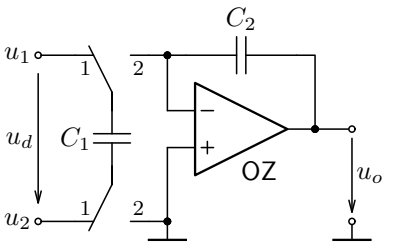




Obrázek 17.72: Schéma základního SC integrátoru a jeho přechodová charakteristika, kde $c = C_1/C_2$.

Přechodové charakteristiky pro různé implementace integrátoru jsou uvedeny v dodatku R.1.7, viz obrázek R.20.

Technika spínaných kapacitorů umožňuje velmi jednoduše realizovat i modifikovaná zapojení, které v „klasické“ implementaci znamenají použití dalších obvodů (OZ) a zesložitění. Příkladem takové modifikace je dále uvedeno zapojení neinvertujícího integrátoru na obrázku 17.75 (b) a zde uvedený rozdílový (diferenční) integrátor. Ten bere v úvahu pouze rozdíl vstupních napětí a souhlasná složka je z principu zcela potlačena[4]. Jeho přenos odpovídá předchozímu zapojení.



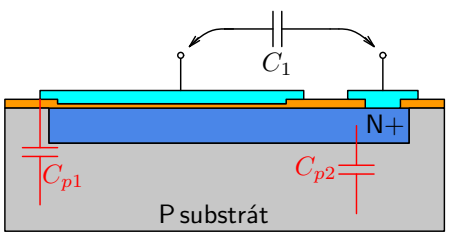
$$H(z) = \frac{U_o(z)}{U_d(z)} = \frac{U_o(z)}{U_1(z) - U_2(z)} = -\frac{C_1}{C_2}\frac{1}{z-1} \qquad (17.94)$$

Obrázek 17.73: Rozdílový (diferenční) SC integrátor a jeho přenos.

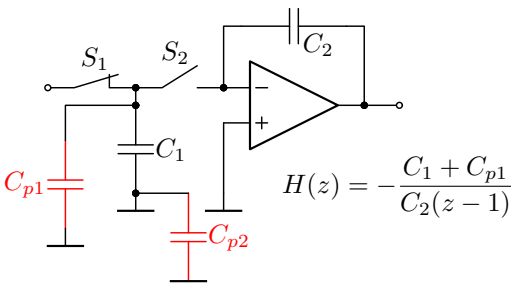
Přenos odpovídá obrazu integrálu $(1/s)$ pro tzv. FD transformaci, viz dodatek R.1.4, vztah (R.13). Je zřejmé, že přesného vztahu (R.2),tj. $s \equiv \ln z$ nelze dosáhnout – přenosové funkce uvedených implementací bude vždy ve tvaru racionálně lomené funkce, což vyplývá např. z použité metody analýzy (17.89). Více viz dodatek R.

[4]Na velikost souhlasné složky je nutné dimenzovat elektronické spínače, viz. 14.6

Nevýhodou uvedených implementací spínaného rezistoru je uplatňování parazitních kapacit, které vznikají při realizaci spínaného kapacitoru na čipu. Takové zapojení se označují jako tzv. „strays-sensitive“ (jsou citlivá na tyto parazity). Parazitní kapacitory C_{p1} a C_{p2} jsou znázorněny na schématickém znázornění realizace kapacitoru na čipu – obrázek 17.74 (a). Tyto kapacitory se pak projeví na chování výsledného obvodu. V případě základní implementace integrátoru dle 17.71 se uplatní kapacitor C_{p1}, který je paralelně k C_1, viz přenos. Parazitní kapacitory pro C_2 se neuplatní, jelikož je na jedné straně C_2 stále nulový potenciál a na druhé je C_2 buzen zdrojem napětí.



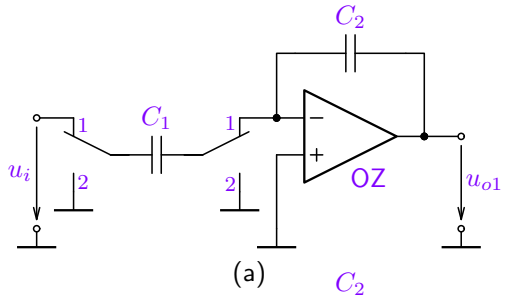
(a)

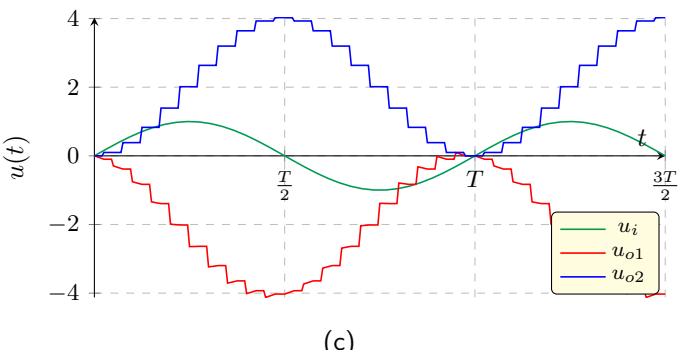


(b)

Obrázek 17.74: Ilustrace jednoduché realizace kapacitotu na čipu a její parazitní kapacity (a) a obvodové zapojení integrátoru spolu s uvedenými parazitními kapacitami (b).

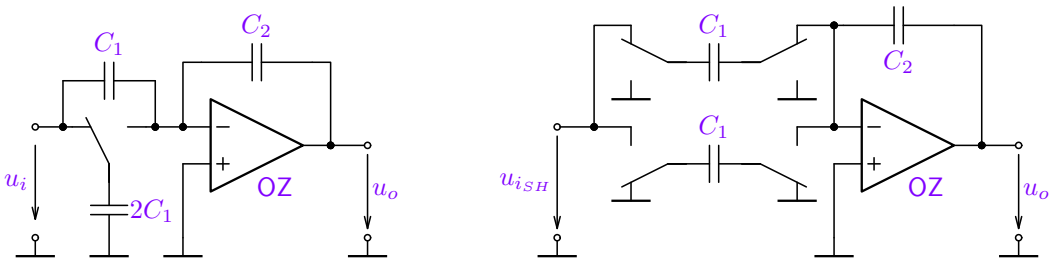
Modifikací zapojení lze potlačit vliv těchto parazitních kapacit, jak uvádí obrázky (a) a (b), přičemž varianta (b) je neinvertující variantou, viz také kapitolu R.1.7, obrázek R.17. Jistou nevýhodou zapojení (a) je pronikání časové změny vstupního napětí přímo na výstup po dobu první fáze, jak je ilustrováno časovými odezvami obou zapojení na harmonický vstupní signál na obrázku (c). Tuto „nedokonalost“ lze však jednoduše eliminovat zařazením S&H obvodu. Analýza přenosových funkcí je uvedena v dodatku R, kapitole R.1.7.





Obrázek 17.75: Invertující a neinvertující tzv. „strays-insensitive“ SC integrátory (a,b) a jejich časové odezvy (c).

Další implementací je zapojení R.18 v kapitole R.1.7, které při použití S&H (Sample & Hold) obvodu na vstupu vykazuje přenos integrátoru pro Bilineární transformaci (BL), viz dodatek R. To platí i pro zapojení na obrázku 17.76 (b), které je navíc „strays-insensitive“. Jednoduchou alternativou je pak zapojení (a), které S&H obvod nevyžaduje, ale je „strays-sensitive“. Přenos z první do první fáze (17.95) je pak shodný se vztahem (R.43).



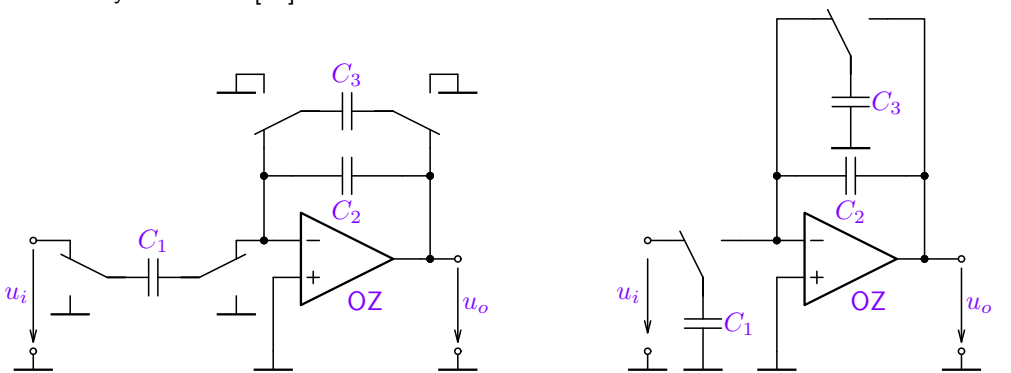
(a) (b): S&H $\rightarrow U_{i_{SH}} = U_{\bar{i}_{SH}} = U_i$

Obrázek 17.76: Tzv. Bilineární SC integrátor: (a) „strays-sensitive“ a (b) „strays-insensitive“.

$$H_{io}(z) = \frac{U_o(z)}{U_i(z)} = -\frac{C_1}{C_2}\frac{z+1}{z-1} \tag{17.95}$$

17.8.4. Implementace ztrátového SC integrátoru

Ztrátový SC integrátor vychází ze zapojení 11.14, kde jsou rezistory nahrazeny spínanými kapacitory. Dvě základní zapojení jsou uvedena na následujícím obrázku, přičemž zapojení (a) je nejvíce používané, díky potlačení parazitních kapacit. Viz také analýzu a více v [21].



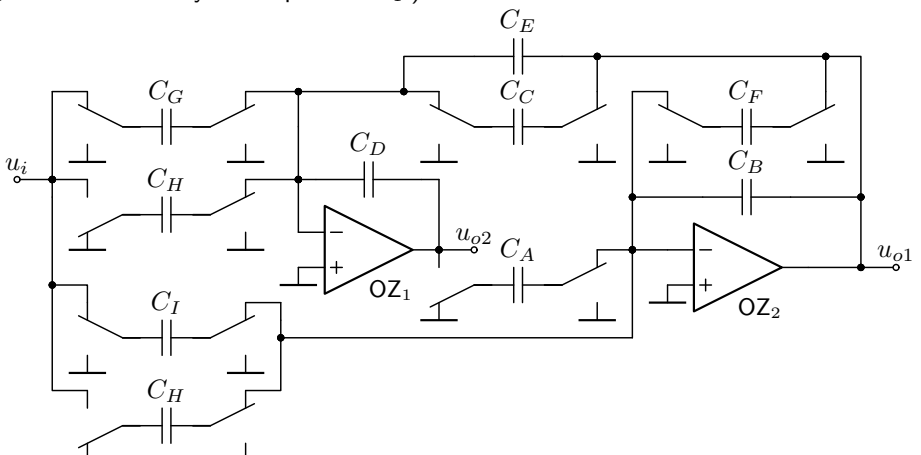
(b): $H_{io}(z) = -\dfrac{zC_1}{(C_2+C_3)z - C_2}$

(a): $H_{io}(z) = -\dfrac{C_1(C_2-C_3)}{C_2(C_2z - C_2 + C_3)}$

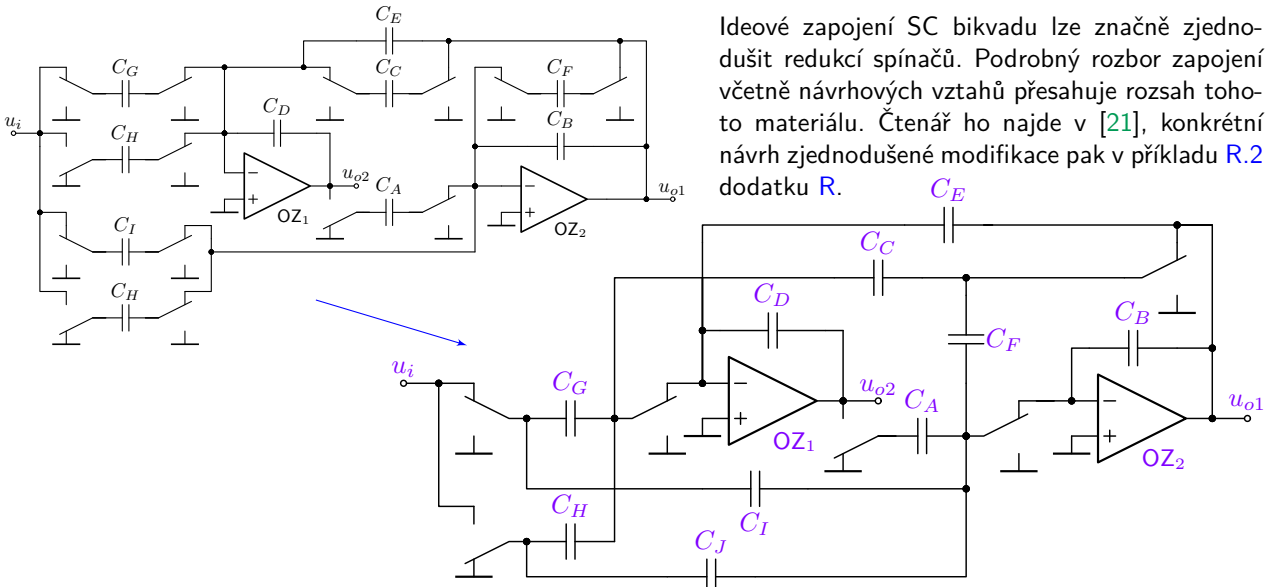
Obrázek 17.77: Ztrátový SC integrátor: (a) „strays-insensitive“ a (b) „strays-sensitive“.

17.8.5. Bikvadratická sekce SC pro kaskádní realizaci filtrů

Pomocí uvedených zapojení integrátorů (včetně ztrátového a neinvertujícího) lze již implementovat obecnou bikvadratickou sekci. Jedná se o zapojení, které vychází ze zapojení 17.58, přičemž např. ztrátový integrátor je zde tvořen OZ_2 (vazba K_b blokové struktury 17.57 pomocí C_F).



Obrázek 17.78: Ideové zapojení Fleischer-Laker SC biquadu.

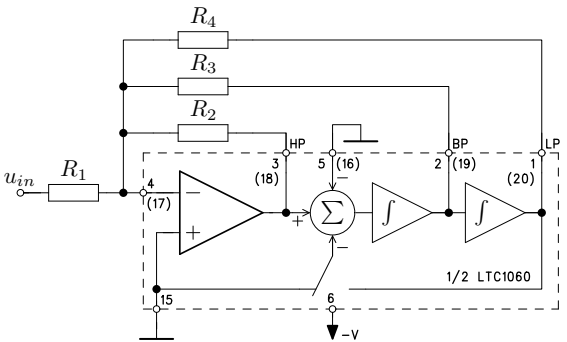


Ideové zapojení SC bikvadu lze značně zjednodušit redukcí spínačů. Podrobný rozbor zapojení včetně návrhových vztahů přesahuje rozsah tohoto materiálu. Čtenář ho najde v [21], konkrétní návrh zjednodušené modifikace pak v příkladu R.2 dodatku R.

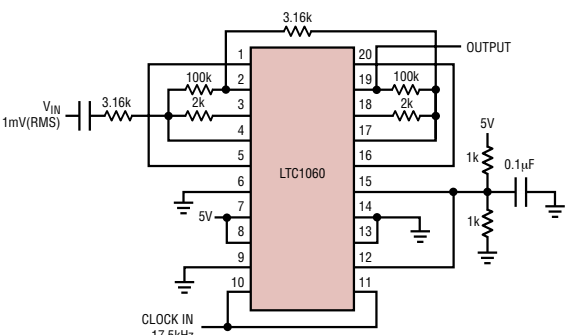
Obrázek 17.79: Upravený Fleischer-Laker SC biquad, přenosové vlastnosti viz analýzu.

Integrovaný obvod LTC 1060 – dvě bikvadratické sekce SC s širokou možností konfigurace

- LTC1060 obsahuje dva konfigurovatelné SC bikvady, jejichž vlastnosti lze nastavit poměrem odporů ve ZV,
- realizace všech typů přenosových funkcí (LP, HP, BP, BS, včetně eliptických filtrů i fázovacích článků),
- použitelné do kmitočtů $30\,\mathrm{kHz}$ ($f_{clk} = 1{,}6\,\mathrm{MHz}$) při dynamickém rozsahu $88\,\mathrm{dB}$ a napájecím napětí $\pm 2{,}5\,\mathrm{V}$,
- viz také dodatek Q a podrovný návod na měření laboratorního přípravku filtru.



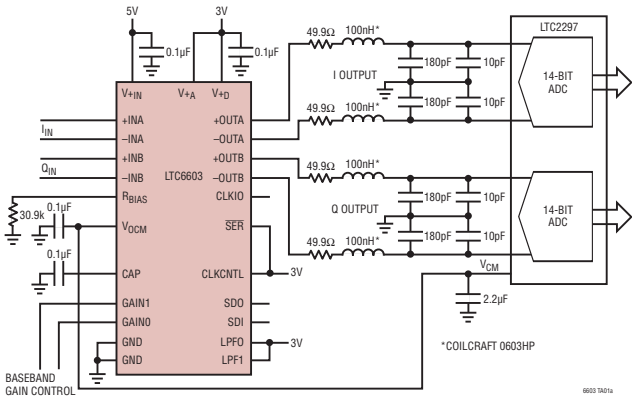
(a)

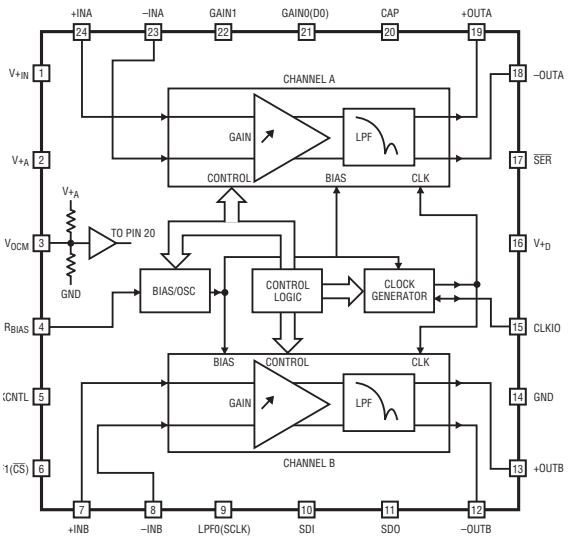


(b)

Obrázek 17.80: Jedno z možných zapojení (mód 3) SC biquadu LTC/,1060 (a) a konkrétní zapojení celého obvodu jako BP filtru (b).

Integrovaný obvod LTC6603 – příklad programovatelného SC filtru typu dolní propust



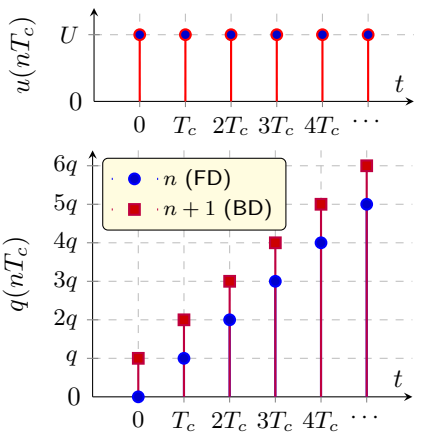


- šířka pásma: do $2{,}5\,\mathrm{MHz}$,
- zisk: $0/6/12/24\,\mathrm{dB}$,
- filtr: LP 9. řádu s lineární fází,
- aplikace: WCDMA, UMTS, 802.11x přijímače.

Obrázek 17.81: Katalogové zapojení SC filtru s obvodem LTC/,6603 a jeho vnitřní blokové uspořádání.

17.8.6. Implementace SC induktoru

U spínaných obvodů byla představena pouze kaskádní syntéza filtrů, tj. vytvoření bikvadratické sekce jako univerzálního bloku pro realizaci přenosových funkcí 2. řádu. Jejich zapojením do kaskády lze získat „jakoukoli“ přenosovou funkci LTI. U SC obvodů lze dále využít implementaci induktoru, tj. funkční simulaci LC prototypu. Implementaci induktoru získáme podobně, jako implementaci rezistoru pomocí SC obvodu na obrázku 17.64.



Admitanci induktoru lze vyjádřit s využitím FD transformace dle (R.13):

$$Y(s) = \frac{1}{sL} \xrightarrow[\text{FD}]{s=\frac{z-1}{T_c}} Y(z) = \frac{T_c}{(z-1)L} \Rightarrow \frac{Q(z)}{U(z)} = \frac{I(z)T_c}{U(z)L} = \frac{T_c^2}{(z-1)L} \tag{17.96}$$

Odezva $Q(z)$ pro $U(z) = \mathbf{1}[n]$ dle tabulky R.1 pro $T_c = 1$, $L = 1$:

$$U(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \Rightarrow Q(z) = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{z}{(z-1)^2}, \tag{17.97}$$

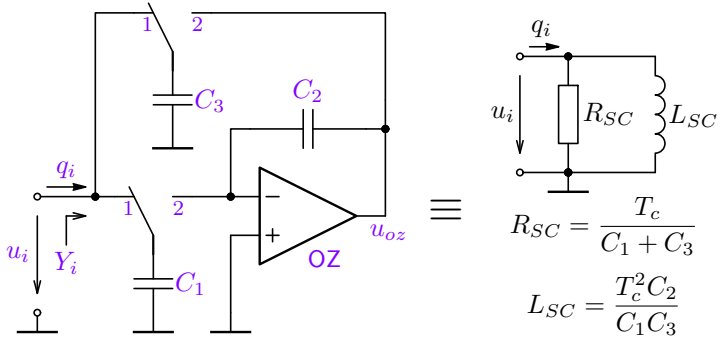
což odpovídá lineární rostoucí posloupnosti. Po BD transformaci pak dostáváme vztah (17.98), včetně grafického vyjádření vlevo:

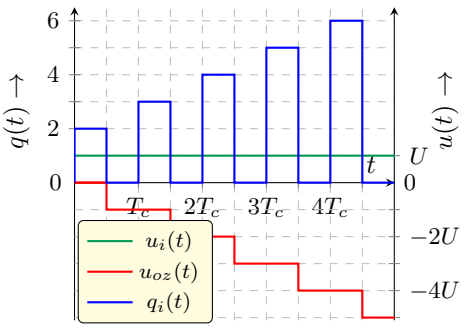
$$\xrightarrow[\text{BD}]{s=\frac{1-z^{-1}}{T_c}} Q(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})^2} = \frac{z^2}{(z-1)^2}. \tag{17.98}$$

Obrázek 17.82: Diskrétní časové průběhy náboje SC induktoru jako odezva na jednotkový skok napětí.

Realizace ztrátového induktoru SC obvodem vychází ze zapojení SC integrátoru. $\mathcal{Z}$ obraz vstupního náboje lze vyjádřit následovně a porovnáním s (17.96) pak pro vstupní admitanci a následně její prvky dostaneme:

$$Q_i(z) = I_i(z)T_c = U_i(z)\left(C_1 + C_3 + \frac{C_1C_3}{C_2}\frac{1}{(z-1)}\right); \qquad Y_{i_{SC}}(z) = \frac{1}{R_{SC}} + \frac{T_c}{(z-1)L_{SC}}, \ \Rightarrow \tag{17.99}$$

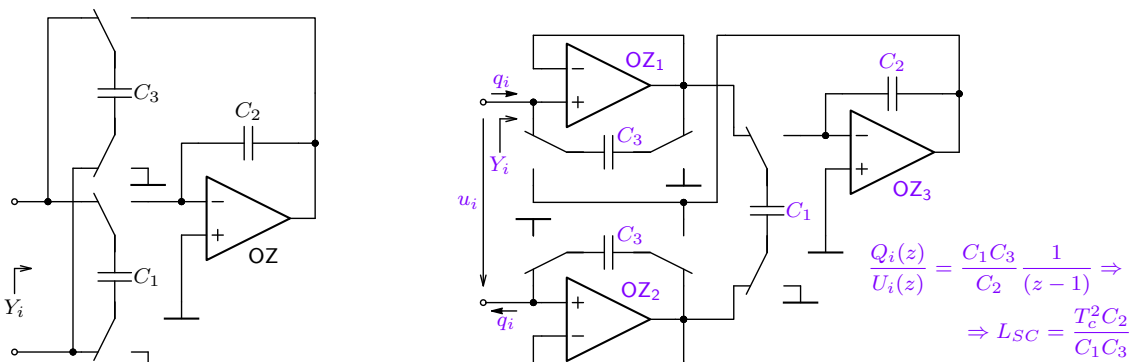




Obrázek 17.83: SC realizace uzemněného ztrátového induktoru a časové odezvy pro $u_i = U$ a $C_1 = C_2 = C_3 = 1$.

Funkce, resp. časová odezva vstupního náboje je patrná z činnosti invertujícího SC integrátoru, resp. jeho výstupního napětí u_{oz}, které se bude snižovat a tím bude růst vstupní proud, resp. náboj dodávaný do C_3 při každé spínací periodě.

Na základě realizace uzemněného SC induktoru z obrázku 17.83 lze jednoduchou úpravou získat induktor plovoucí se stejnou admitancí jako (17.99) a další úpravou pak bezeztrátový induktor.

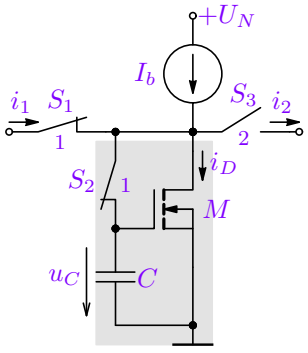


Obrázek 17.84: SC realizace plovoucího ztrátového a bezeztrátového induktoru.

Pomocí SC lze vytvářet i struktury podobné číslicovým filtrům, viz [21]. Jejich implementace však není tak efektivní jako v případě obvodů se spínanými proudy, které jsou představeny v další podkapitole. Ty však mají jednu zásadní nevýhodu ve spotřebě proudu a díky nenulovému napájecímu napětí i spotřebovaném výkonu. Z tohoto důvodu není jejich vyžití rozšířené. Další významné využití SC obvodů je v implementacích D/A i A/D převodníků a dalších aplikacích (nulování napěťového ofsetu ve strukturách OZ), což však překračuje rámec tohoto materiálu.

17.9. Implementace filtrů obvody se spínanými proudy (SI)

Na analogickém principu jako obvody se spínanými kapacitory (SC) pracují i tzv. obvody se spínanými proudy (SI). Na rozdíl od obvodů SC, u kterých je signál vyjádřen velikostí napětí, pracují SI obvody s proudy, jako signálovou veličinou. Jejich základním obvodem je zpožďovač uvedený na obrázku 17.85. Princip obvodu lze popsat následovně:



V první fázi Φ_1, tj. $t = (nT_c)$, jsou sepnuty spínače S_1 a S_2. Proud $i_1(nT_c)$ nabije kapacitor C na napětí $u_C(nT_c)$ tak, aby po ustálení platilo $i_D(nT_c) = I_b + i_1(nT_c)$. Spínač S_3 je rozpojen, tj. $i_{\bar{2}} = 0$. Ve fázi Φ_2, tj. $t = \big((n+1/2)T_c\big)$, jsou sepnuty spínače S_1 a S_2 rozpojeny a S_3 spojen. Proud $i_{\bar{1}}\big((n+1/2)T_c\big) = 0$, tj. kapacitor C je stále nabit na stejné napětí $u_C\big((n+1/2)T_c\big) = u_C(nT_C)$, a tím platí i $i_D\big((n+1/2)T_c\big) = I_b + i_1(nT_C)$. Pak je $i_{\bar{2}}\big((n+1/2)T_c\big) = I_b - i_D(nT_c) = -i_1(nT_c)$, tj. zpožděn o polovinu vzorkovací periody. Aplikací $\mathcal{Z}$ transformace dostáváme:

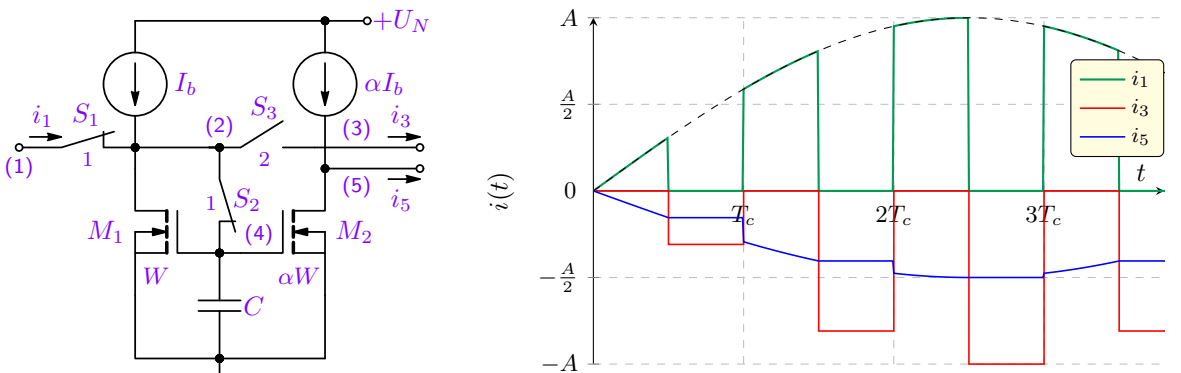
$$z^{1/2} I_{\bar{2}}(z) = -I_1(z) \quad \Rightarrow \quad \frac{I_{\bar{2}}(z)}{I_1(z)} = -\frac{1}{\sqrt{z}} = -z^{-1/2} \tag{17.100}$$

Obrázek 17.85: Zpožďovací spínaný obvod v proudovém módu a jeho popis.

Z popisu je zřejmé, že na velikosti kapacity C nezáleží. Ta slouží jako paměť napětí $u_C = u_{GS}$, tj. proudu i_D. Ve skutečnosti je tato kapacita tvořena vstupní (parazitní) kapacitou C_{GS} MOSFETu M. Tím je velmi malá a pokud je přebíjecí čas $< T_C/2$, dojde před změnou fáze vždy k ustálení u_C. Více o analýze obvodů SI viz dodatek A.6.

Pro zpoždění o T_c je třeba použít dva obvody zapojené v kaskádě. Na obrázku 17.86 je uvedeno zapojení zpožďovacího proudového zrcadla, které umožňuje násobení proudu konstantou $\neq 0$, což je třeba nejen pro konstrukci filtrů. Platí (viz příklad dodatku A.10):

$$\frac{I_{\bar{3}}(z)}{I_1(z)} = -z^{-1/2}, \quad \frac{I_5(z)}{I_1(z)} = -\alpha \tag{17.101}$$



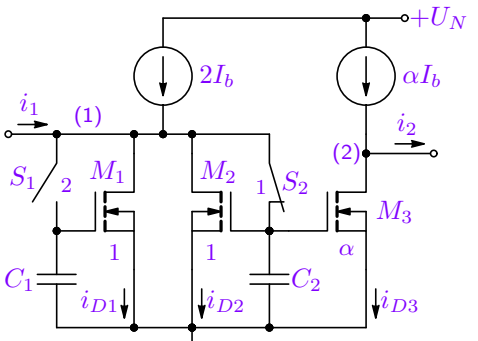
Obrázek 17.86: Proudové zrcadlo implementované SI technikou a časové průběhy vstupního a výstupních proudů pro $\alpha = 0{,}5$, přičemž W a αW jsou šířky kanálů tranzistorů (délka kanálů L shodná).

17.9.1. Implementace SI integrátoru a bikvadratické přenosové funkce

Konstrukce integrátoru vychází z akumulace diskrétních vzorků náboje jako odezva na jednotkový skok. V technice SC se vychází z klasického zapojení s OZ. V tomto případě (SI) jsou základem tranzistory M_1 a M_2, které střídavě akumulují náboj na kapacitorech, čímž jsou pak dány proudy a platí:

$$\phi_2: \quad i_{\bar{D}\bar{1}}[n-1/2] = 2I_b + i_{\bar{1}}[n-1/2] - i_{\bar{D}\bar{2}}[n-1/2] = 2I_b + i_{\bar{1}}[n-1/2] - \left(I_b - \frac{i_{\bar{2}}[n-1/2]}{\alpha}\right), \tag{17.102}$$

$$\phi_1: \quad i_1[n] = 0, \quad i_{D2}[n] = 2I_b - i_{D1}[n] = 2I_b - i_{\bar{D}\bar{1}}[n-1/2] = I_b - i_{\bar{1}}[n-1/2] - \frac{i_{\bar{2}}[n-1/2]}{\alpha}, \tag{17.103}$$



Obrázek 17.87: Ideální SI integrátor.

vzhledem k tomu, že $i_{D2} = i_{D3}/\alpha = I_b - i_2/\alpha$ a $i_{D1}[n] = i_{\bar{D}\bar{1}}[n-1/2]$ (S&H princip). Vzhledem k výše uvedenému dále také platí:

$$i_{D2}[n] = \frac{i_{D3}[n]}{\alpha} = I_b - \frac{i_2[n]}{\alpha} = I_b - \frac{i_{\bar{2}}[n+1/2]}{\alpha}. \tag{17.104}$$

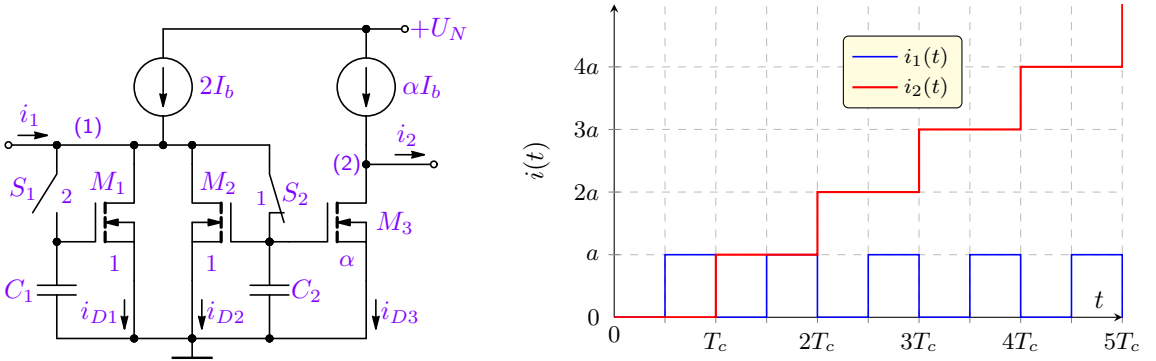
Porovnáním (17.103) a (17.104) a následnou aplikací $\mathcal{Z}$ transformace dostaneme:

$$-I_{\bar{1}} z^{-1/2} - \frac{-I_{\bar{2}} z^{-1/2}}{\alpha} = -\frac{-I_{\bar{2}} z^{1/2}}{\alpha} \tag{17.105}$$

$$\Rightarrow H_{\bar{1}\bar{2}}(z) = \frac{I_{\bar{2}}(z)}{I_{\bar{1}}(z)} = -\frac{\alpha}{\sqrt{z}\left(\frac{1}{\sqrt{z}} - \sqrt{z}\right)} = \frac{\alpha}{z-1} \tag{17.106}$$

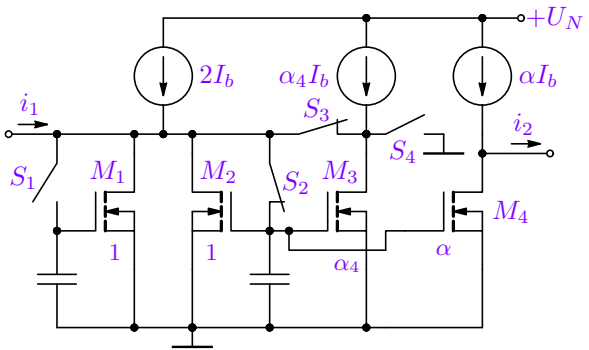
V předchozím případě bylo předpokládáno buzení pouze ve druhé fázi ϕ_2, tj. pro ϕ_1 byl $i_1 = 0$. Výsledek (17.106) odpovídá FD transformaci, viz dodatek R.1.4, vztah (R.13). Pokud bychom změnili časování vstupního proudu a budili naopak pouze v první fázi, pak se jedná o invertující integrátor s přenosy odpovídajícími BD, resp. LDI transformaci, viz dodatek R.1.3, R.1.5. Maticové řešení analýzy je ukázáno v dodatku A.11.

$$H_{12}(z) = H_{1\bar{2}}(z) = \frac{I_{\bar{2}}(z)}{I_1(z)} = -\frac{\alpha\sqrt{z}}{z-1}, \qquad H_{\bar{1}2}(z) = \frac{I_2(z)}{I_{\bar{1}}(z)} = \frac{\alpha\sqrt{z}}{z-1}, \qquad H_{\bar{1}\bar{2}}(z) = \frac{I_{\bar{2}}(z)}{I_{\bar{1}}(z)} = \frac{\alpha}{z-1} \tag{17.107}$$



Obrázek 17.88: Ideální SI integrátor a jeho časová odezva odpovídající $H_{\bar{1}\bar{2}}(z)$, tj. buzení ve 2. fázi a pro $\alpha = 1$.

Podstatou integrátoru jsou tranzistory M_1 a M_2, které střídavě akumulují vstupní vzorky. Pokud je i_1 v dané fázi konstantní, pak se postupně zvětšují vzorky i_{D1}, tj. vzorky i_{D2} postupně klesají ($i_{D2}[n] + i_{D2}[n] = 2I_b$) a tím i roste výstupní proud i_2, jak ukazuje graf na obrázku 17.88, viz také Spice analýzu. Pokud je však přidán tranzistor M_4 dle 17.89, bude část proudu odebírat, a tím se bude zmenšovat (ztrácet) akumulovaný náboj. Zapojení funguje jako ztrátový integrátor, přičemž M_4 se chová jako rezistor = proudový zdroj řízený napětím na sobě samém, viz obrázek 2.3. Přenosovou funkci lze odvodit stejně, jako v předchozím případě:

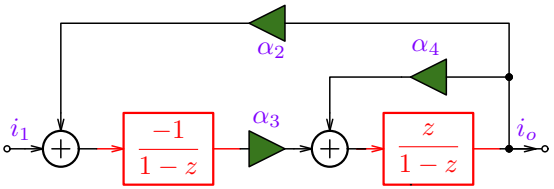


$$H_{\bar{1}\bar{2}}(z) = \frac{I_{\bar{2}}(z)}{I_{\bar{1}}(z)} = \frac{\frac{\alpha}{1+\alpha_4} z^{-1}}{1 - \frac{1}{1+\alpha_4} z^{-1}} = \frac{\alpha}{(1+\alpha_4)z - 1}, \tag{17.108}$$

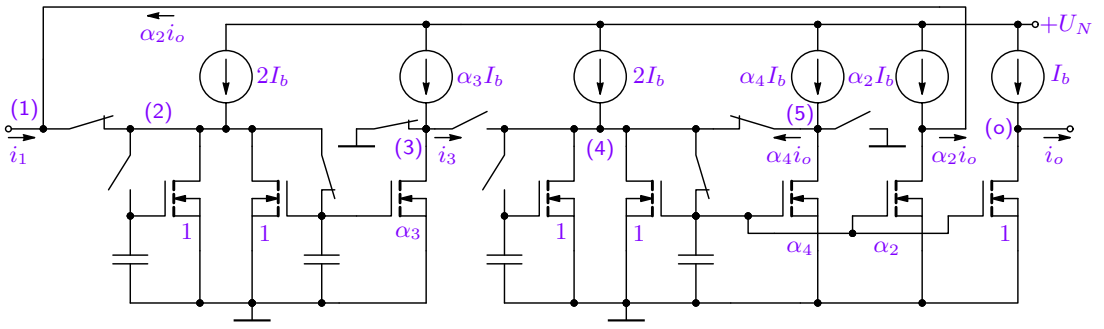
což odpovídá FD transformaci.

Obrázek 17.89: Ztrátový SI integrátor a jeho přenosová funkce ze druhé do druhé fáze.

Kombinací integrátorů a zpětných vazeb lze vytvořit bikvadratickou funkci, např. dle zapojení na obrázku 17.90.



$$H_{12}(z) = \frac{I_o(z)}{I_1(z)} = \frac{-z\alpha_3}{z^2(1+\alpha_4) + z(\alpha_2\alpha_3 - \alpha_4 - 2) + 1} \tag{17.109}$$



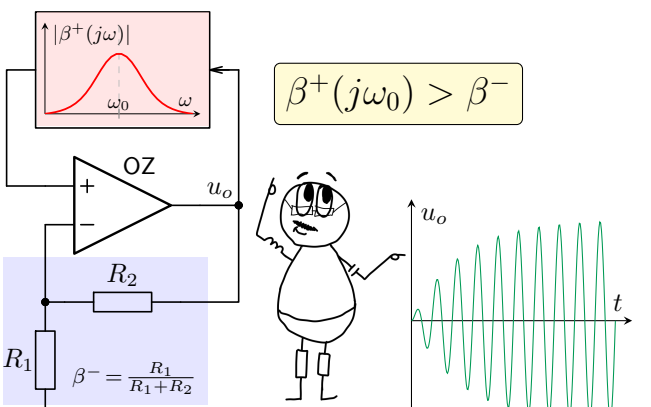
Obrázek 17.90: Základní bikvadratická sekce – blokové schéma a implementace pomocí spínaných proudů.

Zpětnovazební strukturou s integrátory analogicky k 17.53 získáme přenos soustavy druhého řádu (tzv. bikvad), viz např. [16]. Přenosové funkce vyšších řádů lze vytvořit kaskádním řazením. Vzhledem ke struktuře SI obvodů lze přímo realizovat i struktury digitálních filtrů, viz také komentář a [21, 16].

Poznámky XVII

Kapitola 18
Regenerativní soustavy

Tato kapitola popisuje možnosti obvodového řešení systémů, které generují periodické signály. Ty jsou často označovány jako regenerativní soustavy nebo oscilátory. Uživatel se seznámí s principy funkce jak obvodů, které pracují bez zpětné vazby, tak zejména s principy zpětnovazebních regenerativních soustav. Naučí se analyzovat tyto obvody a navrhnout hodnoty prvků tak, aby byla soustava generovala periodický signál a to na zvoleném kmitočtu. Jsou ukázány jak obvodové struktury RC, tak LC i krystalové oscilátory. Závěr je pak věnován napětím řízeným oscilátorům a systému fázového závěsu, který takový oscilátor využívá.

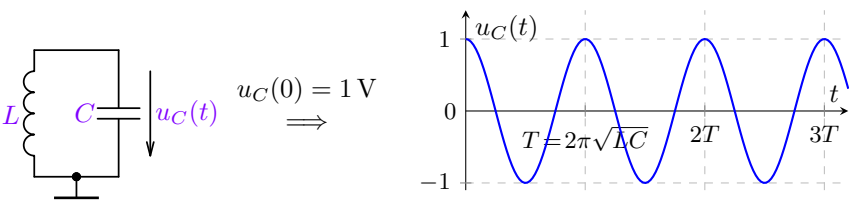


18.1. Oscilátory

Oscilátory jsou nestabilní systémy generující na svém výstupu periodický signál harmonického časového průběhu. Elektronické implementace jsou založeny zejména na zpětnovazebním principu, ale mohou pracovat i bez ZV např. s využitím negativního odporu.

18.1.1. Princip oscilátorů s negativním dynamickým odporem

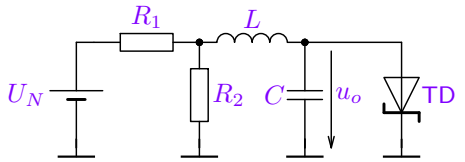
Princip těchto oscilátorů vychází z chování bezeztrátového rezonančního obvodu, který po vybuzení (např. nabití kapacitoru) generuje harmonický signál o kmitočtu $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, viz kapitolu 5.5.3.



Obrázek 18.1: Ilustrace kmitů bezeztrátového rezonančního obvodu, viz také analýzu.

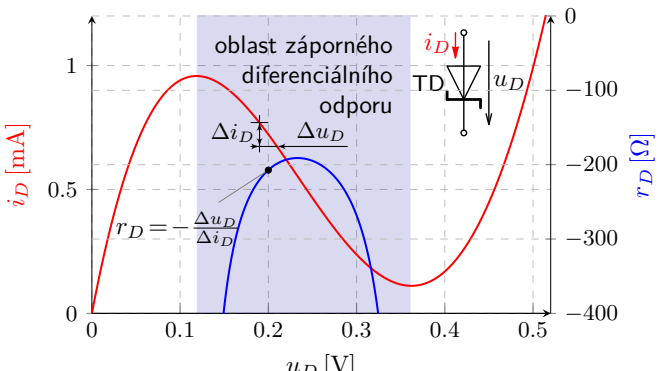
V reálných obvodech jsou vždy přítomny ztráty (zejména v induktoru), které lze modelovat ztrátovým rezistorem. Také je třeba signál odebírat, tj. je nutné obvodu dodávat energii, aby se kmity nezatlumily. To lze zajistit napájecím zdrojem dodávajícím energii a záporným diferenciálním odporem, který obvod odtlumí.

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

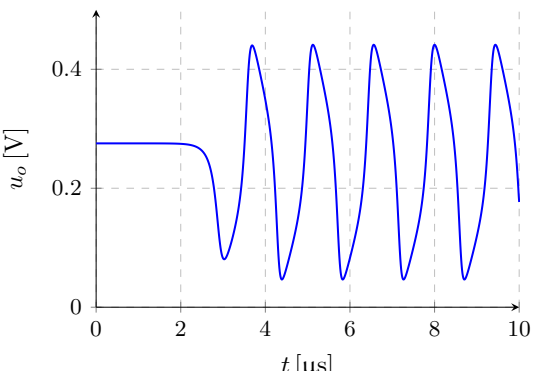


(a)

Konkrétní zapojení oscilátoru je uvedeno na obrázku (a), kde je pro odtlumení použita tunelová dioda s V-A charakteristikou ilustrovanou na obrázku (b). Pokud je pracovní bod diody nastaven napájecím zdrojem U_N do oblasti záporného diferenciálního odporu, jehož hodnota je větší než ztrátový odpor, dojde k rozkmitání obvodu relaxačními kmity, viz obrázek (c) a analýzu.



(b)



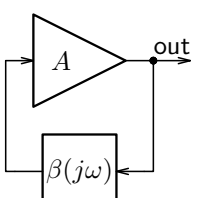
(c)

Obrázek 18.2: Zapojení oscilátoru s tunelovou diodou (a), její charakteristika (b) a výstupní signál oscilátoru (c).

Uvedené relaxační obvody s tunelovou diodou generují obvykle zkreslený (neharmonický) signál, jelikož nemají řízení amplitudy. Většinou se používají pouze pro generování signálů velmi vysokých kmitočtů, kde je naopak problematické použití jinak velmi rozšířených oscilátorů zpětnovazebních.

18.1.2. Princip zpětnovazebních oscilátorů

V předchozím případě se jednalo o oscilace, které jsou založeny na rezonanci – periodické změně energie elektrického pole na energii pole magnetického. Takový systém (netlumený obvod) vykazuje póly přenosu na imaginární ose, jak je zřejmé např. z analýzy, viz také kapitolu 7.3.2 (str. VII-15) a obrázek 8.15. Vzhledem k tomu, že poloha pólů závisí i na vratném rozdílu zpětnovazebních systémů, jak je ukázáno v kapitole 10.8.3 (viz obrázek 10.21), je možné oscilátory (nestabilní systémy) založit i na principu ZV. Základní blokové uspořádání je na obrázku 18.3, přičemž zesilovač A je obvykle širokopásmový (kmitočtově nezávislý) a kmitočet oscilátoru je dán vlastnostmi zpětnovazebního členu $\beta(j\omega)$.

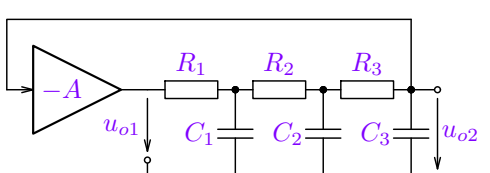


Obrázek 18.3: Blokové schéma ZV oscilátoru

18.1.3. Zpětnovazební oscilátor s posouvanou fází

Pro implementaci oscilátoru s posouvanou fází se využívá invertující zesilovač se zesílením $-A$ a zpětnovazební člen $\beta(j\omega)$ složený např. z integračních RC článků, jak uvádí obrázek 18.4. Je nezbytné, aby přenos $\beta(j\omega)$ byl minimálně 3. řádu (viz kapitolu 10.8.4 a porovnej obrázky 10.19 a 10.21). Pak ZV člen obrací fázi o $180°$ při konečném kmitočtu ω_0 a nenulovém přenosu $|\beta(j\omega_0)|$ (konečném útlumu) a tím se záporná zpětná vazba ve ZV struktuře změní na kladnou. Pokud tento útlum vyrovnáme zesilovačem, tj. platí $|A| = \frac{1}{|\beta(j\omega_0)|}$, bude soustava podle Nyquistova kritéria právě na mezi stability, tj. $\beta(j\omega_0)A = 1$.

Pro kmitočtovou charakteristiku přenosu zpětnovazebního RC členu $\beta(j\omega)$ oscilátoru z 18.4 platí vztah (18.1). Jeho imaginární část je nulová pro $\omega = \omega_0$ (18.2) a přenos je pak $\beta(j\omega_0) < 0$ (18.3), tj. člen obrací fázi a pro $A = \frac{1}{\beta(j\omega_0)}$ leží póly celého systému na imaginární ose, jak spolu s odvozením ukazuje analýza.



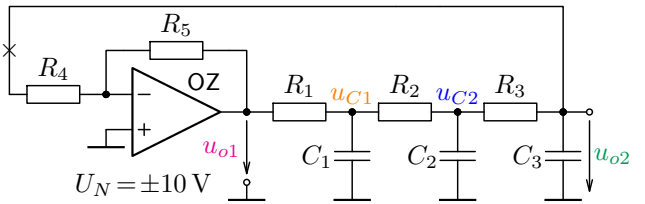
$$\beta(j\omega) = \frac{1}{1 - 5(RC\omega)^2 + j\big(6RC\omega - (RC\omega)^3\big)}, \qquad (18.1)$$

$$6RC\omega_0 = (RC\omega_0)^3 \implies \omega_0 = \frac{\sqrt{6}}{RC}, \qquad (18.2)$$

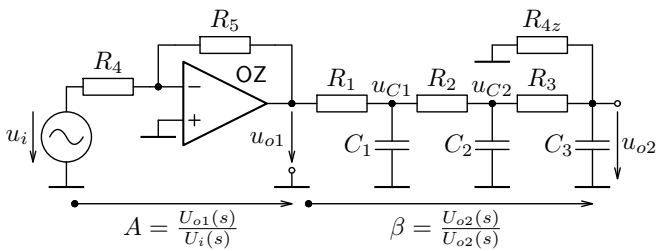
$$\beta(j\omega_0) = -\frac{1}{29}, \qquad \frac{1}{29} \doteq -29\,\mathrm{dB}. \qquad (18.3)$$

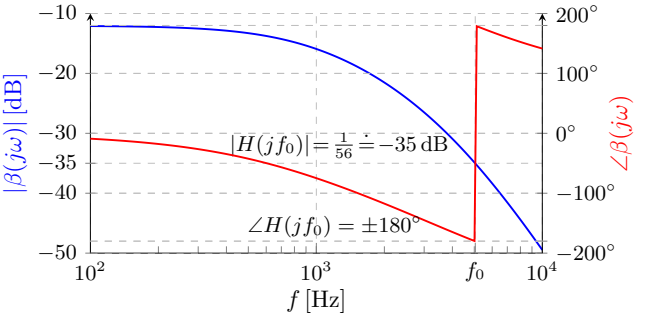
Obrázek 18.4: Principiální zapojení ZV oscilátor s posouvanou fází a odvození jeho oscilačního kmitočtu.

Implementace předchozího zapojení oscilátoru s operačním zesilovačem je ukázána na obrázku 18.5). Pro analýzu podmínek oscilací pomocí Nyquistova kritéria je třeba analyzovat rozpojenou ZV smyčku. Místo rozpojení je naznačeno ve schématu ($\times$) a zapojení rozpojené smyčky s korektním zakončením ($R_{4z} = R_4$) je uvedeno na obrázku 18.6. Analýza podmínek oscilací pro zakončený (zatížený) ZV člen je uvedena také v předchozí simulaci.



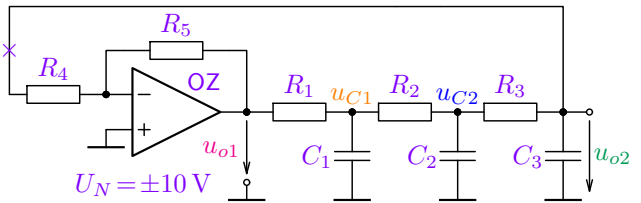
Obrázek 18.5: Implementace ZV oscilátoru s posouvanou fází pomocí operačního zesilovače.

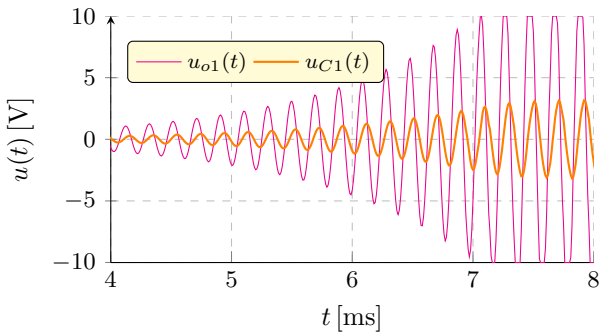


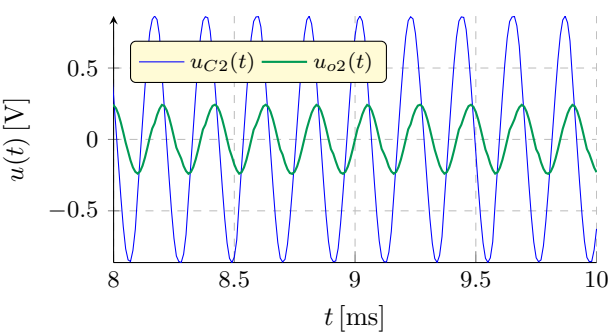


Obrázek 18.6: Schéma rozpojené ZV smyčky oscilátoru a kmitočtová charakteristika zakončeného ZV členu.

Výsledné chování oscilátoru v časové oblasti ukazuje následující obrázek. Pro jejich analýzu je nutné zadat do obvodu nějaký „vzruch“: $u_C(0) \neq 0$, napěťový ofset OZ, ... Je zřejmé, že na výstupu OZ (u_{o1}) je signál omezený napájecím napětím $\pm 10\,\mathrm{V}$. Na dalších průbězích jsou pak vyšší harmonické způsobující toto zkreslení více utlumeny, díky ZV článku typu dolní propust, viz přednáška.







Obrázek 18.7: Zapojení ZV oscilátoru s posouvanou fází s operačním zesilovačem a časové odezvy v jednotlivých uzlech celého řetězce pro R_1 až $R_4 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_5 = 57\,\mathrm{k\Omega}$ a $C_1 = C_2 = C_3 = 10\,\mathrm{nF}$.

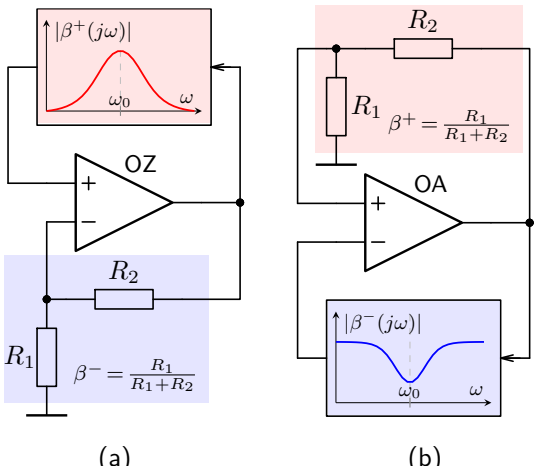
18.1.4. Zpětnovazební můstkové oscilátory

Můstkové oscilátory využívají kladnou ($|\beta^+(j\omega)|$) i zápornou ($|\beta^-(j\omega)|$) zpětnou vazbu, přičemž pouze jedna z nich je kmitočtově závislá tak, aby jednoznačně určovala kmitočet oscilací ω_0. Realizaci lze tedy uskutečnit dvěma způsoby:

(a) Kmitočtově závislý člen je zapojen v kladné zpětné vazbě a jeho modulová charakteristika $|\beta^+(j\omega)|$ odpovídá pásmové propusti. Pro podmínku nestability pak musí pro maximum modulu platit $|\beta^+(j\omega_0)| > \beta^- = \frac{R_1}{R_1+R_2}$, kde β^- je konstanta udávající zesílení zesilovače ($A = \frac{1}{\beta^-}$).

(b) Kmitočtově závislý člen je zapojen v záporné zpětné vazbě a jeho modulová charakteristika $|\beta^-(j\omega)|$ odpovídá pásmové zádrži. Pro podmínku nestability pak musí pro minimum modulu platit $|\beta^-(j\omega_0)| < \beta^+ = \frac{R_1}{R_1+R_2}$, přičemž $A(j\omega_0) = \frac{1}{\beta^-(j\omega_0)}$ udává maximální zesílení zesilovače.

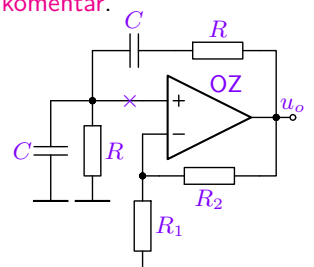
Pro kmitočty $\omega \neq \omega_0$ se pak podmínky pro nestabilitu zhoršují, s čímž souvisí i fázová charakteristika, pro kterou musí platit $\angle\beta(j\omega_0) = 0$. Více viz přednáška.



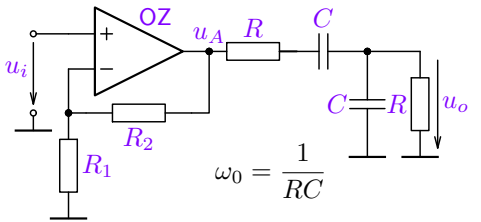
Obrázek 18.8: Principiální blokové schéma můstkového oscilátoru s kmitočtově závislým členem v kladné (a) nebo záporné (b) zpětné vazbě operačního zesilovače.

Oscilátor s Wienovým článkem

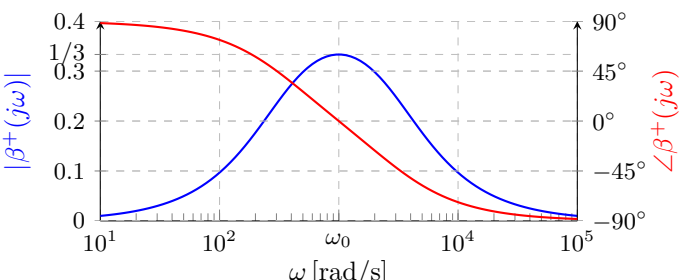
Konkrétní zapojení můstkového oscilátoru s kmitočtově závislou kladnou ZV je na obrázku (a). Ve ZV je zapojen tzv. Wienův článek s obvykle stejnými hodnotami kapacitorů C a rezistorů R. Rozpojenou ZV smyčku (rozpojení v místě $\times$) ukazuje obrázek (b) a její charakteristiky pak obrázek (c) – viz analýzu včetně odvození podmínek oscilací a komentář.



(a)



(b): $\beta^+(j\omega) = \frac{U_o(j\omega)}{U_A(j\omega)}$, $A = \frac{R_1+R_2}{R_1} \geq 3 = \frac{1}{\beta^+(j\omega_0)}$

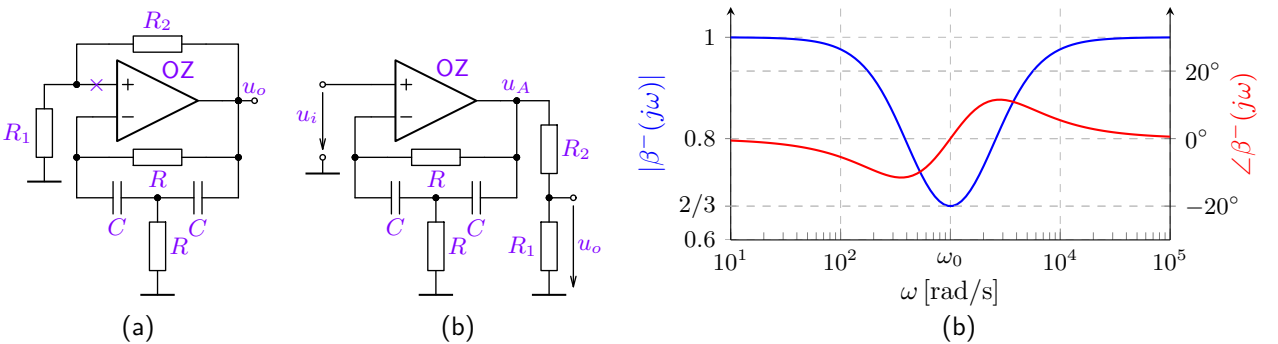


(c)

Obrázek 18.9: Zapojení oscilátoru s Wienovým článkem (a), jeho rozpojená ZV smyčka (b) a kmitočtová charakteristika zpětnovazebního článku (c).

Oscilátor s přemostěným T-článkem

Konkrétní zapojení můstkového oscilátoru s kmitočtově závislou zápornou ZV je na obrázku (a). Ve ZV je zapojen tzv. přemostěný T-článek. Rozpojenou ZV smyčku (rozpojení v místě $\times$) ukazuje obrázek (b) a její charakteristiky (se stejnými hodnotami kapacitorů C a rezistorů R) pak obrázek (c) – viz analýzu včetně odvození podmínek oscilací. Z charakteristik vyplývá, že pro minimum $\beta^-(j\omega) = \frac{U_A(j\omega)}{U_i(j\omega)}$ platí $\beta^-(j\omega_0) = \frac{2}{3}$. Vzhledem k tomu, že $A(j\omega) = \frac{1}{\beta^-(j\omega)}$, musí pro podmínku oscilací platit $\beta^+ = \frac{R_1}{R_1+R_2} \geq \frac{2}{3}$, aby $A(j\omega_0)\beta^+ \geq 1$ (platí $\angle A(j\omega_0) = -\beta^-(j\omega_0) = 0$) , viz analýzu T-článku včetně odvození. Podrobná analýza i dalších ZV článků je uvedena zde zde.

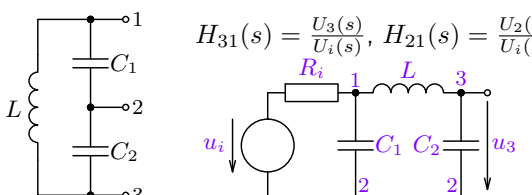


Obrázek 18.10: Zapojení oscilátoru s přemostěným T-článkem (a), jeho rozpojená ZV smyčka (b) a kmitočtová charakteristika zpětnovazebního článku (c).

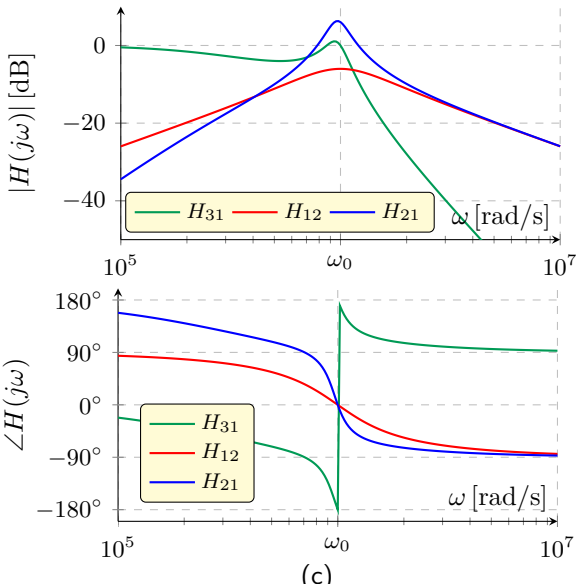
© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

18.1.5. Oscilátory LC

Pro oscilátory vyšších kmitočtů již nelze využít zpětnovazební RC články (malé $R \to$ velký proudový odběr, malé $C \approx C_{\text{parazitní}}$. Nabízí se realizace ZV článku pomocí LC prvků, kdy $\sqrt{LC} \ll RC$. Na obrázku 18.11 (a) je rezonanční obvod s dělným kapacitorem pro Colpittsův oscilátor. Přenosové články lze realizovat přivedením budícího signálu u_i s vnitřním odporem R_i, viz obrázek (b) pro přenos H_{31}. Dalšími možnostmi jsou přenosy H_{21} a H_{12}. Jejich kmitočtové charakteristiky jsou na obrázku (c).



(a) (b)

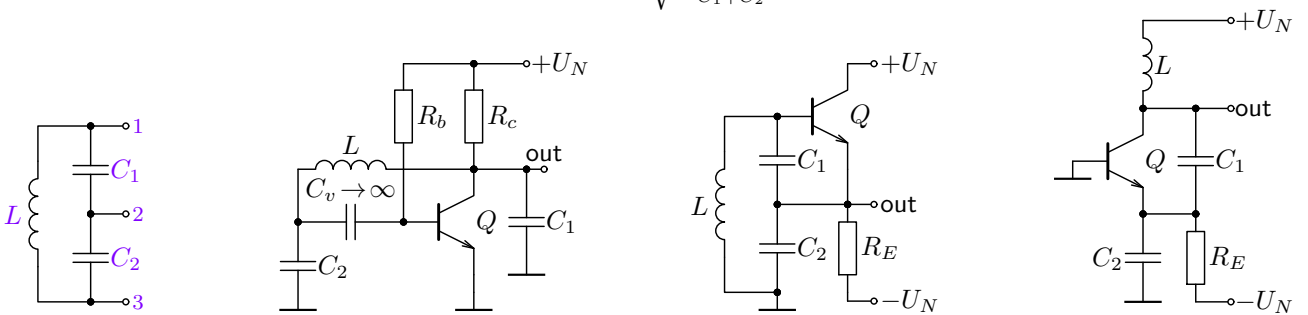


(c)

Obrázek 18.11: Rezonanční obvod s děleným kapacitorem pro Colpittsův oscilátor (a), zapojení pro definici přenosu H_{31} (b) a kmitočtové charakteristiky pro jednotlivé přenosy (c).

Jedná se o přenosové ZV články, které jsou zařazovány do kladné nebo záporné vazby většinou jednostupňového tranzistorového zesilovače, který funguje i pro vysoké kmitočty – obrázek 18.12. Odvození kmitočtu oscilací vychází z podmínky $\Im\{H(j\omega)\} = 0$. Vzhledem k tomu, že čitatel přenosů je $C_1C_2LR_is^3 + C_2Ls^2 + C_1R_is + C_2R_is + 1$ a jednotlivé přenosy se liší pouze mocnitelem operátoru s (0 pro H_{31}, 2 pro H_{21} a 1 pro H_{12}), lze odvodit (viz analýzu) pro úhlový kmitočet oscilací vztah (18.4) a pro přenos pro $\omega = \omega_0$ platí vztahy u popisu obrázku níže.

$$\Im\{H(j\omega)\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{L\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}}} \qquad \text{pro všechny typy přenosů.} \tag{18.4}$$



(a) (b): $H_{31}(j\omega_0) = -\frac{C_1}{C_2}$ (c) $H_{21}(j\omega_0) = \frac{C_1+C_2}{C_1}$ (d): $H_{12}(j\omega_0) = \frac{C_1}{C_1+C_2}$

Obrázek 18.12: Ideové zapojení Colpittsova oscilátoru s tranzistorem v zapojení SE (b), SC (c) a SB (d).

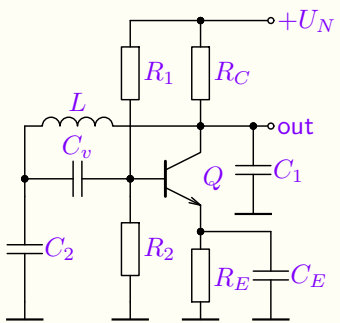
Z kmitočtových charakteristik a z uvedených vztahů je zřejmé, že zapojení článku s přenosem $H_{31}(j\omega_0) = -\frac{C_1}{C_2}$ obrací pro $\omega = \omega_0$ fázi, a proto je vhodné pro zapojení SE. Ostatní přenosy mají fázi pro $\omega = \omega_0$ nulovou, přičemž článek s přenosem $H_{21}(j\omega_0) = \frac{C_1+C_2}{C_1} > 1$ je vhodný pro zapojení SC (napěťový zisk zesilovače $A_{u\text{SC}} < 1$) a konečně článek s $H_{12}(j\omega_0) = \frac{C_1}{C_1+C_2}$ je vhodný pro zapojení SB[1]. Následuje konkrétní návrh LC oscilátoru.

Příklad 18.1 *Colpittsův oscilátor*

Zadání: Navrhněte konkrétní zapojení Colpittsova LC oscilátoru pro kmitočet oscilací $f_0 = 100\,\text{kHz}$. Vyjděte ze zapojení 18.12 (b).

Řešení: Zapojení 18.12 (b) pouze upravíme tak, aby byl stabilizován pracovní bod (klasické můstkové zapojení pro nastavení P_0), viz obrázek vpravo. Zesílení tohoto zapojení (SE se „střídavě“ uzemněným emitorem) je dle (15.23) $A_{u\text{SE}} \doteq -g_m R_C$ (zanedbáme zatížení), což vede na hodnoty $|A_{u\text{SE}}| \geq 100$ pro R_C v jednotkách kΩ a I_C v jednotkách mA. Volme:

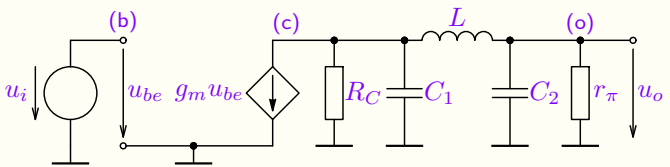
$$H_{31}(j\omega_0) = -\frac{C_1}{C_2} = -\frac{1}{100}, \quad \text{např.} \quad C_1 = 10\,\text{nF a } C_2 = 1\,\mu\text{F}.$$



[1] To se využívá nejméně, jelikož strmost fázové charakteristiky je v okolí ω_0 nejmenší.

Dále lze podle (18.4) určit velikost induktance: $L \doteq 256\,\mu\mathrm{H}$.

Z Nyquistova kritéria pak vyplývá, že zesílení otevřené ZV smyčky pro nulovou fázi ($f = f_0$) musí být $\beta A_{u_{\mathrm{SE}}} \geq 1$. Přesnější výpočet (vztahy $A_{u_{\mathrm{SE}}}$ i $\beta \equiv H_{31}(j\omega_0)$ byly uvedeny pro nezatížený případ) získáme z náhradního obvodu pro otevřenou ZV smyčku oscilátoru (uvažujme $r_\pi \ll R_1||R_2$) a určíme vztah jak pro úhlový oscilační kmitočet, tak vztah pro min. transkonduktanci tranzistoru $g_{m_{\mathrm{min}}}$:



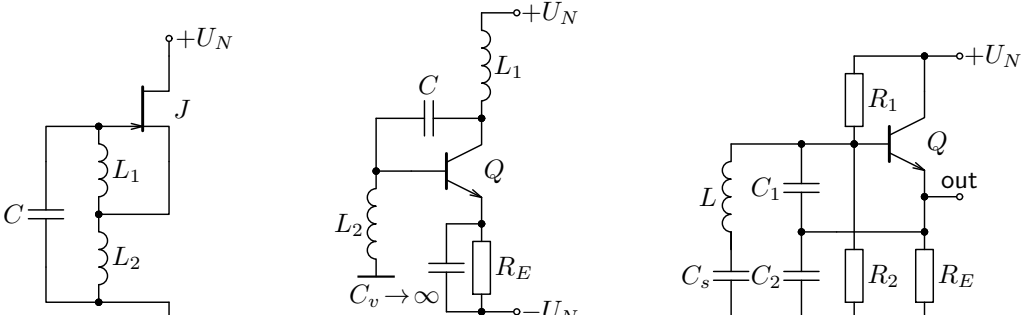
$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC_1} + \frac{1}{LC_2} + \frac{1}{C_1 C_2 R_C r_\pi} \doteq \frac{1}{L}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) \doteq \frac{1}{LC_1} \quad \text{pro} \quad C_1 \ll C_2$$

$$g_{m_{\mathrm{min}}} = \frac{C_2}{C_1 R_C} + \frac{C_1}{C_2 r_\pi} + \frac{L}{C_2 R_C r_\pi^2} + \frac{L}{C_1 R_C^2 r_\pi} \doteq \frac{C_2}{C_1 R_C} + \frac{C_1}{C_2 r_\pi} \doteq \frac{C_2}{C_1 R_C} \text{ pro } C_1 \ll C_2 \text{ a } r_\pi \approx R_C$$

Je zřejmé, že přibližné vztahy lze použít a výsledná transkonuktance tranzistoru např. pro volbu $R_C = 5\,\mathrm{k\Omega}$ vychází $g_{m_{\mathrm{min}}} \geq 20\,\mathrm{mS}$. To pak vede na proud kolektoru v pracovním bodě $I_C \geq g_{m_{\mathrm{min}}} U_T \doteq \frac{g_{m_{\mathrm{min}}}}{40}$. Volíme $I_C = 0{,}6\,\mathrm{mA}$, $U_N = 10\,\mathrm{V}$, $R_E = 1\,\mathrm{k\Omega} \Rightarrow R_1 = 600\,\mathrm{k\Omega}$ a $R_2 = 150\,\mathrm{k\Omega}$, viz analýzu.

Místo děleného kapacitoru lze ve ZV článku použít dělený induktor. Tento obvod je pak základem Hartleyova oscilátoru, viz. obrázek 18.13, kde příklady oscilátoru s tranzistorem v zapojení SD (a), resp. SE (b) analogické k zapojení (c) a (b) obrázku 18.12. Odvození je obdobné a ponecháme ho na uživateli.

Na obrázku (c) je zapojení Clapova oscilátoru, které vychází ze zapojení 18.12 (c), kde je indukčnost nahrazena sériovým rezonančním obvodem. To vede pro $C_s \ll C_1, C_2$ k minimalizaci vlivu parazitní kapacity $C_{BE} \ll C_1$. Existuje i řada dalších zapojení: Vackářův oscilátor, oscilátor s transformátorovou vazbou (Meissnetův), kvadraturní oscilátor. Další rozbor však překračuje rozsah tohoto materiálu.



(a) $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{(L_1+L_2)C}}$ (b) (c): $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_s}\right)}$

Obrázek 18.13: Zapojení Hartleyova oscilátoru (a), (b) a Clappova oscilátoru (c).

18.1.6. Krystalové oscilátory

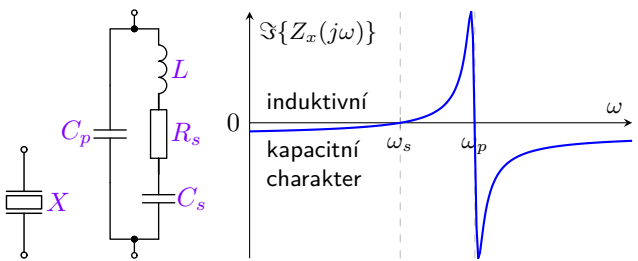
Zapojení Clappova oscilátoru je pak základem pro zapojení krystalového oscilátoru s tranzistorem, který je uveden na obrázku 18.15 (a). Krystal jako elektrotechnická součástka je vyroben výbrusem z krystalu křemene, který je poté opatřen vývody. Vlivem pizoelektrického jevu krystal vede střídavý elektrický proud, přičemž jeho náhradní zapojení lze vyjádřit serio-paralelním obvodem, viz obrázek 18.14 (b)[2]. Vykazuje tak sériovou a paralelní rezonanci.

Při zanedbání vlivu R_s platí pro rezonance: $Z_X(j\omega_s) \doteq 0$, resp. $Z_X(j\omega_p) \doteq \infty$. Rezonanční kmitočty jsou pak dány vztahy:

$$\omega_s = \frac{1}{\sqrt{LC_s}}, \quad \omega_p = \frac{1}{\sqrt{L\frac{C_sC_p}{C_s+C_p}}}. \qquad (18.5)$$

Sériový odpor udává činitel jakosti $Q = \frac{\omega L}{R_s}$, jehož číselná hodnota bývá značně velká (cca 10^3 až 10^4). Dále platí $C_p \ggg C_s$, tj. rezonanční kmitočty leží velmi blízko sebe a prakticky nejsou ovlivněny C_p.

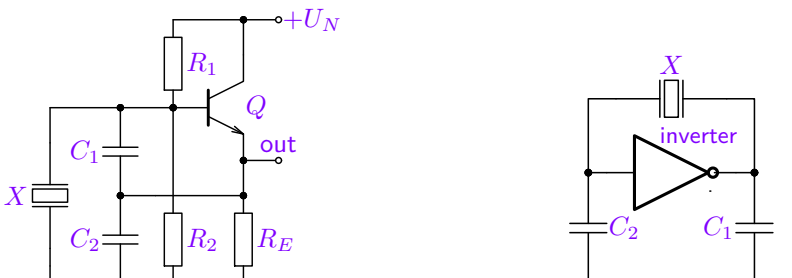
Obrovská výhoda krystalu oproti rezonančnímu obvodu je v jeho kmitočtové stabilitě, časové stálosti, vysokém činiteli jakosti i jednoduché výrobě.



Obrázek 18.14: Schématická značka krystalu (a), jeho zjednodušené náhradní zapojení (b) a kmitočtová závislost reaktance (c).

[2]Ve skutečnosti obsahuje náhradní schéma ještě další sériové rezonanční obvody řazené paralelně.

Výhody krystalu se dnes široce využívají v oscilátorech např. s výhodami Clappova oscilátoru – viz obrázek 18.15 (a) včetně ananlýzy, případně v Buttlerově oscilátoru. Velké využití v současné době však nachází v digitálních obvodech, kde lze jako zesilovač využít invertoru (základního logického hradla). Zapojení na obrázku (b) ukazuje základní, nejjednodušší uspořádání Pierce oscilátoru, který vychází z Colpittsova oscilátoru s tranzistorem v zapojení SE. Namísto tranzistorového zesilovače je zde CMOS hradlo (viz např. obrázek 14.27, tj. v lineárním režimu zapojení SS s řízenou dynamickou zátěží – kapitola 16.2) a místo induktoru je použit krystal (sériový rezonanční obvod jako v případě Clappova oscilátoru). Funkci obou zapojení ne možné ověřit analýzou (kliknutím na příslušný obrázek).



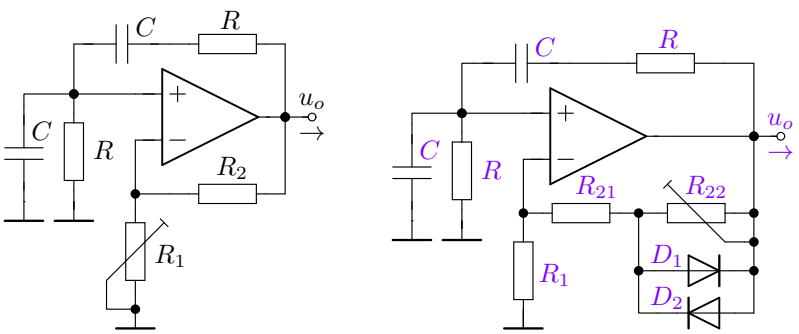
(a) (b)

Obrázek 18.15: Zapojení Clappova oscilátoru s krystalem (a) a Pierce krystalového oscilátoru (b).

18.1.7. Stabilizace amplitudy výstupního signálu oscilátorů

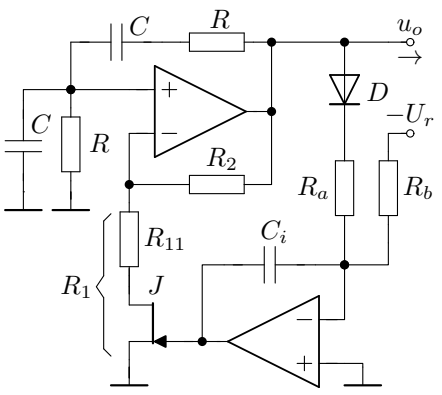
Ideální oscilátor generující harmonické kmity s konstantní amplitudou je lineární systém s komplexně sdruženými póly na imaginární ose, resp. $\beta A(j\omega_0) = 1$. V reálných systémech však nastavujeme $\beta A(j\omega_0) > 1$, tj. póly s malou kladnou reálnou částí, aby byl zaručen vznik oscilací. Pak ale amplituda kmitů narůstá a dojde k omezení výstupního signálu vlivem nelinearit a konečného napájecího napětí.

Amplitudu u_o lze měnit např. změnou zesílení zesilovače, tj. u oscilátoru s Wienovým článkem změnou poměru ZV rezistoru, jak je naznačeno na obrázku (a). Na obrázku (b) je implementace s řízenou velikostí R_{22}. Pokud na něm úbytek napětí přesáhne cca $0{,}5\,\mathrm{V}$, začínají se otevírat diody a při dalším zvyšování u_o se omezuje proud odporem R_{22} a tím i zesílení zesilovače (diody jsou paralelně k R_{22}). Jedná se samozřejmě o nelineární zapojení, které má vliv na zkreslení signálu. Pokud je však proud diodami malý, je malé i zkreslení.

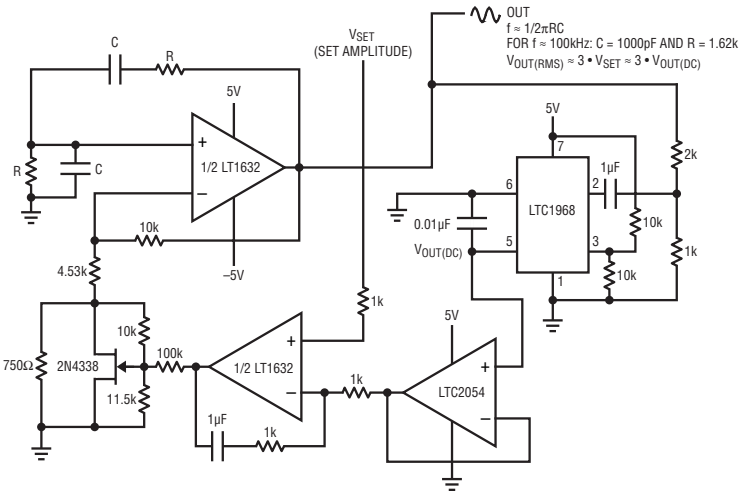


Obrázek 18.16: Ideové zapojení pro stabilizaci amplitudy signálu (a) a jeho implementace s využitím omezovacích diod, viz analýzu a komentář.

Další možností je využití odporového režimu unipolárního tranzistoru na místě rezistoru R_1, jak ukazuje následující obrázek (a). Velikost ekvivalentního odporu kanálu tranzistoru J je řízena dalším OZ na základě amplitudy u_o, více viz přednáška.



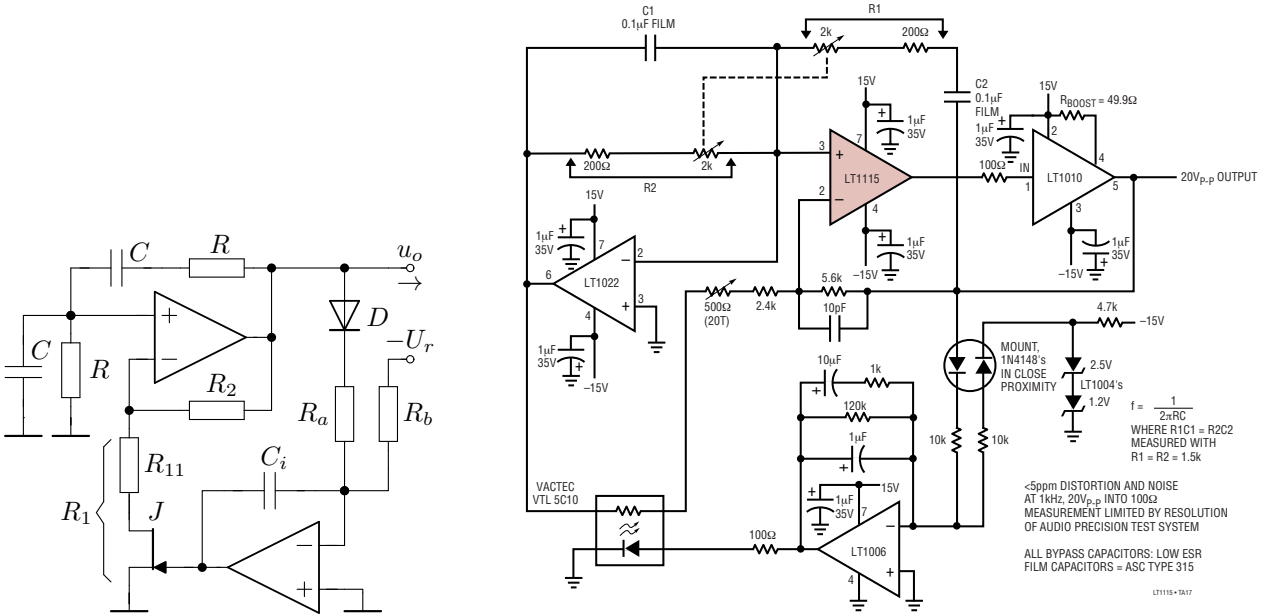
(b)



(b)

Obrázek 18.17: Implementace stabilizace amplitudy oscilátoru s využitím odporového režimu tranzistoru JFET řízeného pomocným OZ (a) a konkrétní zapojení oscilátoru s převodníkem RMS/DC (převzato z analog.com).

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL



Obrázek 18.18: Další varianta konkrétního zapojení oscilátoru s velmi nízkým zkreslením (převzato z analog.com).

18.2. Obvody generující neharmonické kmity

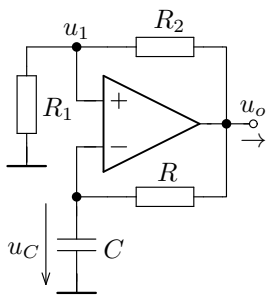
Regenerativní obvody generují obecně jednorázové nebo periodické změny obvodových veličin (napětí i proudu). Jejich podmnožinou jsou oscilátory, představené v kapitole 18.1. V této části se však budeme zabývat obvody, které generují jednorázové či periodické neharmonické kmity, např. trojúhelníkového nebo obdélníkového časového průběhu výstupní veličiny (napětí).

18.2.1. Astabilní klopný obvod (AKO)

Jedná se o obvod generující většinou signál obdélníkového časového průběhu. Tyto obvody jsou nestabilní (kmitají) prakticky z principu zapojení (mimo krajních hodnot prvků) a není třeba odvození podmínek oscilací, jako tomu bylo u oscilátorů.

Na obrázku 18.19 je základní zapojení astabilního klopného obvodu s komparátorem (operačním zesilovačem)[a]. Všimněte si, že je zavedena jak kladná, tak záporná zpětná vazba, nicméně princip činnosti se oproti můstkovým oscilátorům značně liší. Činnost je popsána na následujícím obrázku.

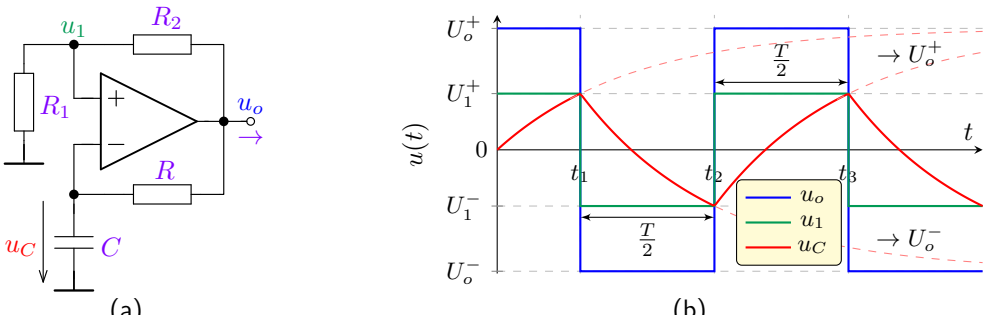
[a] Zesilovač pracuje jako komparátor a není třeba vnitřní kompenzace, která se u komparátorů na rozdíl od OZ neprovádí. Z tohoto důvodu jsou komparátory rychlejší, ale nemohou pracovat se ZZV, viz příklad 10.5.



Obrázek 18.19: Zapojení astabilního klopného obvodu s komparátorem (OZ).

Funkce zapojení vychází z činnosti invertujícího komparátoru 11.19.1, jehož vstupní napětí u_i (zde u_C) se mění v závislosti na napětí výstupním u_o. Činnost lze pak popsat na základě jednoduché úvahy, viz obrázek 18.20 níže:

- Nechť po zapnutí napájecího napětí je $u_C(0) = 0$ a výstupní napětí je rovno kladnému napájecímu napětí $u_o(0) = U_0^+ = +U_N$ (např. vlivem napěťové nesymetrie komparátoru). Tyto podmínky nemají vliv na obecnost.
- Kapacitor se začne nabíjet přes odpor R, ale k nabití na napětí U_0^+ nedojde, jelikož v čase t_1 dosáhne $u_C(t_1) = U_1^+ = U_0^+ \frac{R_1}{R_1+R_2}$ a dojde k překlopení komparátoru na $u_o(t_{1+}) = U_0^- = -U_N$.
- Kapacitor se bude vybíjet až do $t = t_2$, kdy $u_C(t_2) = U_1^- = U_0^- \frac{R_1}{R_1+R_2}$, čímž dojde opět k překlopení komparátoru na $u_o(t_{2+}) = U_0^+ = +U_N$ a celý děj se opakuje, viz také následující příklad a analýzu.



Obrázek 18.20: Zapojení astabilního klopného obvodu s OZ (a) a časové průběhy vyznačených napětí (b).

Příklad 18.2 *Astabilní klopný obvod s OZ*

Zadání: Určete hodnoty prvků astabilního klopného obvodu s OZ dle obrázku 18.19, jestliže je zadáno $U_N \equiv U_o^{\pm} = \pm 10\,\mathrm{V}$, $f_o = 1\,\mathrm{kHz}$ a $R_1 = R_2$.

Řešení: Vzhledem k tomu, že výstupní (napájecí) napětí je symetrické, je střída výstupního signálu 1:1, $U_1^{\pm} = \pm 5\,\mathrm{V}$ a je třeba provést řešení pouze v jedné půl-periodě signálu. Vyberme např. půlperiodu s nabíjením kapacitoru, tj. mezi časy t_2, t_3. Okamžik t_2 je tedy počátek řešeného přechodového děje – volme pro jednoduchost, ale bez omezení na obecnost $t_2 = 0$ a potom $t_3 = T/2$. Pak platí $u_C(0) = -5\,\mathrm{V}$ a $u_C(\infty) = +10\,\mathrm{V}$ – řešíme nabíjení kapacitoru lineárním obvodem, při kterém by nedošlo k přepnutí. Pak

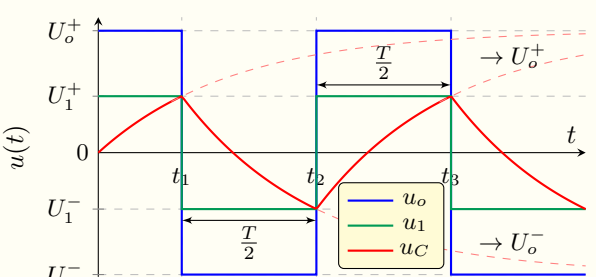
$$u_C = 10 - 15\mathrm{e}^{-t/\tau},\ \text{pro } t_2 = 0 \le t \le t_3 = \frac{T}{2},$$

kde $\tau = RC$ určíme ze známé hodnoty $u_C(t_3)$:

$$u_C(t_3) = 10 - 15\mathrm{e}^{-\frac{T}{2\tau}} = U_1^+ = 5\,\mathrm{V} \Rightarrow 15\mathrm{e}^{-\frac{T}{2\tau}} = 5$$

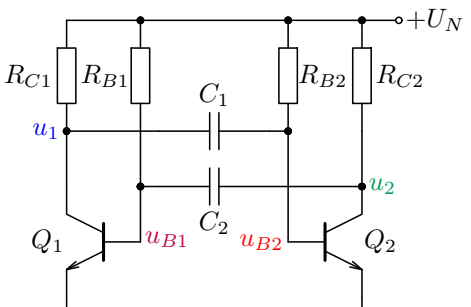
$$\Rightarrow \mathrm{e}^{-\frac{T}{2\tau}} = \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{T}{2\tau} = -\ln(3) \Rightarrow \tau = \frac{1}{2}\frac{T}{\ln(3)}.$$

Pro $T = 1/f_o = 1\,\mathrm{ms}$ je $\tau = 455\,\mu\mathrm{s}$. Volme např. $R_1 = R_2 = R = 10\,\mathrm{k\Omega}$, pak $C \doteq 45{,}5\,\mathrm{nF}$.

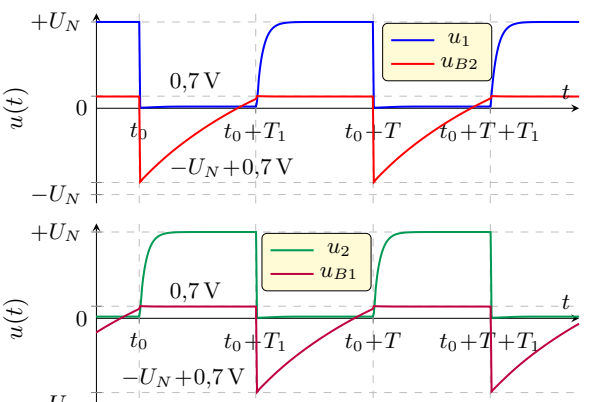


Tranzistorový multivibrátor

Multivibrátor v zapojení podle obrázku 18.21 lze popsat analogicky k předchozímu AKO s OZ. Vyjděme např. ze stavu v čase t_0, kdy dochází k překlápění: Q_1 právě spíná a Q_2 rozepíná. Pak $u_1(t_{0-}) = +U_N$, $u_1(t_{0+}) \doteq 0$, $u_{B2}(t_{0-}) \doteq 0{,}7\,\mathrm{V}$ a $u_{B2}(t_{0+})$ určíme z energetických podmínek na C_1: $u_{C1}(t_0) = u_1(t_{0-}) - u_{B2}(t_{0-}) = u_1(t_{0+}) - u_{B2}(t_{0+}) \Rightarrow u_{B2}(t_{0+}) \doteq -U_N + 0{,}7\,\mathrm{V}$ a kapacitor C_1 se nabíjí přes R_{B2} až do okamžiku $u_{B2} \approx 0{,}6\,\mathrm{V}$, kdy se otevírá Q_2, což vede k poklesu u_2, tj. i u_{B1} a tím se spustí proces překlápění, který povede na rychlé sepnutí Q_2 a rozepnutí Q_1. Celý děj se pak analogicky opakuje.



(a)



(b)

Obrázek 18.21: Zapojení astabilního klopného obvodu s tranzistory (a) a časové průběhy vyznačených napětí (b).

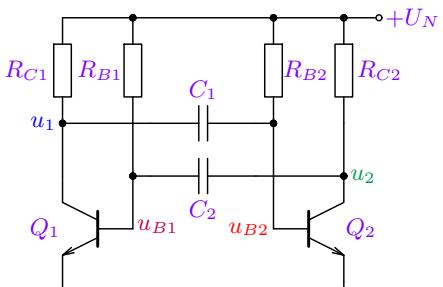
Odvození frekvence kmitů vyjdeme opět z nabíjení kapacitoru C_1 pro $t \in (t_0, t_0 + T_1)$, přičemž $u_{C1}(t_0) = u_1(t_{0+}) - u_{B2}(t_{0+}) \doteq -U_N + 0{,}7\,\mathrm{V}$ a pokud by nedošlo k překlopení, tak by se C_1 nabíjel přes R_{B2} až do $u_{C1}(\infty) \doteq +U_N$. Bez omezení obecnost uvažujme $t_0 = 0$ a pak platí:

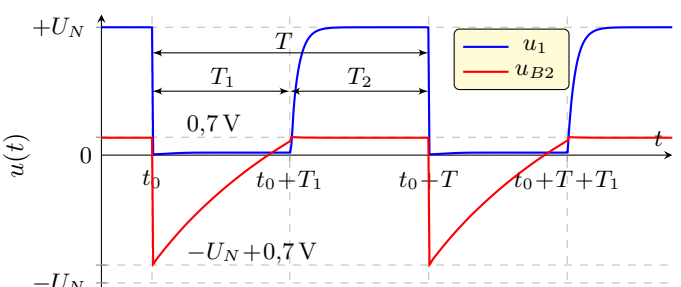
$$u_{C1} \doteq U_N - (2U_N + 0{,}7)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_1}}\,[\mathrm{V}] \quad \text{pro } t \in (0, T_1), \;\Rightarrow\; U_N - (2U_N + 0{,}7)\mathrm{e}^{-\frac{T_1}{\tau_1}} \doteq 0{,}6 \quad \text{pro } t = T_1 \tag{18.6}$$

$$\Rightarrow\; \mathrm{e}^{-\frac{T_1}{\tau_1}} \doteq \frac{U_N - 0{,}6}{2U_N + 0{,}7} \doteq \frac{1}{2} \quad \text{pro } U_N \gg 0{,}6\,\mathrm{V} \;\Rightarrow\; T_1 \doteq \ln(2)\tau_1 = \ln(2)R_{B2}C_1 \doteq 0{,}69R_{B2}C_1 \tag{18.7}$$

Analogicky pak $T_2 \doteq \ln(2)\tau_2 = \ln(2)R_{B1}C_2$ a pro kmitočet oscilací platí (viz také ověření analýzou):

$$f = \frac{1}{T_1 + T_2} \doteq \frac{1}{1{,}38R_BC} \quad \text{pro } R_{B1} = R_{B2} = R_B,\; R_{C1} = R_{C2} = R_C,\; C_1 = C_2 = C. \tag{18.8}$$

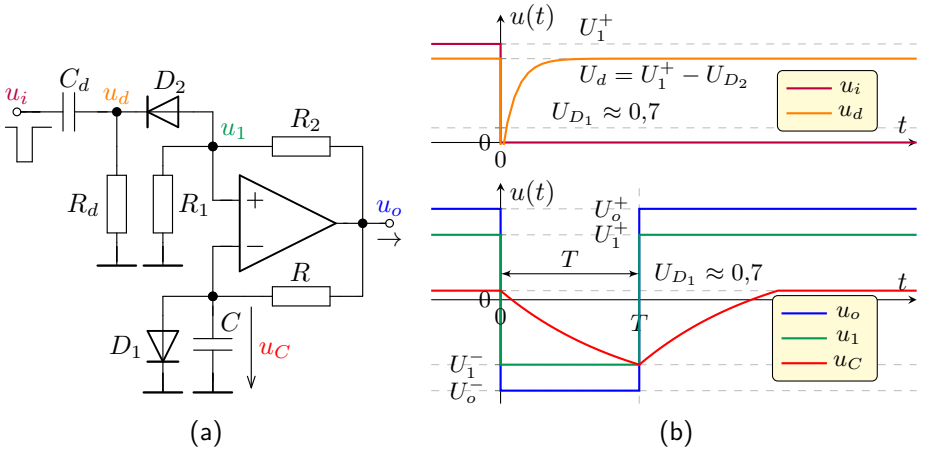




18.2.2. Monostabilní klopný obvod (MKO) s OZ

Podobně jako AKO s OZ (obr. 18.20) pracuje i níže uvedené zapojení MKO. Na rozdíl od uvedeného zapojení, však vlivem diody D_1 nedosáhne napětí u_C překlápěcí úrovně U_1^+ (nedojde k překlopení) a obvod čeká na sestupnou hranu spouštěcího pulzu u_i. Ta komparátor překlopí do U_o^-. Kapacitor se bude poté vybíjet až do překlápěcí úrovně U_1^-. To povede k překlopení komparátoru do kladné saturace U_o^+ a po nabití kapacitoru na U_{D1} se děj zastaví, viz časové průběhy na obrázku (b).

Komparační úrovně výše uvedených zapojení nejsou přesně definovány (saturační napětí OZ, úbytky na PN přechodu, . . .). Tím jsou nepřesně definovány i časové odezvy, tj. kmitočet. Tyto nevýhody řeší např. časovací obvod 555 uvedený dále.



Obrázek 18.22: Zapojení monostabilního klopného obvodu s OZ (a) a časové průběhy vyznačených napětí (b).

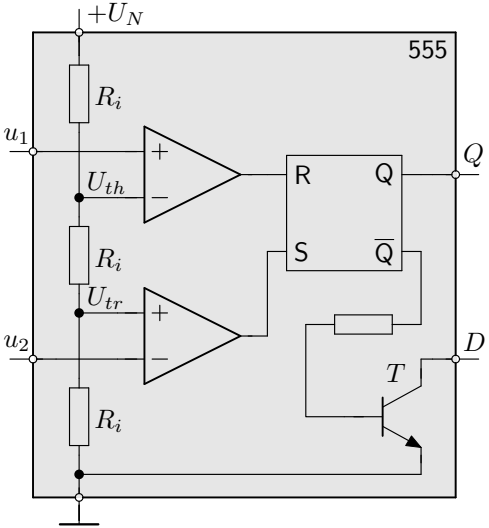
18.2.3. Časovací obvod 555

Časovací obvod 555 je integrovaný obvod složený ze dvou komparátorů s nastavenými referencemi $U_{th} = \frac{2}{3}U_N$ a $U_{tr} = \frac{1}{3}U_N$ a sekvenční RS klopný obvod, viz blokové uspořádání na obrázku 18.23. Popis chování v závislosti na vstupních napětí u_1 a u_2 lze vyjádřit následovně:

$$u_1 > \frac{2}{3}U_N \Rightarrow Q \equiv \log 0, \quad D\colon T \text{ rozepnut},$$
$$u_2 < \frac{1}{3}U_N \Rightarrow Q \equiv \log 1, \quad D\colon T \text{ sepnut}.$$

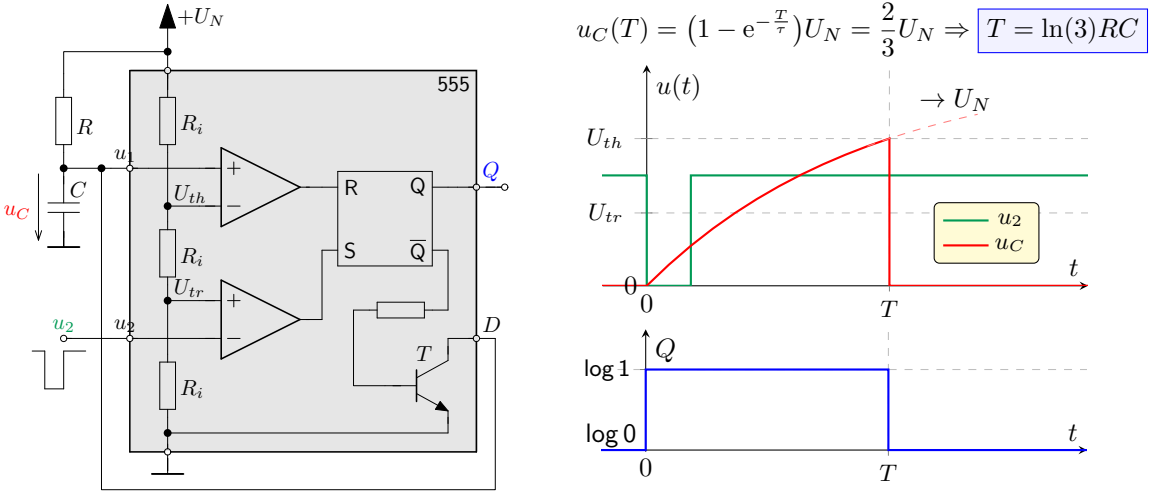
Pro překlopení výstupu Q do log. 0 je třeba aby $u_1 > \frac{2}{3}U_N$ a $u_2 > \frac{1}{3}U_N$. Naopak pro překlopení výstupu Q do log. 1 je třeba aby $u_2 < \frac{1}{3}U_N$ a $u_1 < \frac{2}{3}U_N$. Pro Q v log. 0 je zároveň sepnut tranzistor T, který se využívá k vybíjení časovací kapacitu.

Obvod má mnoho využití v různých zapojeních, viz např. www.electronics-tutorials.ws, wikipedia.org, a mnoho dalších. Zde se omezíme pouze na zapojení elementárního MKO a AKO. Odvození je podobné jako v předchozích případech.



Obrázek 18.23: Vnitřní blokové uspořádání časovacího obvodu 555.

Časovač 555 jako monostabilní klopný obvod využívá nabíjení kapacitoru C z U_N přes odpor R. Děj startuje pulzem $u_2 < U_{tr}$, což vede na uzavření T a nabíjení C. Děj končí při $u_C = U_{th}$ a čeká se na další spouštěcí pulz.



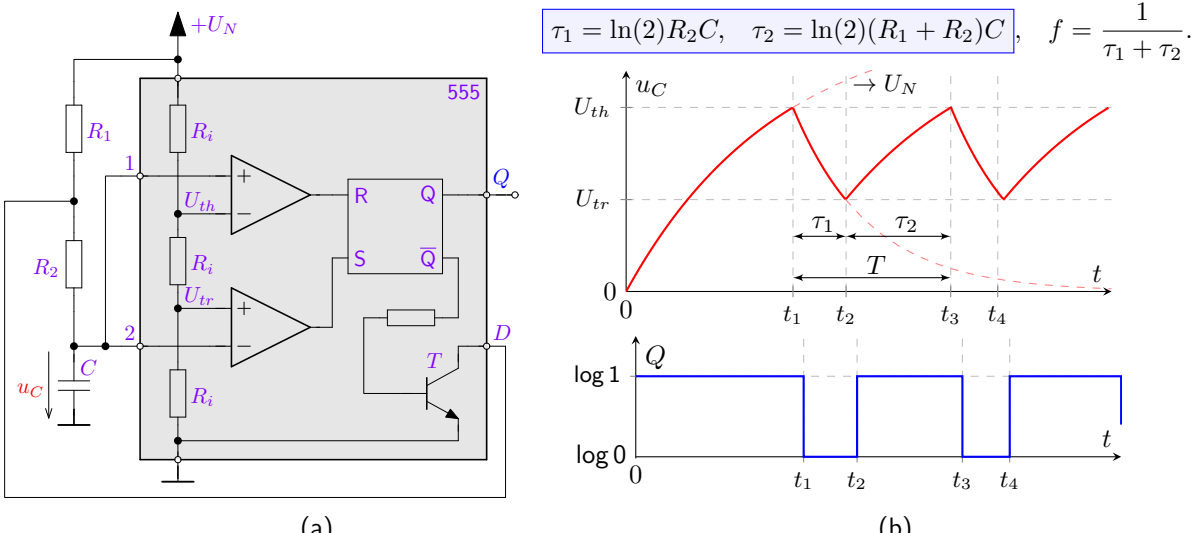
$$u_C(T) = \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{T}{\tau}}\right)U_N = \frac{2}{3}U_N \Rightarrow \boxed{T = \ln(3)RC}$$

(a) (b)

Obrázek 18.24: Realizace MKO s obvodem 555 (a) a časové průběhy vyznačených napětí (b).

Časovač 555 jako astabilní klopný obvod využívá periodické nabíjení kapacitoru C z U_N přes odpor $R_1 + R_2$, a vybíjení přes R_2 tranzistorem T, viz časové průběhy níže a analýzu. Odvození je analogické předchozímu případu:

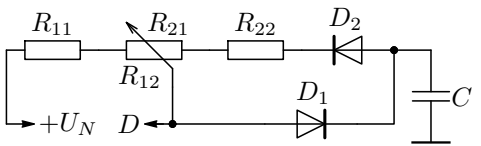
$$\tau_1 = \ln(2) R_2 C, \quad \tau_2 = \ln(2)(R_1 + R_2) C, \quad f = \frac{1}{\tau_1 + \tau_2}.$$

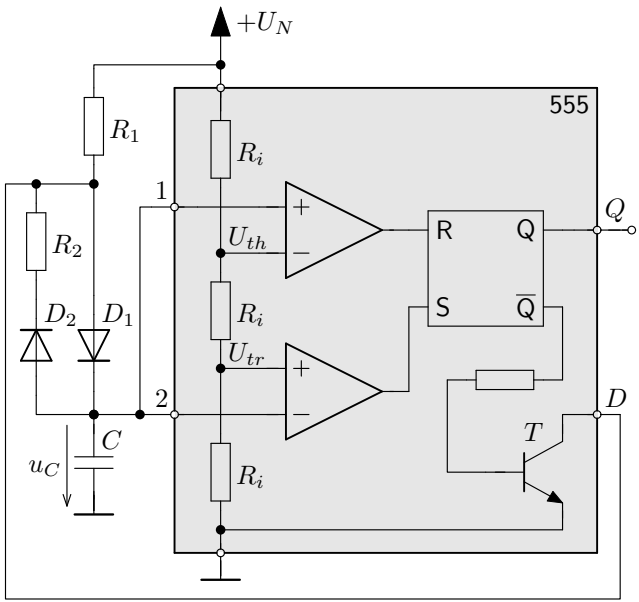


Obrázek 18.25: Realizace AKO s obvodem 555 (a) a časové průběhy vyznačených napětí (b).

Předchozí zapojení má zřejmou nevýhodu v nemožnosti nastavení libovolného poměru nabíjecího a vybíjecího času. Je to dáno zmíněným nabíjením kapacitoru pro $t \in \langle t_2, t_3 \rangle \rightarrow \tau_2$ přes odpor $R_1 + R_2$ a jeho vybíjením pouze přes odpor R_2 v $t \in \langle t_1, t_2 \rangle \rightarrow \tau_1 < \tau_2$. Střída výstupního signálu je pak $\frac{\tau_2}{T} > \frac{1}{2}$.

Jednoduchým řešením – rozdělením nabíjecího a vybíjecího proudu (pouze přes R_1, resp. R_2) pak lze měnit střídu v širokém rozsahu, viz. obrázek vpravo a použití potenciometru pro změnu střídy při konstantním kmitočtu níže. Více viz přednáška.

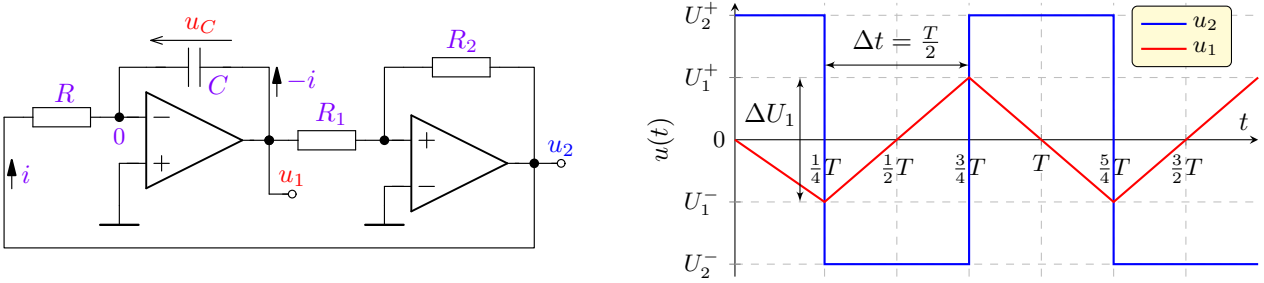




Obrázek 18.26: AKO s obvodem 555 s nezávislým nastavením nabíjecího a vybíjecího času.

18.2.4. Generátor funkcí

Typické zapojení tzv. generátoru funkcí se skládá z neinvertujícího komparátoru a invertujícího integrátoru zapojeného v jeho ZV, viz obrázek (a). Z toho vyplývá i funkce: např. pro $u_2 = U_2^+$ bude lineárně klesat u_1 (viz 11.10) až do dosažení komparační úrovně $u_1 = U_1^-$. Poté komparátor překlopí, čímž bude u_1 naopak růst až do $u_1 = U_1^+$. Poté komparátor opět překlopí a celý děj se periodicky opakuje, viz časové průběhy na obrázku (b). Je zřejmé, že je generován signál trojúhelníkového časového průběhu na výstupu u_1 a zároveň signál obdélníkového časového průběhu na výstupu u_2. Ukázkový výpočet je uveden v následujícím příkladu 18.3.



(a) (b)

Obrázek 18.27: Zapojení generátoru funkcí s OZ (a) a časové průběhy vyznačených napětí (b).

Příklad 18.3 Generátor funkcí s OZ

Zadání: Určete hodnoty prvků generátoru funkcí s OZ dle obrázku 18.27 (a), jestliže je zadáno $\pm U_N \equiv U_o^{\pm} = \pm 10\,\mathrm{V}$, $U_1^{\pm} = \pm 5\,\mathrm{V}$ a $f_o = 5\,\mathrm{kHz}$.

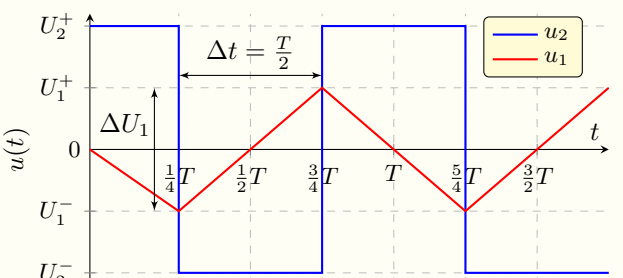
Řešení: Podmínka $U_1^{\pm} = \pm 5\,\mathrm{V}$ vede na $R_1 = R_2/2$. Obě půlperiody jsou stejné a řešení provedeme např. pro $t \in \langle t_1,\, t_2\rangle$. Kapacitor C se v tomto čase nabíjí konstantním proudem $I = -i = -\frac{U_o^-}{R}$ a napětí $u_C = u_1$ roste lineárně s časem. Pro obvodové veličiny na kapacitoru platí:

$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(\tau)\,d\tau \Rightarrow$$

$$\text{pro}\quad i_C(t) = I \;\Rightarrow\; \Delta Q = I\Delta t = C\Delta u_C \tag{18.9}$$

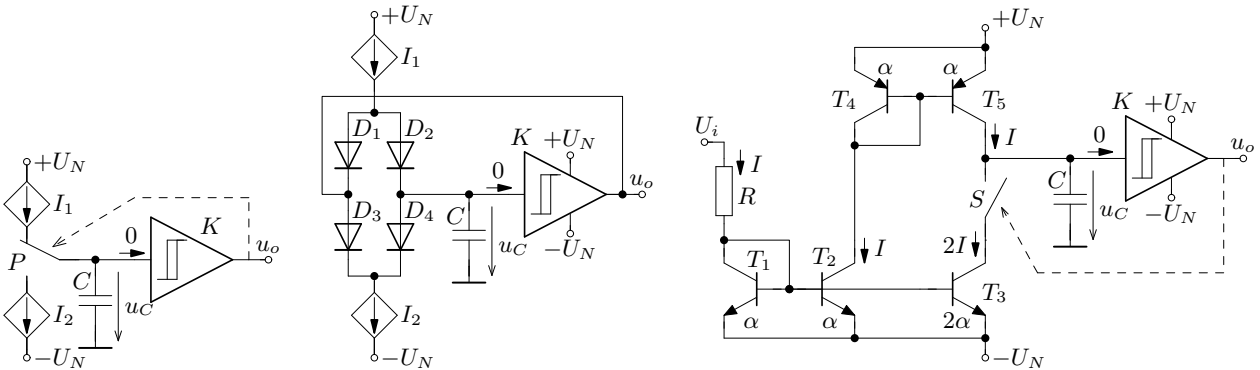
Pro $t \in \langle t_1,\, t_2\rangle$ je $\Delta u_C = \Delta U_1 = 10\,\mathrm{V}$ a $\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{1}{2f_o} = 0{,}1\,\mathrm{ms}$, $I = -\frac{U_o^-}{R} = \frac{10}{R}$.

Volme např. $C = 10\,\mathrm{nF} \Rightarrow R = 10\,\mathrm{k\Omega}$. Pro ověření viz analýzu.



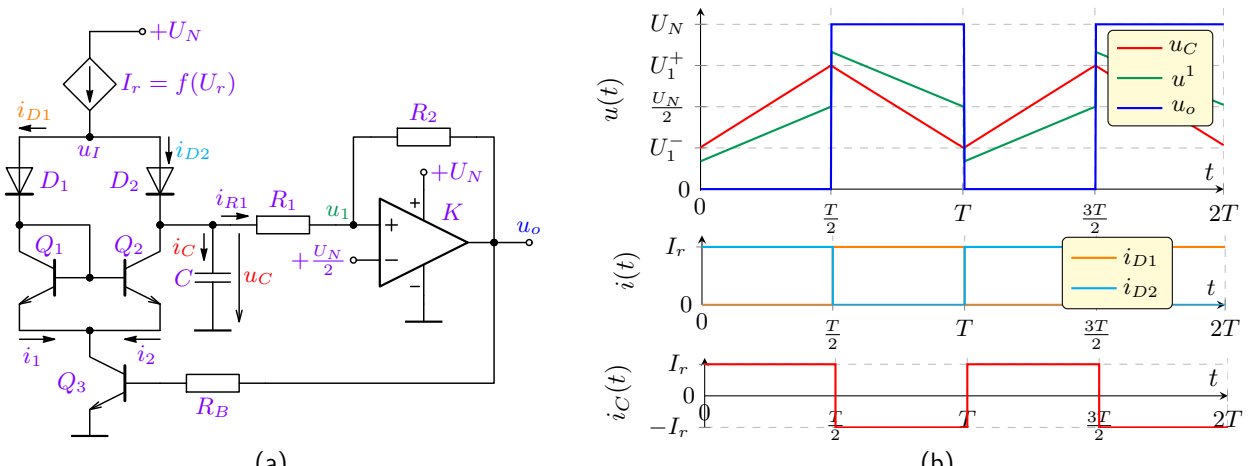
18.2.5. Napětím řízený oscilátor (VCO)

Oscilátor, jehož kmitočet lze měnit pomocí řídícího napětí lze získat např. úpravou zapojení generátoru funkcí. Integrátor představuje zdroj proudu nabíjející kapacitor – obr. (a). Pokud pokud budeme měnit tento proud pomocí napětí, budeme měnit rychlost nabíjení/vybíjení kapacitoru a tím kmitočet signálu – obr. (c). Více viz přednáška.



Obrázek 18.28: Obecné zapojení generátoru funkcí s komparátorem a přepínanými zdroji proudu (a), možná realizace přepínače pomocí diod (b) a realizace proudových proudů s možností řízení pomocí napětí U_i (c).

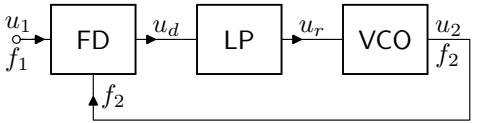
Další možnost implementace přepínače ukazuje následující obrázek. Funkce je patrná z časových průběhů vybraných obvodových veličin a analýzy – kapacitor se nabíjí proudem $i_{D2} = I_r$ při $u_o = 0$ (Q_3 uzavřen, $i_{D1} = i_1 = i_2 = 0$) a vybíjí proudem $i_2 = I_r$ při $u_o = U_N$ (Q_3 sepnut, $i_{D1} \doteq i_1 \doteq i_{D1} \doteq i_2 \doteq I_r$), přičemž $U_1^+ = \frac{U_N}{2}\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)$ a $U_1^- = \frac{U_N}{2}\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right)$ jsou překlápěcí úrovně komparátoru (předpokládáme $U_o^+ = U_N$ a $U_o^- = 0$).



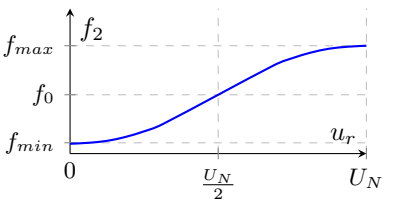
Obrázek 18.29: Implementace napětím řízeného oscilátoru (a) a časové průběhy vyznačených napětí (b).

18.3. Fázový závěs

Fázový závěs využívá VCO, který řídí tak, aby kmitočet jeho signálu byl stejný (nebo ve zvoleném násobku) kmitočtu vstupního signálu. Jeho základní blokové uspořádání je na obrázku 18.30.



(a)



(b)

Obrázek 18.30: Blokové schéma fázového závěsu (a), typická závislost kmitočtu VCO na řídícím napětí (b).

Fázový závěs je v podstatě ZV strukturou, kde vystupují bloky jak s bezrozměrnými přenosy, tak bloky, které mají přenos s fyzikálním rozměrem. Jedná se o:

FD fázový detektor, který porovnává fázi vstupního u_1 a výstupního u_2 signálu s převodní konstantou $k_D = \frac{\Delta u_d}{\Delta \varphi}$ [V/rad] (citlivostí, tj. změnou u_d na změnu rozdílů fází),

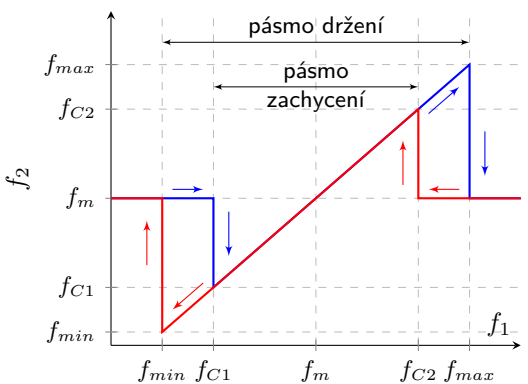
DP filtr typu dolní propust, charakterizovaný impulzní odezvou $h(t)$ nebo přenosem $F(s)$ a

VCO napětím řízený oscilátor generující periodický signál u_2 o kmitočtu f_2, který je řízen velikostí napětí u_r s převodní konstantou $k_o = \frac{\Delta f_2}{\Delta u_r}$ [rad/(sV)] (citlivostí, tj. změnou f_2 na změnu u_r).

Kmitočet výstupního signálu VCO lze měnit pomocí $u_r \in \langle 0, U_N \rangle$ v mezích $f_2 \in \langle f_{min}, f_{max} \rangle$. Vzhledem k tomu, že rozdílu fází $\Delta\varphi$ vstupních signálů u_1, u_2 fázového detektoru odpovídá střední hodnota jeho výstupního signálu u_d, je zařazen do cesty filtr dolní propust (LP). Činnost fázového závěsu lze pak popsat následovně:

- Pokud je $f_1 < f_{min}$, fázový závěs se „nezachytí“, tj. $f_2 \neq f_1$, tím se $\Delta\varphi$ stále mění a $f_2 \approx f_m$. Tím je FZ nesynchronizovaný, což platí až do $f_1 < f_{C1}$.
- Zvyšujme postupně kmitočet f_1 vstupního signálu. Pokud je $f_{C1} \leq f_1 \leq f_{C2}$, tak se fázový závěs „zachytí“, tj. $f_2 = f_1$ a $\Delta\varphi =$ konst. Při dalším zvyšování f_1 se synchronně zvyšuje i $f_2 = f_1$, a tím i $\Delta\varphi$ (tj. i u_d a u_r), což platí až do $f_1 = f_{max}$, viz obrázek vpravo.
- Pokud $f_1 > f_{max}$, tak se fázový závěs rozsynchronizuje, tj. $f_2 \neq f_1$. Pro synchronizaci je třeba, aby $f_{C1} \leq f_1 \geq f_{C2}$ a pro udržení synchronizace $f_{min} \leq f_1 \leq f_{min}$.

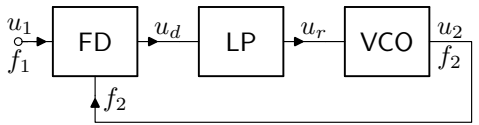
Definujeme: pásmo zachycení (capture range): $2f_C = f_{C2} - f_{C1}$, pro které je schopen FZ přejít z nesynchronizovaného stavu ($f_2 \neq f_1$) do synchronního ($f_2 = f_1$) a pásmo držení (lock range): $2f_L = f_{max} - f_{min}$, pro které je FZ schopen se v synchronním stavu udržet.



Obrázek 18.31: Závislost výstupního kmitočtu f_2 FZ na vstupním kmitočtu f_1 při přeladování f_1 zdola (od $f_1 < f_{min}$ k vyšším kmitočtům) a shora (od $f_1 > f_{max}$ k nižším kmitočtům).

18.3.1. Fázový detektor (FD)

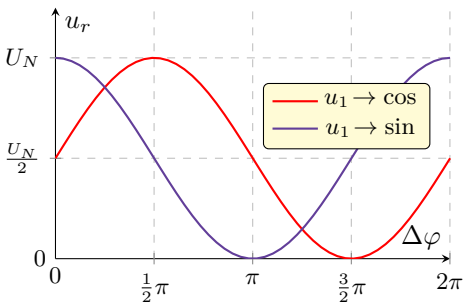
Jednoduchá možnost obvodové implementace VCO byla ukázána v kapitole 18.2.5. Zde ukážeme základní řešení fázového detektoru. Jednou z možností je použití analogové násobičky signálů, kterou ukážeme na případu harmonických signálů.



$$u_1(t) = U_{1m}\cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad u_2(t) = U_{2m}\sin(\omega_2 t + \varphi_2),$$

$$u_d(t) = k_D \frac{U_{1m}U_{2m}}{2}\Big(-\sin\big((\omega_1+\omega_2)t + (\varphi_1+\varphi_2)\big) + \\ + \sin\big((\omega_1-\omega_2)t + (\varphi_1-\varphi_2)\big)\Big) \qquad (18.10)$$

$$u_d(t) = k_D \frac{U_{1m}U_{2m}}{2}\sin\Delta\varphi, \quad \text{pro} \quad \omega_1 = \omega_2, \quad \text{filtr.} \qquad (18.11)$$



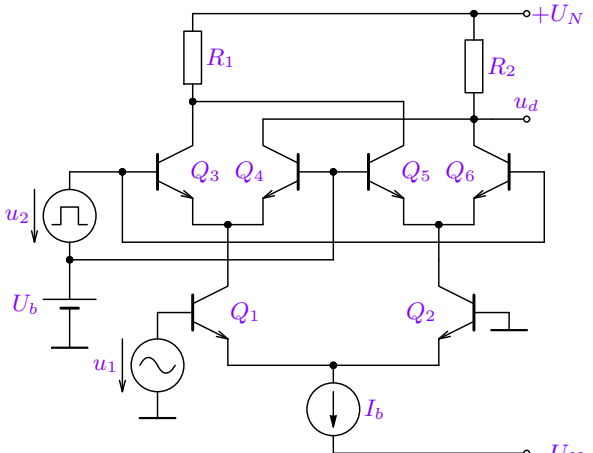
Při uvažování $u_1(t) = U_{1m}\sin(\omega_1 t + \varphi_1)$, je pak $u_d(t) = k_D \frac{U_{1m}U_{2m}}{2}\cos\Delta\varphi$.

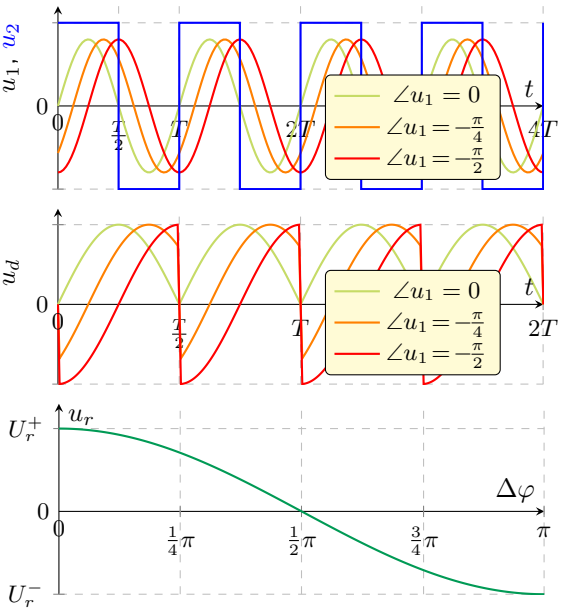
Obrázek 18.32: Závislost výstupního napětí fázového detektoru u_d na rozdílu fází vstupních signálů $\Delta\varphi$.

Je zřejmé, že pro $f_1 = f_2$ a aplikaci filtru typu LP ($f_p > f_1$, $f_s < 2f_1$) se součtová složka $(\omega_1 + \omega_2)$ signálu u_d odfiltruje. Řídící napětí u_r VCO bude pak závislé pouze na rozdílu fází vstupních signálů $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$.

Obvodová implementace analogové násobičky

Využívá se rozdílového stupně a lineární závislosti g_m BJT na I_C, viz (15.7) a (16.79). Průběhy vpravo demonstrují funkci násobičky při digitálním a harmonickém vstupním signálu. Více viz přednáška.

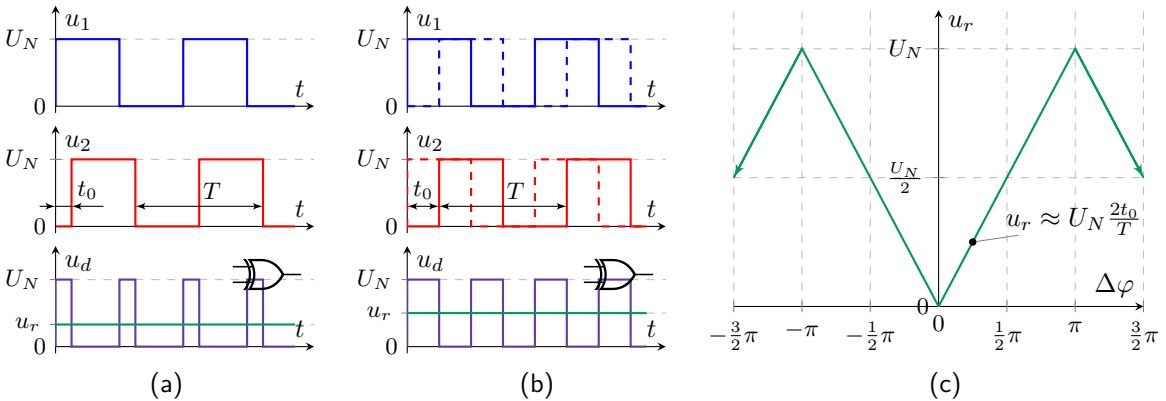




Obrázek 18.33: Implementace násobičky na tranzistorové úrovni a závislosti vybraných obvodových veličin.

Fázový detektor realizovaný obvodem XOR

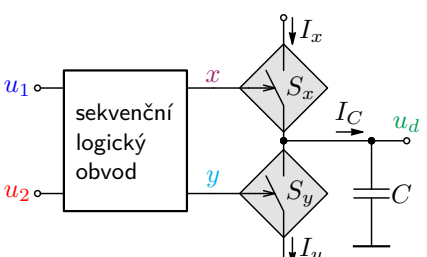
Pro digitální signály lze jako nejjednodušší fázový detektor použít klopný obvod XOR. Pokud jsou vstupní signály (u_1, u_2) fázově posunuty (jeden zpodžen o t_0), je průměrná hodnota výstupního signálu (po filtraci LP) úměrná tomuto posunu, viz obrázek níže. Nevýhodou tohoto jednoduchého řešení je závislost výstupu na střídě vstupních signálů a nemožnost rozlišit signály vyšších harmonických (fázový závěs se může zachytit na násobku f_1).

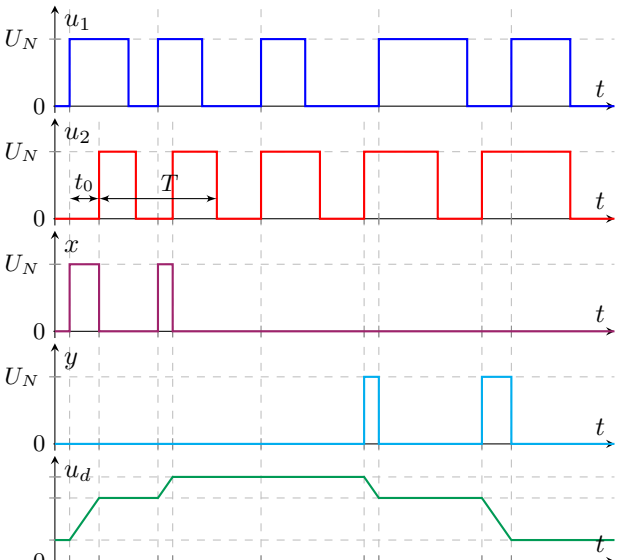


Obrázek 18.34: Vstupní a výstupní signály FD realizovaného obvodem XOR pro různé fázové posuny (a) a (b) a jeho odpovídající převodní charakteristika (c).

Hranově řízený fázový detektor

Nedostatky FZ založeného na kombinačním obvodu XOR řeší detektor řízený náběžnými hranami vstupních digitálních signálů u_1 a u_2. Z nich generované signály x a y sekvenčním logickým obvodem řídí spínače S_x a S_y, které spínají proudy I_x, resp. I_y pro nabíjení, resp. vybíjení kapacitoru C. Výstupní napětí tak závisí na fázovém zpoždění vstupních signálů: $\Delta u_d = \frac{I\Delta t}{C} = \frac{It_0}{C} = \frac{I}{C}\frac{T}{2\pi}\Delta\varphi = K_D\Delta\varphi$, viz ideové zapojení níže a časové průběhy vpravo.





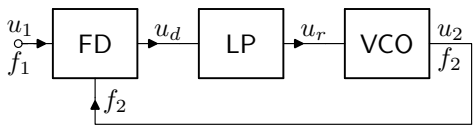
Obrázek 18.35: Ideové zapojení FD řízeného náběžnou hranou a časové průběhy obvodových veličin.

18.3.2. Dynamické vlastnosti FZ

Parametry FZ výrazně ovlivňují jeho dynamické vlastnosti, které lze popsat ZV strukturou s přenosovými vlastnostmi jednotlivých členů. Pokud uvažujeme $u_d(t)$ dle (18.11) a dynamické změny fáze $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, pak:

$$u_r(t) = h(t) * K_D \sin \Delta\varphi(t),$$

kde K_D je určeno (18.11) a $h(t)$ je impulzní charakteristika filtru LP.



ω_2 lze vyjádřit časovou změnou fáze φ_2, tj. nelineární **differenciální rovnici FZ**, kde K_O je převodní konstanta VCO:

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_2(t)}{\mathrm{d}t} = K_O K_D h(t) * \sin \Delta\varphi(t) \qquad \left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right] = \left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}\cdot\mathrm{V}}\right] \cdot \left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{rad}}\right] \cdot [-] \cdot [\text{"rad"}] \tag{18.12}$$

Dále uvažujme $|\varphi_2(t)| < \pi/2$ a vyjádřeme $\varphi_1(t) = \Delta\omega_1 t + \varphi_1'(t)$ a $\varphi_2(t) = \Delta\omega_1 t + \varphi_2'(t) + \varphi_0$, $(\omega_1 = \omega_2)$, přičemž $\varphi_1'(t) - \varphi_2'(t) = \Delta\varphi'$ odpovídá dynamické změně fázové odchylky a φ_0 statickému rozdílu fází $\Delta\varphi$, tj.

$$\Delta\omega_1 + \frac{\mathrm{d}\varphi_2'(t)}{\mathrm{d}t} = K_O K_D h(t) * \sin\big(\Delta\varphi'(t) - \varphi_0\big) \tag{18.13}$$

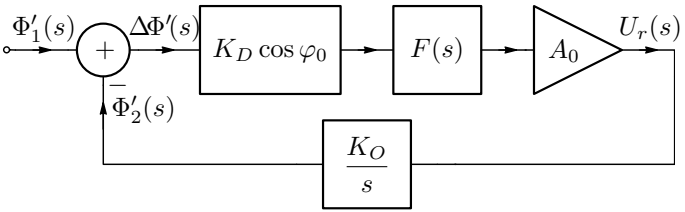
vzhledem k $\sin\big(\Delta\varphi'(t) - \varphi_0\big) = \sin\Delta\varphi'(t)\cos\varphi_0 - \cos\Delta\varphi'(t)\sin\varphi_0 = \Delta\varphi'(t)\cos\varphi_0 - \sin\varphi_0$ a při uvažování malé odchylky $\Delta\varphi'(t) \to 0$, lze pak rovnici (18.13) rozdělit na statickou a dynamickou složku:

$$\Delta\omega_1 = -K_O K_D h(t) * \sin\varphi_0, \qquad \frac{\mathrm{d}\varphi_2'(t)}{\mathrm{d}t} = K_O K_D h(t) * \Delta\varphi'(t)\cos\varphi_0$$

Tím pro $\varphi_0 = \text{konst.}$ již dostaneme lineární diferenciální rovnici, na níž aplikujeme LT:

$$\Delta\omega_1 = -K_O K_D h(t) * \sin\varphi_0 \Rightarrow \Delta\omega_1 = -K_O K_D F(0)\sin\varphi_0, \quad \text{kde } F(0) = \mathcal{L}\{h(t)\}|_{s=0} = w(\infty)$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_2'(t)}{\mathrm{d}t} = K_O K_D h(t) * \Delta\varphi'(t)\cos\varphi_0 \Rightarrow s\Phi_2'(s) = K_O K_D F(s)\cos\varphi_0\big(\Phi_1'(s) - \Phi_2'(s)\big)$$



Obrázek 18.36: Linearizovaný dynamický model fázového závěsu pro malé změny fáze s přídavným zesílením A_0.

Pro otevřenou ZV smyčku tedy platí $\beta A = \frac{\Phi_2'(s)}{\Delta\Phi'(s)} = \frac{1}{s}K_O K_D\cos\varphi_0 A_0 F(s)$. Přenos uzavřené smyčky pak dle (10.2) popisuje následující vztah:

$$H(s) = \frac{\Phi_2'(s)}{\Phi_1'(s)} = \frac{\beta A}{1+\beta A} = \frac{K_O K_D\cos\varphi_0 A_0 F(s)}{s + K_O K_D\cos\varphi_0 A_0 F(s)} = \frac{A_v\cos\varphi_0 F(s)}{s + A_v\cos\varphi_0 F(s)} \tag{18.14}$$

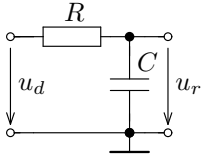
Přenos $H(s)$ určuje dynamické chování FZ, na který má dominantní vliv přenosová funkce $F(s)$ filtru. Vzhledem k „integračnímu“ charakteru VCO se zvyšuje řád $H(s)$. Z důvodu stability FZ se pak používají pouze filtry 1. řádu:

1. Prostý vodič Přenos fázového závěsu $H(s)$ je typu dolní propust 1. řádu s poměrně vysokým zlomovým kmitočtem a sklonem modulové charakteristiky pouze $-20\,\mathrm{dB/dek}$. Zde platí $\omega_C \doteq \omega_L$, viz dále.



$$F(s) = 1 \quad \Rightarrow \quad H(s) = \frac{A_v \cos\varphi_0}{s + A_v \cos\varphi_0} = \frac{A_\varphi}{s + A_\varphi} = \frac{1}{1 + \dfrac{s}{A_\varphi}} \tag{18.15}$$

2. Integrační článek $H(s)$ vyjadřuje přenos dolní propusti 2. řádu, tj. se sklonem modulové charakteristiky $-40\,\mathrm{dB/dek.}$, se zlomem na ω_x a převýšením Q na $\omega = \omega_x$. Zde platí $\omega_C \approx \omega_x$.

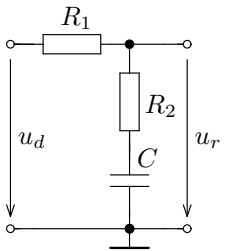


$$F(s) = \frac{1}{1 + s\tau} = \frac{\omega_0}{s + \omega_0}, \text{ kde } \tau = CR \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad H(s) = \frac{\omega_0 A_\varphi}{s^2 + s\omega_0 + A_\varphi\omega_0} = \frac{\omega_x^2}{s^2 + s\frac{\omega_x}{Q} + \omega_x^2}, \tag{18.16}$$

$$\text{kde } \omega_x = \sqrt{A_\varphi\omega_0} = \sqrt{\frac{A_\varphi}{\tau}}, \quad Q = \sqrt{\frac{A_\varphi}{\omega_0}} = \sqrt{A_\varphi\tau}.$$

3. Dolní propust s nulou přenosu $H(s)$ opět vyjadřuje přenos dolní propusti 2. řádu, zde i s nulou přenosu na ω_n.



$$F(s) = \frac{1 + s\tau_2}{1 + s(\tau_1 + \tau_2)} = K\frac{s + \omega_n}{s + \omega_0}, \quad \text{kde} \quad \tau_1 = CR_1, \quad \tau_2 = CR_2,$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\tau_1 + \tau_2}, \quad \omega_n = \frac{1}{\tau_2} \quad \text{a} \quad K = \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

$$H(s) = \frac{A_\varphi \frac{1+s\tau_2}{\tau_1+\tau_2}}{s^2 + s\frac{1+A_\varphi\tau_2}{\tau_1+\tau_2} + \frac{A_\varphi}{\tau_1+\tau_2}} = \frac{A_\varphi \frac{\omega_0}{\omega_n}(s + \omega_n)}{s^2 + s\frac{\omega_0}{\omega_n}(A_\varphi + \omega_n) + A_\varphi\omega_0}, \tag{18.17}$$

$$\text{kde} \quad \omega_x = \sqrt{A_\varphi\omega_0} = \sqrt{\frac{A_\varphi}{\tau_1 + \tau_2}}, \quad Q = \frac{\omega_n}{\omega_0}\frac{\omega_x}{A_\varphi + \omega_n} = \frac{1}{\omega_x\left(\tau_2 + \frac{1}{A_\varphi}\right)}.$$

Výhoda použití tohoto článku (filtru) je ve větší variabilitě nastavení parametrů ω_x a Q výsledné přenosové funkce $H(s)$ fázového závěsu. Pro $\omega_0 \ll \omega_n$ pak $\omega_C \doteq \omega_x$ při menších hodnotách Q, než v předchozím případě.

Rozsah zachycení je určen dynamickými vlastnostmi FZ, zejména se zlomovým kmitočtem ω_x:

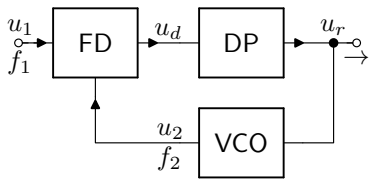
$$2\omega_C = \omega_{C2} - \omega_{C1} \doteq 2\omega_x \tag{18.18}$$

Vychází to z činnosti závěsu při synchronizaci. V případě nesynchronního stavu je $\omega_1 \neq \omega_2$. VCO je dle (18.10) řízen rozdílovou složkou $\omega_1 - \omega_2$, která je v případě $|\omega_1 - \omega_2| > \omega_0$ filtrem utlumena a neprojde k VCO. To se mění až v případě $|\omega_1 - \omega_2| \approx \omega_0$, kdy začíná přechodový děj vedoucí k synchronnímu stavu. Více viz např. [22].

18.3.3. Aplikace fázového závěsu

Demodulátor FM signálu

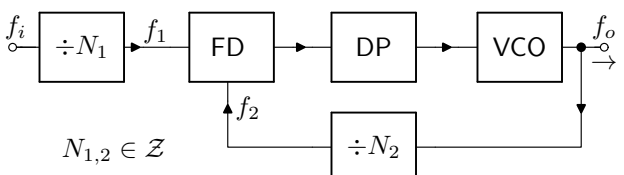
Fázový závěs má mnohostranné využití. Jednou z mnoha aplikací je i demodulátor kmitočtově modulovaného signálu, jehož blokové schéma je na obrázku 18.37. Pokud je systém v synchronním stavu, tj. platí $f_1 = f_2$, pak je VCO řízen právě stejným signálem jako je signál modulační. Na výstup se obvykle přidává další dolní propust, vzhledem k „integračnímu charakteru“ VCO.



Obrázek 18.37: Demodulátor FM signálu.

Kmitočtová syntéza

V mnoha případech je třeba generovat signál daného kmitočtu a to z referenčního/přesného oscilátoru. Pomocí digitální děličky kmitočtu (čítače) lze získat pouze celočíselný zlomek f_i. Pomocí fázového závěsu, kde je ve ZV za VCO zařazena delička kmitočtu $\div N_2$ je možné naopak získat celočíselný násobek kmitočtu $f_o = f_1 N_2$, viz obrázek 18.38. Zařazením děličky $\div N_1$ lze pak získat výsledný kmitočet f_o jako násobek referenčního kmitočtu racionálním číslem, jak udává vztah (18.19).



$$f_1 = f_2 = \frac{f_i}{N_1}, \quad f_2 = \frac{f_o}{N_2} \Rightarrow f_o = N_2 \frac{f_i}{N_1} \qquad (18.19)$$

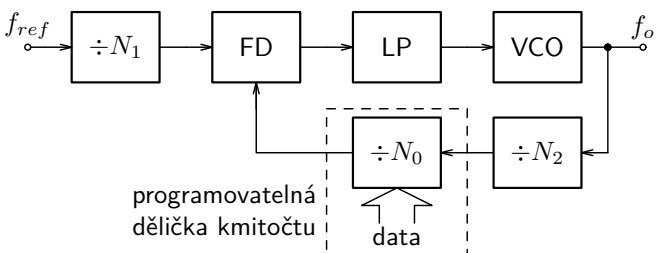
Obrázek 18.38: „Násobička kmitočtu“, resp. kmitočtová syntéza s použitím fázového závěsu.

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

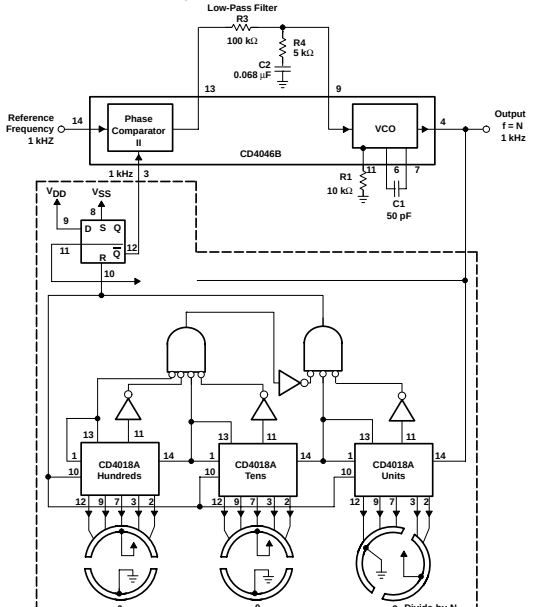
Základní schéma kmitočtového syntetizéru lze modifikovat přidáním dalších děliček. Pro níže uvedené schéma kmitočtového syntetizéru platí v zasynchronizovaném stavu:

$$\frac{f_{ref}}{N_1} = \frac{f_o}{N_0 N_2} \quad \Rightarrow \quad f_o = f_{ref}\frac{N_0 N_2}{N_1} \tag{18.20}$$

s ladícím krokem $f_n = f_{ref}\dfrac{N_2}{N_1}$



Na výstup VCO lze přidat další děličku kmitočtu $\div N_3$, čímž se zároveň sníží jak výstupní kmitočet, tak ladící krok.



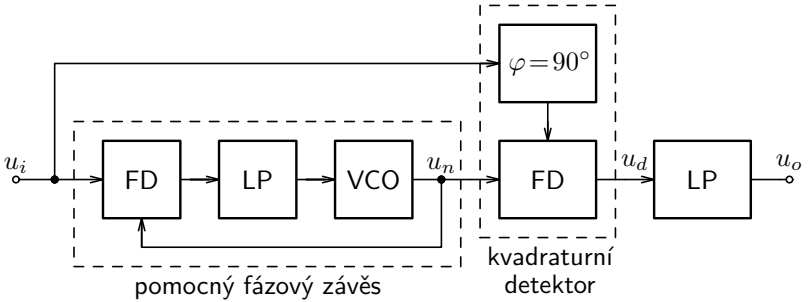
Obrázek 18.39: Blokové zapojení kmitočtové syntézy s programovatelnou děličkou kmitočtu a konkrétní zapojení jednoduché násobičky kmitočtu s obvodem 4046.

Synchronní demodulátor AM signálu

Základním prvkem demodulátoru je kvadraturní detektor, který pracuje se vstupním signálem a signálem nosné. Ten je generován pomocným fázovým závěsem ze vstupního signálu u_i:

$$u_i = U_0(1 + m\cos\omega_s t)\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

kde ω_0 je úhlový kmitočet nosné, ω_s je kmitočet modulačního signálu a m je hloubka modulace.



Obrázek 18.40: Blokové schéma synchronního demodulátoru AM signálu.

Pro výstupní signál kvadraturního demodulátoru (součinový detektor tvořený analogovou násobičkou s převodní konstantou K) buzený signálem u_i a signálem s pomocnou nosnou ω_n platí:

$$u_d = KU_N U_0(1 + m\cos\omega_s t)\sin(\omega_0 t + \varphi_0)\cdot\cos(\omega_n t) = \ldots$$

$$\ldots = KU_N U_0(1 + m\cos\omega_s t)\Big(\sin(2\omega_0 t + \varphi_0) - \frac{1}{2}(1 + \cos(2\omega_0 t)\Big) \quad \text{pro} \quad \omega_n = \omega_0$$

Po odfiltrování signálů odpovídající nosné, dostaneme pro výstupní signál repliku modulačního signálu:

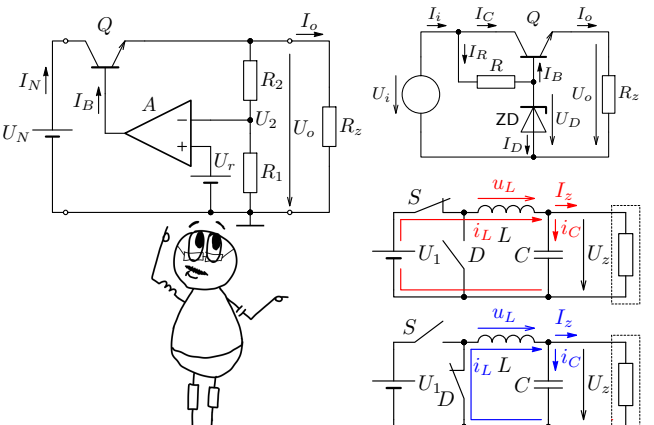
$$u_o = K\frac{U_N U_0}{2}(1 + m\cos\omega_s t).$$

Poznámky XVIII

Kapitola 19

Elektronické napájecí zdroje

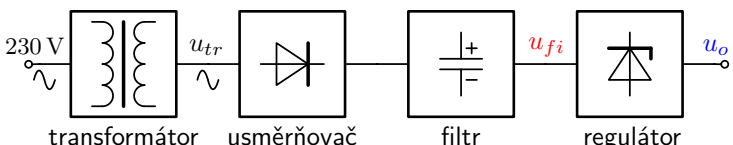
Tato kapitola za zabývá principy a obvodovým řešením elektronických napájecích zdrojů, a to jak spojitě pracujících, tak spínaných. Uživatel se krátce seznámí s usměrňovači, s jednoduchými stabilizátory se Zenerovou diodou a zejména se zpětnovazebními regulátory. Pozornost je věnována i referenčním zdrojům napětí. V druhé části kapitoly jsou pak představeny principy činnosti spínaných regulátorů a to jak základních nábojových pump (regulátorů bez induktorů), tak regulátorů s induktory. Na příkladech jsou ukázány elementární postupy při výpočtu hodnot obvodových prvků těchto obvodů na základě jejich zadaných parametrů.



19.1. Napájecí zdroje se spojitě pracujícími regulátory

19.1.1. Základní uspořádání „klasického“ zdroje

Napájecí zdroje jsou nezbytnou součástí všech elektronických zařízení. Blokové schéma klasického nespínaného zdroje je na obrázku 19.1 a význam jednotlivých bloků níže.



Obrázek 19.1: Základní uspořádání klasického zdroje s usměrňovačem, filtrem a regulátorem (lineárním).

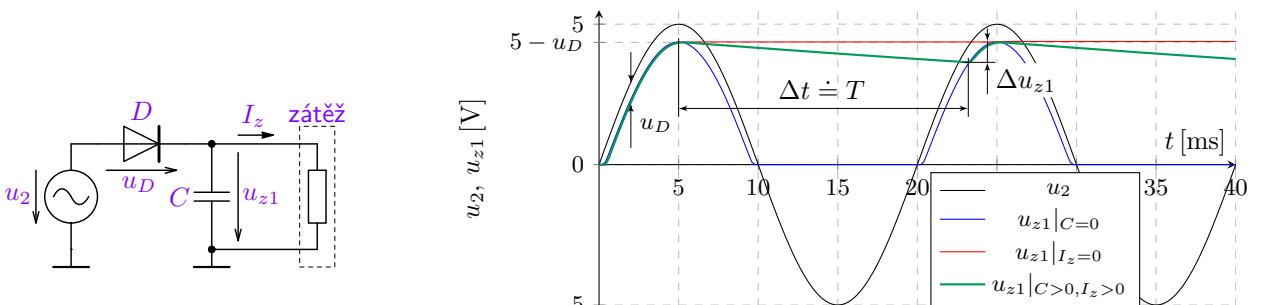
- Transformátor pracuje na „síťovém“ kmitočtu $50\,\mathrm{Hz}$, tj. s železným (těžkým) jádrem a slouží pro základní změnu (snížení) velikosti vstupního napětí.
- Usměrňovač usměrní proud a tím i napětí na zátěži na jednosměrný.
- Filtr odfiltruje střídavé složky usměrněného napětí a propustí zejména stejnosměrnou složku.
- Regulátor reguluje velikost výstupního stejnosměrného napětí nebo proudu na požadovanou velikost.

19.1.2. Usměrňovače – dioda jako spínač řízený napětím

Dioda ve funkci usměrňovače byla již uvedena v kapitole 13.5 na obrázku 13.9. Jedná se o zapojení jednosměrného usměrňovače, kdy se dioda otevírá pouze v kladné půlvlně vstupního signálu. Při použití vyhlazovacího kapacitoru C je pak zátěž napájena z tohoto kapacitoru po dobu Δt, kdy je dioda uzavřena, viz obrázek 19.2. Zvlnění výstupního napětí při konstantním proudovém odběru I_z lze vyjádřit jako

$$\Delta Q = C\Delta u_z = I_z \Delta t \;\Rightarrow\; \Delta u_z = \frac{I_z \Delta t}{C} \doteq \frac{I_z T}{C}, \tag{19.1}$$

kde Δu_z je zvlnění výstupního napětí a T je perioda střídavého usměrňovaného signálu.



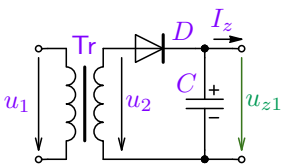
Obrázek 19.2: Zapojení jednocestného usměrňovače a odpovídající časové průběhy napětí.

Zvlnění výstupního napětí při stejné velikosti filtrační kapacity a zátěži lze pomocí dvoucestného usměrňovače, jak ukazuje obrázek 19.3. Zvlnění výstupního napětí je pro dvoucestný usměrňovač dáno přibližně vztahem:

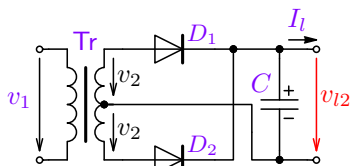
$$\Delta Q = C\Delta u_{z2} = I_z \Delta t_2 \;\Rightarrow\; \Delta u_{z2} = \frac{I_z \Delta t_2}{C} \doteq \frac{I_z T}{2C} \doteq \frac{\Delta u_{z1}}{2}, \tag{19.2}$$

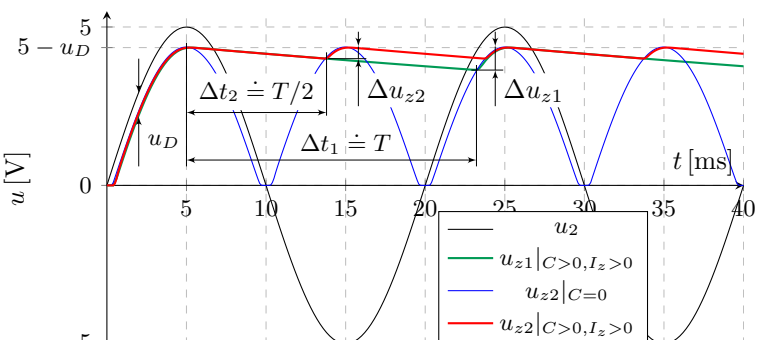
kde Δu_{z1} je zvlnění výstupního napětí jednocestného a
Δu_{z2} dvoucestného usměrňovače s filtračním kapacitorem o kapacitě C a proudem zátěže I_z.

(a)



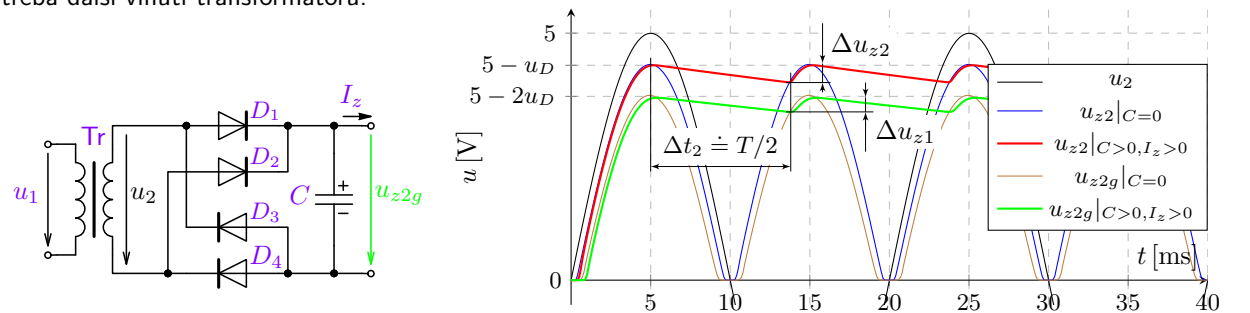
(b)





Obrázek 19.3: Jednocestný usměrňovač za transformátorem (a) a dvoucestný usměrňovač využívající dvě stejná vinutí transformátoru (b) a jejich porovnání jejich časových průběhů výstupního napětí se zátěží.

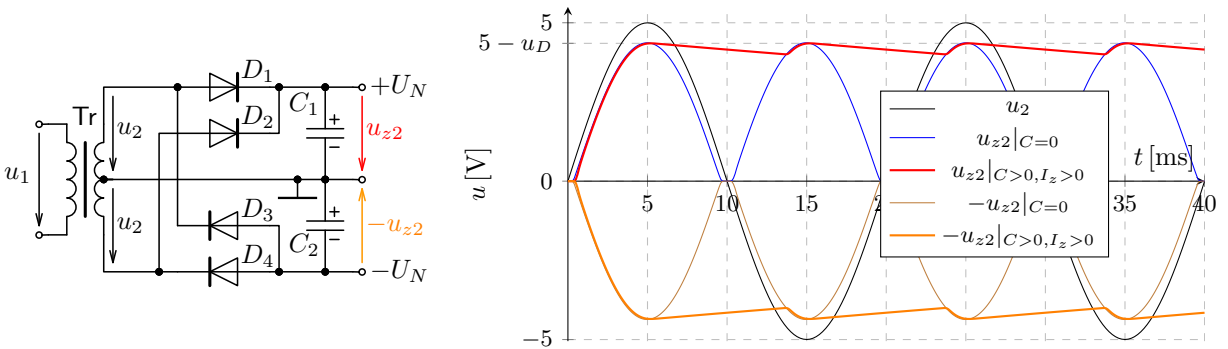
Dvoucestné usměrnění lze u nesymetrického výstupu transformátoru realizovat zapojením tzv. Graetzova můstku, které je uvedeno na obrázku 19.4. Vzhledem k tomu, že proud teče vždy přes dvě diody (D_1,D_4, resp. D_2,D_3 při kladné, resp. záporné půlvlně u_2) je výstupní napětí zmenšeno o dvojnásobný úbytek napětí na diodách. Není však třeba další vinutí transformátoru.



Obrázek 19.4: Zapojení dvoucestného usměrňovače pomocí Graetzova můstku a porovnání časových průběhů výstupních napětí zatíženého dvoucestného usměrňovače s dvěma diodami (u_{z2}) a s Greatsovým můstkem (u_{z2g}).

Zvlnění výstupního napětí pro dvoucestný usměrňovač s Greatsovým můstkem je prakticky shodné se zvlněním z předchozího případu, tj. $\Delta u_{z2} = \Delta u_{z2g} \doteq \frac{\Delta u_{z1}}{2}$, kde Δu_{z2}, resp. Δu_{z2g} je zvlnění výstupního napětí dvoucestného usměrňovače se dvěma diodami, resp. s Greatsovým můstkem přičemž C je kapacita filtračního kondenzátoru I_z je proud odebíraný zátěží.

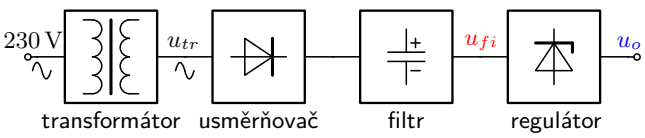
Pro získání dvou symetrických napětí ($\pm U_N$ vůči zemnímu potenciálu) lze vyjít ze zapojení dvoucestného usměrňovače dle obrázku 19.3 (b), přičemž však využijeme i záporných půlvln napětí u_2 obou sekundárních vinutí transformátorů, viz obrázek 19.5. Časové průběhy výstupních napětí $\pm u_{z2}$ jsou symetrické a odpovídají průběhu u_{z2} na obrázcích 19.3 a 19.4. Vzhledem k tomu, že proud odebíraný z u_{z2}, resp. $-u_{z2}$ prochází pouze jednou diodou, je výstupní napětí zmenšeno pouze o úbytek na jedné diodě (D_1 nebo D_2, resp. D_3 nebo D_4).

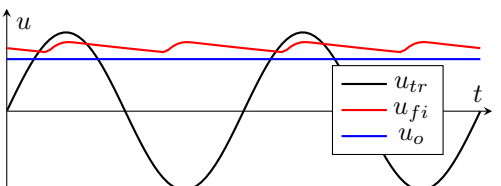


Obrázek 19.5: Zapojení dvoucestného usměrňovače využívající dvě stejná vinutí pro získání dvou symetrických stejnosměrných napětí a časové průběhy výstupních napětí ($\pm u_{z2}$) zatíženého dvoucestného usměrňovače.

19.1.3. Funkce a parametry spojitě pracujících regulátorů

Úkolem regulátoru je stabilizovat hodnotu výstupní veličiny (proudu nebo napětí) na požadované hodnotě. V případě nespínaného regulátoru musí být hodnota výstupní veličiny regulátoru vždy větší, než hodnota veličiny vstupní, jak ilustruje následující obrázek.

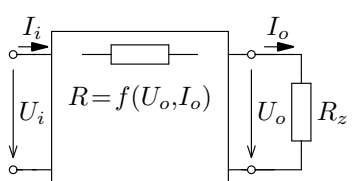




Obrázek 19.6: Bloková struktura klasického zdroje a časové průběhy jednotlivých napětí.

Princip činnosti nespínaného stabilizátoru je založen na zařazení odporového prvku (řízeného zdroje) mezi napájecí zdroj a zátěž, viz obrázek 19.7. Tento prvek (např. jeho odpor) je řízen tak, aby výstupní veličina byla stabilizována na požadované hodnotě. Vzhledem k tomu, že řízený prvek se z hlediska výkonu chová jako rezistor, vzniká na něm ztrátový výkon úměrný $(U_i - U_o)I_o$, čímž se snižuje účinnost regulátoru

$$\eta = \frac{P_o}{P_i}. \tag{19.3}$$



Obrázek 19.7: Principiální schéma činnosti nespínaného regulátoru.

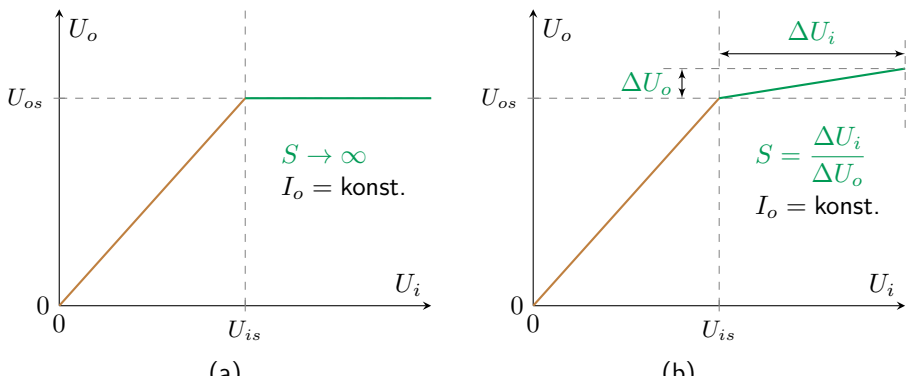
Převodní charakteristika a činitel stabilizace

Převodní charakteristika určuje statickou závislost výstupní veličiny (napětí, resp. proud pro napěťové, resp. proudové stabilizátory) na vstupním napětí při konstantní zátěži ($I_o = \text{konst.}$). Parametrem určující kvalitu stabilizace je činitel stabilizace S, definovaný pro oblast stabilizace, tj. pro $U_i > U_{is}$, resp. $U_o \geq U_{os}$.

$$S = \left.\frac{\mathrm{d}U_i}{\mathrm{d}U_o}\right|_{U_i > U_{is}, I_o = \text{konst.}} \tag{19.4}$$

V případě proudového stabilizátoru je $S = \frac{\mathrm{d}U_i}{\mathrm{d}I_i}$ převodním odporem. Pro ideální případ je v oblasti stabilizace výstupní veličina nezávislá na vstupní veličině, tj. $S \to \infty$.

Pokud obvod pracuje v lineární části charakteristiky pro $U_i > U_{is}$ jedná se o lineární systém a mluvíme pak o lineárních regulátorech.



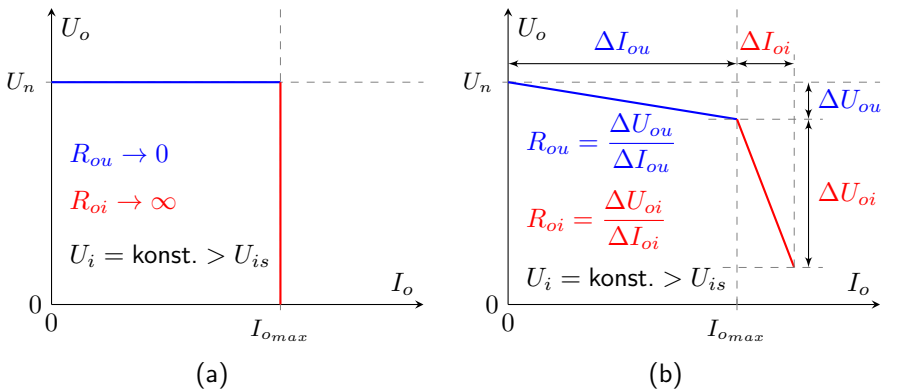
Obrázek 19.8: Převodní charakteristika ideálního stabilizátoru (a) a typický průběh převodní charakteristiky reálného regulátoru s určením činitele stabilizace (b).

Zatěžovací charakteristika a výstupní odpor

Zatěžovací charakteristika určuje statickou závislost výstupního napětí na zatěžovacím proudu. Parametrem určující kvalitu stabilizátoru/zdroje je výstupní odpor R_o, který je definovaný jak pro napěťový režim (oblast stabilizace napětí $\equiv$ zdroj napětí, $I_o < I_{o_{max}}$), tak pro proudový režim (oblast stabilizace proudu $\equiv$ zdroj proudu, $I_o \geq I_{o_{max}}$), při konstantním vstupním napětí $U_i = \text{konst.} > U_{is}$.

$$R_o = \left.\frac{\mathrm{d}U_o}{\mathrm{d}I_o}\right|_{U_i=\text{konst.}>U_{is}} \tag{19.5}$$

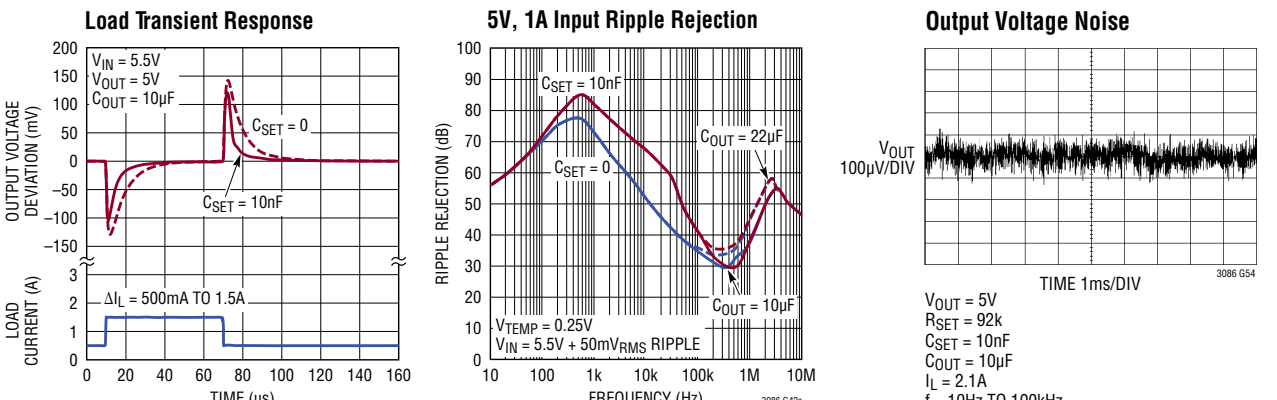
Předpokládáme, že výstupní odpor se v dané oblasti neliší – není závislý na konkrétní hodnotě výstupního napětí a zatěžovacího proudu.



Obrázek 19.9: Zatěžovací charakteristika ideálního regulátoru-stabilizátoru (a) a charakteristika reálného stabilizátoru s určením výstupních odporů (b).

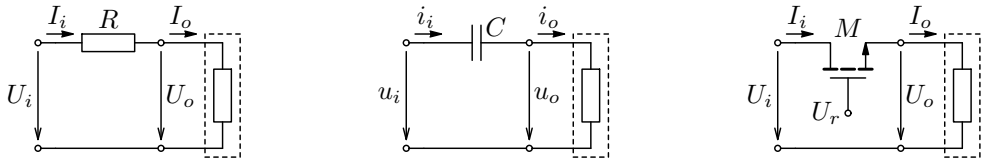
Dynamické parametry stabilizátorů

Mimo uvedených statických parametrů jsou u regulátorů důležité teplotní závislosti a samozřejmě i vlastnosti dynamické. Jedná se zejména o: časové odezvy výstupního napětí na (skokovou) změnu vstupního napětí nebo výstupního proudu, potlačení vstupního rušení, šumové parametry, viz obrázek 19.10 a další parametry na straně XIX-34 a datasheetu.



Obrázek 19.10: Konkrétní příklad uvedených parametrů (převzato z datasheetu stabilizátoru LT3086).

19.1.4. Principy spojitě pracujících obvodů pro snížení velikosti napětí



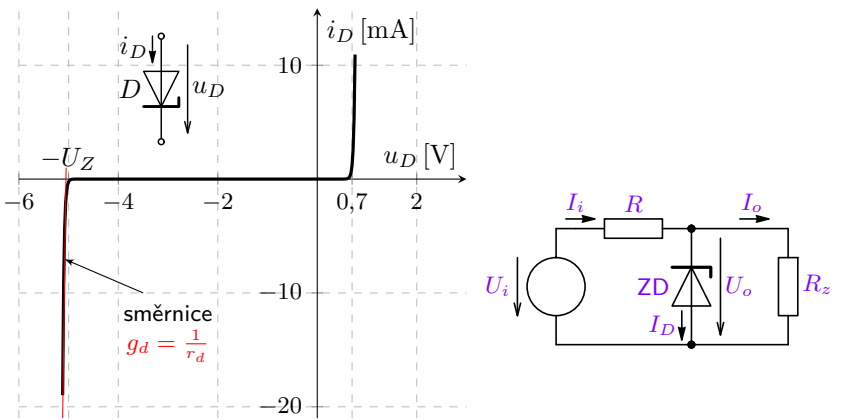
(a) (b) (c)

Obrázek 19.11: Elementární lineární obvody pro snížení (a) stejnosměrného (b) střídavého napětí a obecné zapojení stabilizátoru jako řízeného prvku.

- Zapojení (a), (b) je lineární, tj. nemůže splnit požadovanou nelineární (po částech lineární) převodní charakteristiku, navíc zapojení (b) lze použít pouze při střídavém (harmonickém) buzení, kde však nevykazuje činný ztrátový výkon ($\eta \to \infty$), viz příklad 5.1 a analýzu. Pro zajištění správné funkce je nutné zajistit stabilní velikost vstupního napětí a proudu zátěže $\Rightarrow$ **nelze použít jako obecný stabilizátor**.
- Zapojení (c) využívá řízení (U_r) ke změně chování řízeného prvku (zde MOSFET) tak, aby pro napěťový režim mělo výstupní napětí U_o požadovanou velikost jak při změnách vstupního napětí U_i, tak při změnách zátěže (proudu I_o), resp. pro proudový režim měl výstupní proud I_o požadovanou velikost jak při změnách vstupního napětí U_i, tak při změnách zátěže (napětí U_o).

19.1.5. Princip napěťových stabilizátorů se Zenerovou diodou (ZD)

Stabilizátor využívá závěrný směr diody, kde při zvýšení vstupního napětí U_i nad Zenerovo napětí U_Z nastává Zenerův či lavinový průraz, čímž se výrazně zvýší závěrný proud diodou I_D, a tím i úbytek na omezovacím rezistoru R. Vzhledem k velkému sklonu charakteristiky (minimálnímu diferenciálnímu odporu r_d) je výstupní napětí $U_o = -u_D$ minimálně závislé na proudu $i_D = -I_D$ a tím i vstupním napětí U_i.



Výhody: Jednoduché zapojení, minimální teplotní závislost výstupního napětí pro $U_Z \doteq 6\,\mathrm{V}$.
($U_Z < 6\,\mathrm{V}$ – Zenerův průraz: $\frac{\mathrm{d}U_Z}{\mathrm{d}T} < 0$, $U_Z > 6\,\mathrm{V}$ – lavinový průraz: $\frac{\mathrm{d}U_Z}{\mathrm{d}T} > 0$).

Nevýhody: velké ztráty a namáhání diody (ztrátovým výkonem) zejména při odpojení zátěže $\Rightarrow$ malá účinnost, teplotní závislost, $\Rightarrow$ použití pouze pro malé výkony. Více viz přednáška.

Obrázek 19.12: Volt-ampérová charakteristika ZD a základní zapojení stabilizátoru.

Příklad 19.1

Zadání: Určete hodnotu předřadného rezistoru základního napěťového stabilizátoru se Zenerovou diodou, pokud je zadáno vstupní napětí $U_i = 12\,\mathrm{V}$ požadované výstupní napětí $U_o = 5\,\mathrm{V}$ a maximální výstupní proud $I_{o_{max}} = 0{,}1\mathrm{A}$. Dále určete účinnost pro maximální a poloviční výstupní proud I_o, přičemž minimální proud Zenerovou diodou volte $I_{D_{min}} = 5\,\mathrm{mA}$. Jaká musí být minimální zátěž (výstupní proud), pokud maximální povolená výkonová ztráta na diodě je $P_{D_{max}} = 0{,}5\,\mathrm{W}$. Nakonec určete činitel stabilizace S pokud je diferenciální odpor diody $r_d = 0{,}5\,\Omega$. Jaký je výstupní odpor stabilizátoru.

Řešení: Předpokládejme zapojení stabilizátoru dle obrázku 19.12, kde U_i i $U_o = U_D$ jsou konstanty, tj. i $I_i = \text{konst.}$ a např. při $I_{o_{max}}$ bude $I_D = I_{D_{min}}$. Z toho nejprve určíme hodnotu předřadného rezistoru:

$$R = \frac{U_i - U_o}{I_{D_{min}} + I_{o_{max}}} \doteq 67\,\Omega. \tag{19.6}$$

Účinnost pro maximální a poloviční výstupní (zatěžovací) proud – zanedbáváme změnu výstupního napětí při změně proudu diodou:

$$\eta_m = \frac{P_o}{P_i} = \frac{U_o I_{o_{max}}}{U_i(I_{o_{max}} + I_{D_{min}})} \doteq 40\,\%, \qquad \eta_{1/2} = \frac{P_o}{P_i} = \frac{U_o I_{o_{max}}/2}{P_i} \doteq 20\,\%, \tag{19.7}$$

jelikož vstupní proud je prakticky shodný $I_i = \frac{U_i - U_o}{R}$, tj. zvětší se proud diodou právě o $I_{o_{max}}/2$.

Dále opět předpokládejme konstantní výstupní napětí, resp. zanedbáváme změnu výstupního napětí při změně proudu diodou, pak pro maximální proud diodou platí:

$$I_{D_{max}} = \frac{P_{D_{max}}}{U_o} = 0{,}1\,\mathrm{A}.$$

Jelikož pro konstantní výstupní napětí platí i konstantní vstupní proud $I_i = \frac{U_i - U_o}{R} = 105\,\mathrm{mA}$, tak pro minimální výstupní proud lze psát:

$$I_i = I_{o_{min}} + I_{D_{max}} \quad \Rightarrow \quad I_{o_{min}} = I_i - I_{D_{max}} = 5\,\mathrm{mA},$$

kdy teče diodou právě $I_{D_{max}}$. Zátěž lze tedy téměř odpojit a nedojde přitom ke zničení diody.

Činitel stabilizace určíme z náhradního schématu pro změny obvodových veličin, kdy diodu nahradíme jejím vnitřním odporem. Pak pro změnu výstupního napětí a činitel stabilizace platí:

$$\Delta U_o = \Delta U_i \frac{r_d}{r_d + R}, \quad \Rightarrow \quad S = \frac{\Delta U_i}{\Delta U_o} = \frac{r_d + R}{r_d} \doteq 135. \tag{19.8}$$

Výstupní odpory určíme ze schématu pro změny obvodových veličin (neuvedeno). Určíme jednak R_{ou} pro napěťový režimu, kdy $I_D > 0$ a dále R_{oi} pro proudový režim, kdy je $I_o \geq 105\,\mathrm{mA} \Rightarrow I_D = 0$, tj. dioda zavřená:

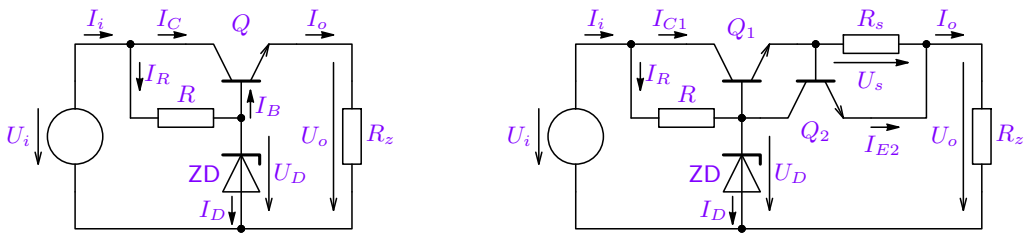
$$R_{o_u} = r_d || R \doteq r_d = 0{,}5\,\Omega, \qquad R_{oi} = R \doteq 67\,\Omega. \tag{19.9}$$

Výsledky (19.6) a (19.7) lze ověřit OP a výsledky (19.8) a (19.9) AC analýzou pro daný pracovní bod, tj. výstupní proud I_o. Viz také komentář.

Stabilizátor se Zenerovou diodou a proudovým zesilovačem

Přidáním tranzistoru jako proudového zesilovače k stabilizátoru se ZD lze zvýšit jeho proudovou zatížitelnost při menším výkonovém namáhání diody, viz obrázek 19.13. Stabilizátor se ZD dodává pouze proud $I_B << I_o$, čímž se výrazně snižuje výkonové namáhání diody i pro $I_o = 0 \Rightarrow I_D = I_{D_{min}} + I_{o_{max}}/(\beta+1)$. Zlepší se tím i účinnost, jak bude zřejmé z příkladu 19.2. Nevýhodou je jistá závislost napětí U_{BE} (tím i $U_o = U_D - U_{BE}$) na I_o.

Na obrázku (b) je schéma obohaceno o proudovou ochranu (proti zkratu na výstupu), tvořenou tranzistorem Q_2 a R_s. Pokud proud I_o vytvoří na R_s úbytek větší než cca $0{,}65\,\mathrm{V}$, tranzistor Q_2 se otevře a sníží tak napětí U_D, více viz analýzu a přednášku. Nevýhodou je zvýšení se výstupního odporu v napěťovém módu právě o R_s.



Obrázek 19.13: Zapojení stabilizátoru se ZD a tranzistorem jako proudovým zesilovačem (a) a doplnění zapojení aktivním proudovým omezením.

Příklad 19.2

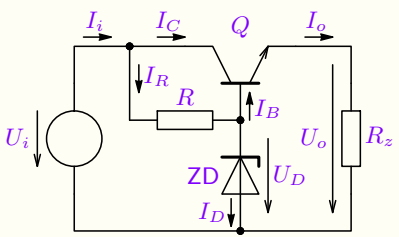
Zadání: Určete hodnotu Zenerova napětí diody a jejího předřadného rezistoru stabilizátoru podle obrázku 19.13 (a), pokud je zadáno vstupní napětí $U_i = 12\,\mathrm{V}$ požadované výstupní napětí $U_o = 5\,\mathrm{V}$ a maximální výstupní proud $I_{o_{max}} = 0{,}5\mathrm{A}$, přičemž zesilovací činitel tranzistorů a minimální proud Zenerovou diodou volte $\beta = 100$ a $I_{D_{min}} = 5\,\mathrm{mA}$. Vypočítejte účinnost pro maximální a poloviční výstupní proud I_o. Dále uvažujte zapojení obrázku 19.13 (b), pro něhož určete hodnotu odporu R_s tak, aby regulátor omezoval proud při dosažení $I_{o_{max}}$ a vypočítejte výstupní odpor stabilizátoru R_{o_u} v napěťovém režimu pro výstupní proud $I_{o_{max}}/2$, pokud je diferenciální odpor diody $r_d = 3\,\Omega$.

Řešení: Pro zapojení stabilizátoru dle obrázku 19.13 (a) platí:

$$U_Z = U_D = U_o + U_{BE} \doteq 5{,}7\,\mathrm{V}.$$

Pro $I_o = I_{o_{max}}$ poteče Zenerovou diodou proud $I_D = I_{D_{min}}$, z čehož jednoduše určíme hodnotu předřadného rezistoru R:

$$R = \frac{U_i - U_D}{I_{D_{min}} + \frac{I_{o_{max}}}{\beta+1}} \doteq 633\,\Omega. \qquad (19.10)$$



Změnu napětí U_D a U_{BE} pro $I_o \in \langle 0, I_{o_max} \rangle$ lze považovat za zanedbatelnou oproti U_o. Pak pro účinnost stabilizátoru pro maximální a poloviční zatěžovací proud platí:

$$\eta_m = \frac{P_o}{P_i} \doteq \frac{U_o I_{o_{max}}}{U_i (I_{o_{max}} + I_{D_{min}})} \doteq 41\,\%, \quad \eta_{1/2} = \frac{P_o}{P_i} \doteq \frac{\frac{U_o I_{o_{max}}}{2}}{U_i \left(\frac{I_{o_{max}}}{2} + I_{D_{min}} + \frac{I_{o_{max}}}{2(\beta+1)} \right)} \doteq 40\,\%, \tag{19.11}$$

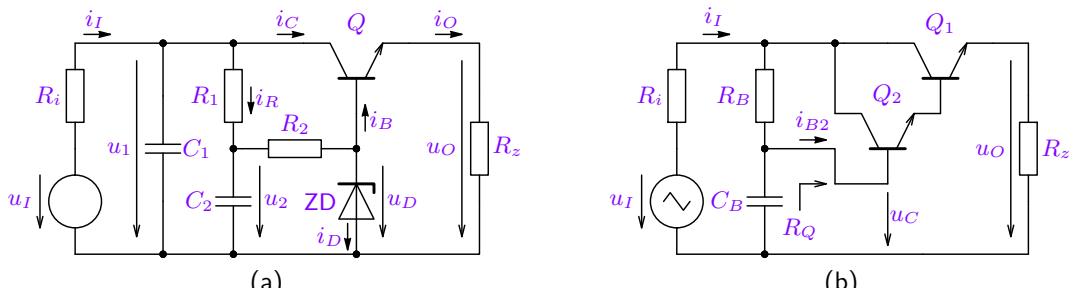
Hodnotu R_o určíme při $I_o = I_{o_{max}}$, při kterém se začne tranzistor Q_2 otevírat, tj. $U_{BE2} \doteq 0{,}65\,\mathrm{V}$ a výstupní odpor v napěťovém režimu (Q_2 uzavřen) určíme ze schématu pro změny obvodových veličin (neuvedeno), podobně jako např. v případě (16.68):

$$R_s = \frac{U_{BE2}}{I_{o_{max}}} = 1{,}3\Omega, \qquad R_{o_u} = R_s + r_{e1} + \frac{r_d || R}{\beta + 1} \doteq 1{,}4\,\Omega, \quad \text{kde } r_{e1} \doteq \frac{1}{g_{m1}} \doteq \frac{1}{40 \frac{I_{o_{max}}}{2}} = 0{,}1\,\Omega. \tag{19.12}$$

Účinnost se při použití R_s sníží, jelikož se sníží výstupní napětí o úbytek $I_o R_s$, a tím se sníží i výkon na zátěži o $I_o^2 R_s$, přičemž příkon zůstane prakticky stejný. To pak vede na $\eta_m \doteq 40\,\%$ a $\eta_{1/2} \doteq 41\,\%$. Účinnost je dána zejména rozdílem vstupního a výstupního napětí a minimálně závisí na I_o, což je velká výhoda oproti základnímu zapojení 19.12. Zapojení s omezovačem proudu má v napěťovém režimu výrazný vliv na výstupní odpor, který je pak převážně dán právě hodnotou R_s. Více viz komentář, analýzu a dodatek N.

19.1.6. Filtrace zvlnění vstupního napětí

Obvod uvedený na obrázku 19.13 nabízí další vylepšení – efektivnější filtraci vstupního napětí oproti klasickému filtračnímu kapacitoru kapitoly 19.1.2. Ten je nezbytný k udržení dostatečné úrovně napětí, pokud je vstupní napětí menší (usměrňovací diody zavřeny), nicméně pro další filtraci zvlnění je podstatně výhodnější přidat kapacitor C_2 mezi rozdělený bázový odpor jak uvádí obrázek 19.14 (a). Při shodné velikosti má kapacitor C_2 na filtraci zvlnění výstupního napětí (střídavou složku u_o) podstatně větší vliv, než kapacitor C_1. Je to dáno rozdílnostmi časových konstant $\tau_2 \doteq C_2(R_1||R_2) \gg \tau_1 \doteq C_1 R_i$ (pro $R_i \ll R_1$ a $R_2 \gg r_D$). Situaci lze ilustrovat i na „linearizovaném“ obvodu na obrázku (b), kde je navíc použito Darlingtonovo zapojení pro zvýšení R_Q, resp. snížení i_{B2} a tím možnosti zvýšení $R_B = R_1||R_2$, tj. i $\tau_B = C_B(R_B||R_Q)$ a lepší filtraci napětí u_C. Vzhledem k tomu, že následuje stupeň SC-SC, je střídavá složka $u_o \doteq u_c$, viz analýzy. Uvedené uspořádání se někdy označuje jako „násobič C_B“.

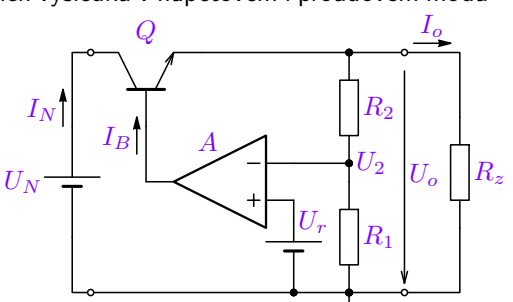


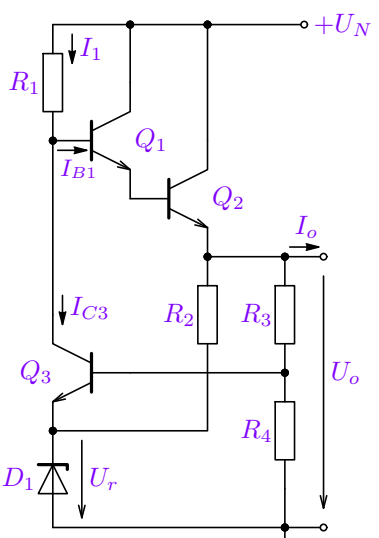
Obrázek 19.14: Zapojení obvodu referenčního napětí.

19.1.7. Princip zpětnovazebních stabilizátorů

Regulátory využívající ZV mohou dosáhnout podstatně lepších parametrů, viz. (10.2) a kapitolu 10.3.1. Implementaci lze provést jak s tranzistory nebo častěji pomocí operačního zesilovače jak je ukázáno na elementárních příkladech níže. Vždy se uplatňuje ZV princip: výstupní veličina nebo její část se porovnává s referenčním napětím (ZD nebo tzv. Bandgap reference – viz kapitolu 19.2). Vlevo je uveden principiální obvod napěťového regulátoru, vpravo jednoduchá implentace tranzistorového zapojení regulátoru s napěťovým (Q_3, R_1) a proudovým zesilovačem (Q_1, Q_2). Lepších výsledků v napěťovém i proudovém módu dosáhneme s proudovým zdrojem místo R_1 (dynamická zátěž 16.2), viz analýzy a komentář.

Výhody: velký činitel stabilizace, snadná změna výstupního napětí, malý, resp. velký výstupní odpor s použitím napěťové, resp. proudové ZV a velkém vratném rozdílu zpětné vazby.





Obrázek 19.15: Zapojení napěťového stabilizátoru s OZ a tranzistory.

19.1.8. Výpočet základních parametrů ZV regulátorů

Zpětnovazební systém, na kterém je založena i regulace stabilizátoru lze popsat známými zákony z teorie ZV.

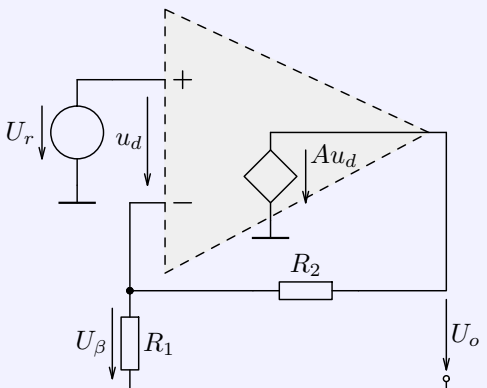
Výstupní napětí zpětnovazebního napěťového regulátoru

Regulátor tvořený operačním zesilovačem se zesílením A a zpětnovazebním přenosem β bude udržovat výstupní napětí U_o v závislosti na referenčním napětí U_r dle vztahu, který vychází z (10.2), tj.:

$$U_o = U_r \frac{A}{1+\beta A} = \left.\frac{U_r}{\beta}\right|_{A\to\infty}, \qquad (19.13)$$

přičemž v tomto případě platí

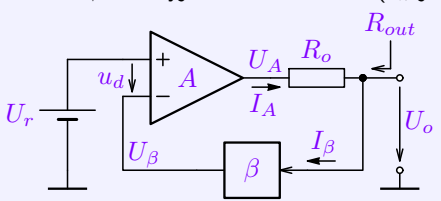
$$\beta = \frac{U_\beta}{U_o} = \frac{R_1}{R_1+R_2}.$$



Je zřejmé, že na přesnosti a stálosti výstupního napětí se značnou měrou podílí přesnost referenčního napětí.

Výstupní odpor napěťového regulátoru

Výstupní napětí U_{op} naprázdno (pro $R_z \to \infty$ zapojený na výstup U_o)a výstupní odpor R_{out} napěťového regulátoru tvořeného zesilovačem se zesílením A s výstupním odporem R_o a zpětnovazebním členem s přenosem β lze vyjádřit následovně (I_k je proud nakrátko rezistorem $R_z \to 0$ zapojeným na výstup U_o):



$$U_{op} = U_o|_{R_z=\infty} = u_d A = (U_r - U_{op}\beta)A \Rightarrow U_{op} = U_r \frac{A}{1+\beta A} \tag{19.14}$$

$$I_k = I_A|_{R_z=0} = \frac{U_A}{R_o} = \frac{U_r A}{R_o} \quad \text{pro } R_z = 0, \text{ tj. } U_o = 0 = U_\beta$$

$$R_{out} = \frac{U_{op}}{I_k} = \frac{R_o}{1+\beta A} = \frac{R_o}{F} \tag{19.15}$$

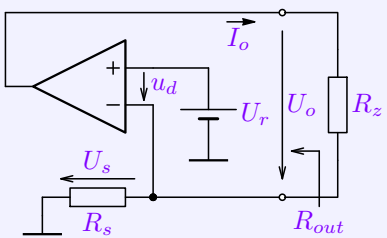
Vztah (19.13) samozřejmě souhlasí s (19.14) a vztah pro výstupní odpor pak souhlasí s (10.4), jelikož se jedná o napěťovou ZV. Je zřejmé, že pro velká zesílení zesilače je $R_{out}|_{A\to\infty} \to 0$, viz analýzu.

Pokud by byl ZV člen β tvořen odporovým děličem jako v předchozím případě, lze při odvození postupovat dle kapitoly 10.4, pak $U_{op} = U_r \frac{Ab}{\beta A+1}$a $R_{out} = \frac{R_o}{\beta A+1}$, přičemž $\beta = \frac{R_1}{R_1+R_2+R_o}$ a $b = \frac{R_1+R_2}{R_1+R_2+R_o}$.

Je zřejmé, že na výstupním odporu regulátoru se podílí jak velikost vlastního výstupního odporu zesilovače, tak velikost zesílení A, které se vlivem kmitočtu zmenšuje $\Rightarrow$ je třeba uvažovat výstupní impedanci.

Výstupní proud a odpor proudového regulátoru

Proudový regulátor tvořený zesilovačem se zesílením A a snímacím rezistorem R_s lze pro výstupní proud a výstupní odpor odvodit následující relace:



$$U_s = Au_d\frac{R_s}{R_s+R_z} = A(U_r-U_s)\frac{R_s}{R_s+R_z} \Rightarrow$$

$$U_s\frac{AR_s+R_s+R_z}{R_s+R_z} = U_r\frac{AR_s}{R_s+R_z} \Rightarrow U_s = U_r\frac{AR_s}{R_s(A+1)+R_z}$$

$$I_o = \frac{U_s}{R_s} = \frac{AU_r}{R_s(A+1)+R_z} = \left.\frac{U_r}{R_s}\right|_{A\to\infty} \tag{19.16}$$

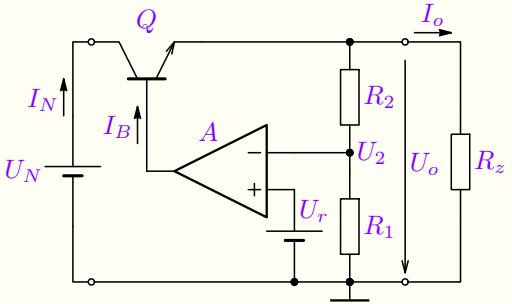
$$R_{out} = \frac{U_o|_{R_z\to\infty}}{I_o|_{R_z=0}} = \frac{U_rA}{\frac{U_r}{R_s}\frac{A}{A+1}} = R_s(A+1). \tag{19.17}$$

Vztah (19.17) souhlasí s (10.6), jelikož se jedná o proudovou ZV. Pro $A\to\infty$ je $U_s = U_r$ a $R_{out}\to\infty$. Při odvození lze opět postupovat i dle kapitoly 10.4, přičemž $I_o = U_r\frac{A}{\beta A+1}$, kde $\beta = R_s\,[\Omega]$ a $A\to\frac{A}{R_s+R_z}\,[\mathrm{S}]$.

Lze ukázat, že na výstupní proud regulátoru bude mít velikost vlastního výstupního odporu zesilovače R_A minimální vliv ($R_{out} = R_s(A+1)+R_A$), viz také analýzu a komentář. Vzhledem k tomu, že $A = A(j\omega)$, tak opět výstupní odpor přechází v impedanci, která se s kmitočtem snižuje/zhoršuje.

Příklad 19.3

Zadání: Určete výstupní napětí U_o, výstupní odpor R_{out} a činitel stabilizace S napěťového regulátoru tvořeného zesilovačem se zesílením $A = 100 \cdot 10^3$, NPN tranzistorem s proudovým zesilovacím činitelem $\beta = 100$ a $V_A = 100\,\mathrm{V}$, rezistory $R_1 = 5\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 45\,\mathrm{k\Omega}$ při výstupním proudu $I_o = 10\,\mathrm{mA}$ dle obrázku (pro analýzu je R_z nahrazen ideálním zdrojem proudu I_x). Analýzu proveďte pomocí numerického i symbolického simulátoru. V případě symbolických výrazů se pokuste o vyjádření zjednodušených vztahů pro uvedené parametry (např. v případě analýzy výstupního napětí uvažujte pouze dynamický odpor přechodu BE).



Řešení: Pro symbolické řešení nahradíme tranzistor linearizovaným modelem 15.16 (AC/TF analýza přičemž Π-model převedeme na T-model: $r_\pi = r_e(\beta + 1)$, $g_m = \frac{\alpha}{r_e} = \frac{\beta}{(\beta+1)r_e}$). Výstupní odpor tranzistoru r_o budeme (musíme) uvažovat pouze pro výpočet činitele stabilizace, tj. použijeme model 15.18 – jeho vliv je pro ostatní parametry zanedbatelný. Hodnoty parametrů modelů pro porovnání symbolických vztahů s numerickou analýzou získáme z pracovního bodu ($I_C = I_o = 10\,\mathrm{mA}$).

Symbolická analýza je poměrně náročná, proto je pro řešení použit symbolický analyzátor, přičemž výsledky jsou zjednodušeny na níže uvedené vztahy. Vyčíslení pro porovnání s numerickou analýzou je pro uvedený pracovní bod $I_C = I_o = 10\,\mathrm{mA}$, tj. $g_m = 0{,}4\,\mathrm{S}$. Je zřejmé, že pro uvedenou velkou hodnotu zesílení A vychází vratný rozdíl veliký a výsledné numerické parametry se blíží ideálním hodnotám:

$$U_o|_{I_o=0} \doteq U_r \frac{A(R_1+R_2)}{AR_1+R_1+R_2+r_e} \doteq 9{,}999$$

$$R_{out}|_{I_o=-i_x} = \frac{\Delta U_o}{\Delta I_x} = \frac{u_o}{i_x} \doteq \frac{r_e(R_1+R_2)}{AR_1+R_1+R_2+r_e} \doteq 0{,}25\,\mathrm{m\Omega}$$

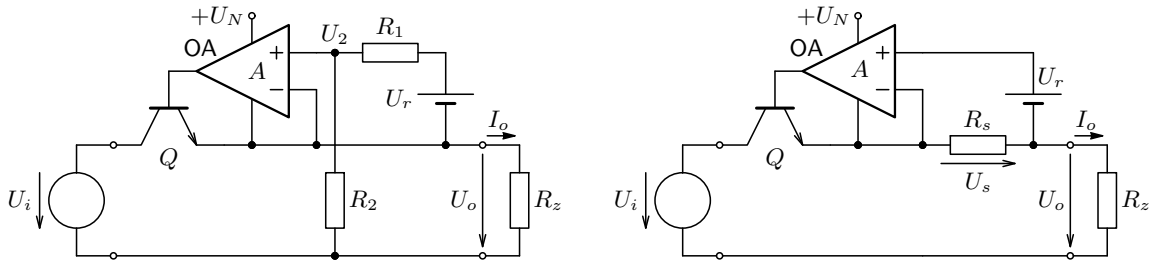
$$S|_{I_o=0} = \frac{\Delta U_N}{\Delta U_o} = \frac{u_n}{u_o} \doteq \frac{Ar_oR_1}{r_e(R_1+R_2)} = 4\cdot 10^7$$

Veličiny S a R_{out} jsou diferenciální a tudíž jejich výpočet provedeme nad linearizovaným schématem, tj. AC/TF analýzou (analýzou změn obvodových veličin $U_o \to u_o$). Výstupní napětí je však stejnosměrný parametr, který je nutné provádět OP/DC analýzou. Pro symbolickou analýzu by však simulátor použil nelineární popis tranzistoru. Pro zjednodušení je tedy tranzistor nahrazen pouze diferenciálním odporem r_e přechodu B-E (bez posunu $0{,}7\,\mathrm{V}$, který se stejně neuplatní) a výpočet pak provedeme TF analýzou.

Viz také měření na spojitě pracujících stabilizátorech v dodatku N.

19.1.9. Stabilizátory pro vyšší napětí

V případě regulátorů pro vyšší napětí (vyšší než napájecí napětí OZ) není možné použít přímo koncepci regulátoru uvedenou v příkladu 19.3. Jedna z možností řešení, je použití napájení řídící části (OZ) s posunutou referencí – v tomto případě na potenciálu emitoru výstupního tranzistoru Q, viz obrázek 19.16.



Obrázek 19.16: Princip napěťového (a) a proudového (b) stabilizátoru pro vyšší napětí.

V případě ideálního OZ ($A \to \infty$, $i^+ \to 0$) lze pro výstupní napětí napěťového regulátoru psát:

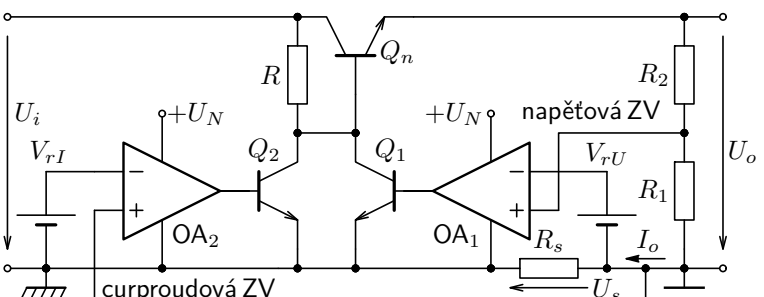
$$U_2 = U_o \Rightarrow \frac{U_r}{R_1} = \frac{U_o}{R_2} \Rightarrow U_o = U_r \frac{R_2}{R_1}.$$

Pro proudový regulátor (b) s ideálním operačním zesilovačem evidentně platí $U_r = U_s \Rightarrow I_o = \dfrac{U_r}{R_s}$.

19.1.10. Laboratorní zdroje – napěťový zdroj kombinovaný s proudovým

Napěťový regulátor je většinou třeba vybavit proudovým omezením. Pokud je toto omezení regulovatelné, přechází zdroj při zatížení $I_o \geq I_{max}$ z napěťového do proudového režimu (zdroj proudu), viz obrázek 19.9 $\Rightarrow$ laboratorní zdroj. Možné obvodové implementace kombinující napěťovou i proudovou stabilizaci jsou ukázány na následujících obrázcích. Vzhledem k tomu, že tranzistorové stupně v zapojení SE obracejí fázi, je třeba zajistit, aby celková ZV byla záporná. Výstupní tranzistor Q_n se otevírá odporem R, který musí zajistit proud do báze o velikosti min. I_o/β. Napěťová regulace je tvořena Zesilovačem OA_1, který porovnává napětí z výstupu přes dělič R_2, R_1 s referencí U_{rU} a řídí tranzistor Q_1. Ten pak přivírá tranzistor Q_n dle nastavení ZV (funguje jako zesilovač v zapojení SE se zátěží $R||(r_\pi + R_z\beta)$, pokud je Q_2 uzavřen).

Proudová regulace je tvořena Zesilovačem OA_2, který porovnává napětí U_s přímo úměrné výstupnímu proudu I_o s referencí U_{rI} a řídí tranzistor Q_2. Ten pak přivírá výstupní tranzistor Q_n v případě překročení limitu výstupního proudu – analogicky jako Q_1.

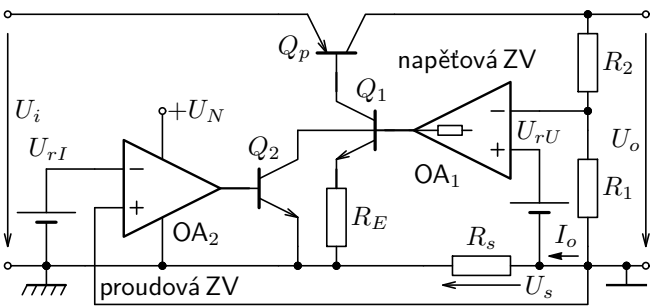


Obrázek 19.17: Příklad zapojení pro buzení výstupního tranzistoru Q_n v konfiguraci SC s kombinací řízení napětí i proudu.

Napěťové regulátory s nízkou napěťovou ztrátou – LDO

Další možností řízení výstupního napětí i proudu je zapojení níže, kde výstupní tranzistor pracuje v zapojení SC. To je výhodné pro malé úbytky napětí na regulátoru $(U_o - U_I)$, jelikož lze tranzistor Q_p otevřít až do režimu saturace, podobně jako koncové tranzistory zesilovače na obrázku 16.104. Takové stabilizátory se označují jako LDO (Low Drop Voltage regulators).

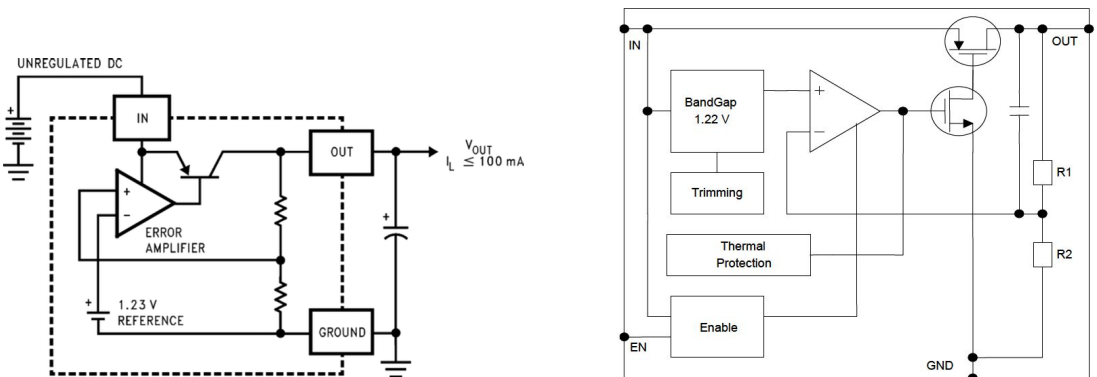
V uvedeném zapojení je samozřejmě změněno zapojení budících tranzistorů a sníženo zesílení těchto stupňů (Q_1 a Q_2), což je výhodné vzhledem k zajištění stability, jak bude ukázáno dále. Zesílení stupně s Q_p je však dáno zátěží. Navíc mají uvedené konfigurace různé nulové potenciály pro reference napětí U_{rU} a proudu U_{rI}, což může být nevýhodné např. při použití D/A převodníků pro změnu výstupních veličin. Možné řešení je uvedeno na obrázku 19.20 (b), více viz přednáška a příklad 19.4.



Obrázek 19.18: Příklad zapojení pro buzení výstupního tranzistoru Q_p v konfiguraci SE s kombinací řízení U_o i I_o.

LDO regulátory jsou rozšířeny zejména v nízkonapěťových obvodech, kde je nutné použít přesné nespínané regulátory a přitom udržet vysokou účinnost celého systému. Vyrábí se celá řada integrovaných obvodů – Low Drop regulators.

Následující obrázek dokumentuje princip těchto napěťových regulátorů na blokových schématech integrovaných LDO regulátorů tak, jak je uvádí výrobci. Je zřejmé, že základní princip vychází ze zapjení s OZ na obrázku 19.15, resp. je analogický napěťové regulaci zapojení 19.18.



Obrázek 19.19: Blokové schéma LDO stabilizátorů (viz http://www.ti.com/ a www.st.com).

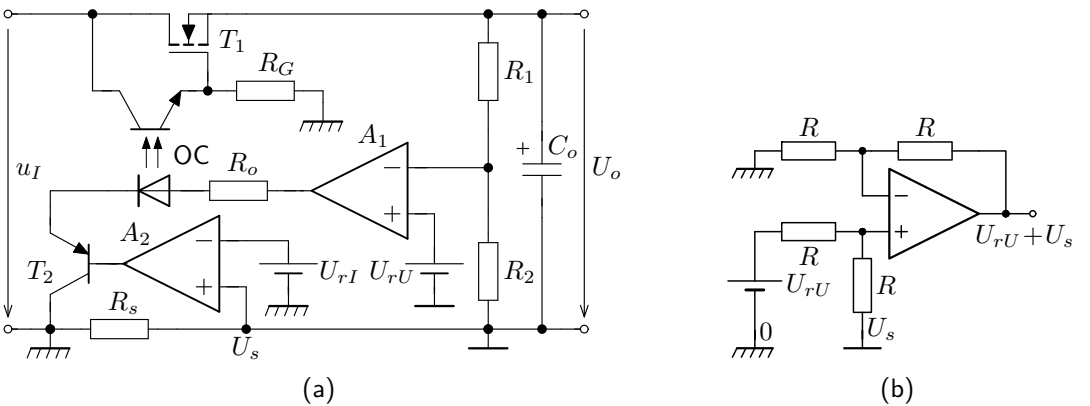
Vzhledem k tomu, že uvedené regulátory jsou soustavy se silným vlivem ZZV a navíc s navýšením zesílení v uzavřené ZV smyčce o zesílení přídavných tranzistorových stupňů, je zvýšená náchylnost zapojení k nestabilitě. V zapojení 19.17 je to zejména zapojení SE (Q_1, Q_2), kde zátěž tvoří $R||(R_z/\beta_1)$, v zapojení 19.18 je to opět konfigurace SE (Q_p), kde zátěží je pouze zátěž zdroje R_z, která má/musí mít pro stabilní systém i kapacitní složku, viz obrázek 19.19 (a).

Příklad 19.4

Pomocí simulátoru analyzujte stabilitu zapojení z příkladu 19.3 a to jak pomocí časové (transientní) analýzy, tak pomocí Nyquistova kritéria pro různé hodnoty zpětnovazebního přenosu $\beta = 0{,}1$ a 1 nastavené pomocí poměru rezistorů R_2 a R_1, jestliže zesílení OZ má DC hodnotu $A_0 = 2 \cdot 10^5$ a vykazuje tři póly – jednonásobný na kmitočtu $100\,\mathrm{Hz}$ a dvojnásobný na kmitočtu $5\,\mathrm{MHz}$. Tranzistor nahraďte linearizovaným modelem v pracovním bodě.

Řešení: Tranzistor nahradíme T modelem 15.16 (c) pro $I_C \doteq 10\,\mathrm{mA}$, tj. $g_m \doteq 1/r_e \doteq 0{,}4\,\mathrm{S}$. Časovou (případně PZ) analýzu provedeme pro přenos spojené ZV smyčky a AC analýzu pro přenos rozpojené ZV smyčky (Nyquistovo kritérium). Systém je pro oba zpětnovazební přenosy stabilní, nicméně pro případ $\beta = 1$, tj. $R_2 = 0$, je systém na mezi stability (fázová jistota je $\approx 0°$ pro $f_{0_M} \doteq 5\,\mathrm{MHz}$), více viz analýzu s komentářem.

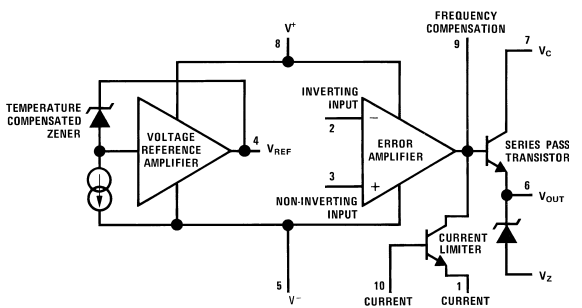
Následující obrázek (a) ukazuje další možnou implementaci laboratorního zdroje, kdy je řídící část oddělena pomocí optočlenu. Vzhledem k tomu, že tranzistory pracují v zapojení SC, resp. SD, nevzniká v uzavřené ZV smyčce další přídavné napěťové zesílení a struktura nemá náchylnost k nestabilitě. Na obrázku (b) je pak uvedeno řešení pro řízení výstupního napětí i proudu referenčními zdroji napětí U_{rU} a U_{rI} vůči stejné společné svorce (přičtením úbytku U_s k U_{rU}). Pro minimalizaci chyby proudového řízení je třeba, aby $R \ll R_s$ i $R_2 \ll R_s$.

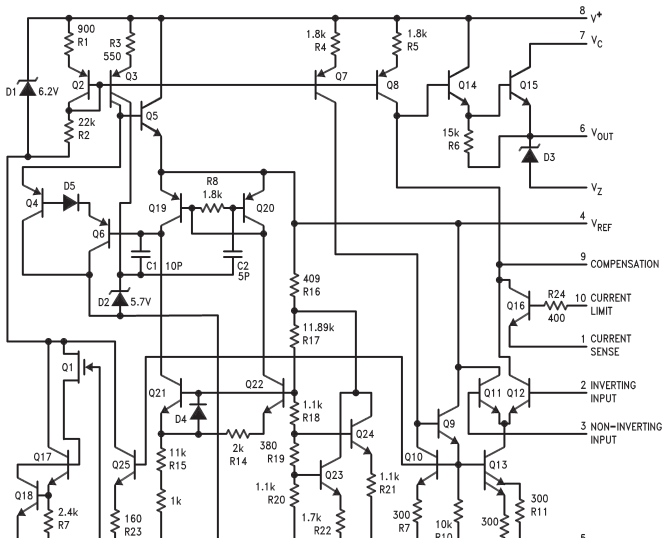


Obrázek 19.20: Návrh řešení zapojení laboratorního zdroje s nízkým napájecím napětím řídící částí (a) a zapojení pro úpravu referenčního zdroje U_{rU} (b).

19.1.11. Integrované spojitě pracující (nespínané) stabilizátory

Jedním z prvních integrovaných stabilizátorů je obvod LM723, jehož blokové schéma je na obrázku vlevo, vnitřní zapojení vpravo. Umožňuje regulaci napětí s proudovou limitací (přesnou regulaci proudu je nutné řešit s externím zesilovačem). Více viz přednáška a datasheet.





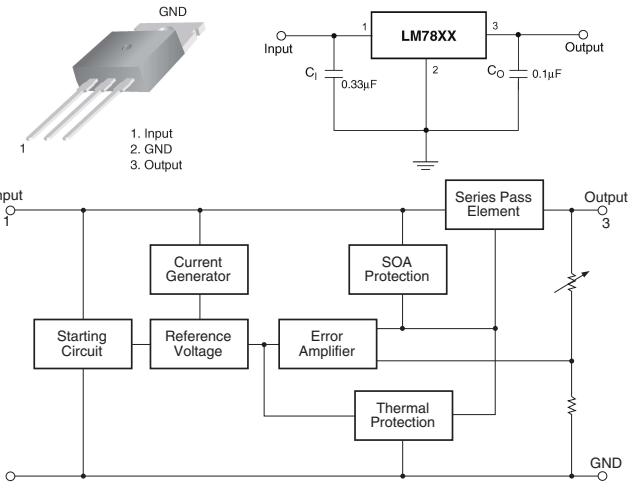
Obrázek 19.21: Blokové schéma integrovaného stabilizátoru LM723 (převzato z www.ti.com).

Integrovaný stabilizátor LM78xx

Jednoduchým řešením pro snížení a stabilizaci napětí je řada stabilizátorů LM7805 až LM7824 pro kladné napětí, případně „komplementárních“ typů LM79xx pro napětí záporné. Princip: schéma s OZ na obrázku 19.15.

Charakteristické vlastnosti

- Výstupní napětí: 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18 nebo $24\,\mathrm{V}$,
- Výstupní proudové omezení: $1\,\mathrm{A}$,
- Ochrana: tepelná, proti zkratu, výstupního tranzistoru (výkonová)
- teplotní drift: $-0{,}8\,\mathrm{mV/°C}$, $(I_o = 5\,\mathrm{mA})$
- Výstuní šum: typ. $42\,\mu\mathrm{V}$, $(f \in \langle 10,\ 10\,\mathrm{k}\rangle\,\mathrm{Hz})$
- Napěťová ztráta: typ. $2\,\mathrm{V}$, $(I_o = 1\,\mathrm{A})$
- Výstupní odpor: typ. $15\,\mathrm{m\Omega}$, $(f = 1\,\mathrm{kHz})$
- Více viz také datasheet a negativní regulátor LM 79xx.



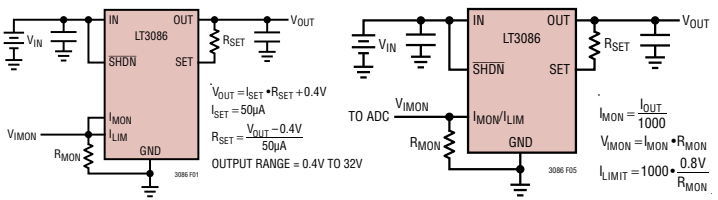
Obrázek 19.22: Pouzdro, typické zapojení a blokové schéma integrovaného stabilizátoru LM78xx (převzato z datasheetu).

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

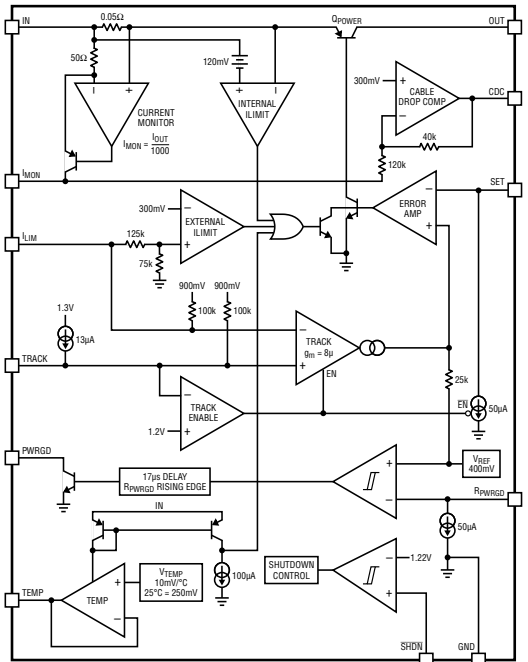
Integrovaný stabilizátor LT3086

Integrovaný stabilizátor LT3086 obsahuje všechny řídící obvody, včetně výkonových prvků pro zapojení laboratorního zdroje, jak je patrné z blokového schématu níže. Pro řízení lze jednoduše použít změnu hodnoty rezistoru R_{SET} nebo lze stabilizátor doplnit obvody pro řízení mikroprocesorem prostřednictvím D/A převodníků, viz např. T. Kouba, Diplomová práce FEL ČVUT, 2020.

Charakteristické vlastnosti jsou uvedeny na následující straně.

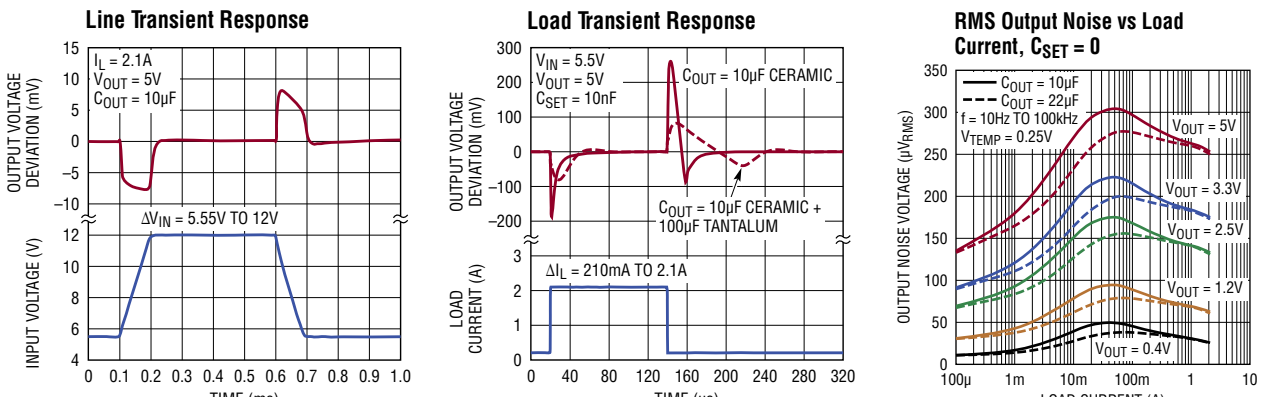


Obrázek 19.23: Vnitřní blokové schéma IO LT3086 (vlevo), základní zapojení pro řízení výstupního napětí (a) a výstupního proudu (b), viz https://www.analog.com/.



Základní statické parametry a vlastnosti stabilizátoru LT3086

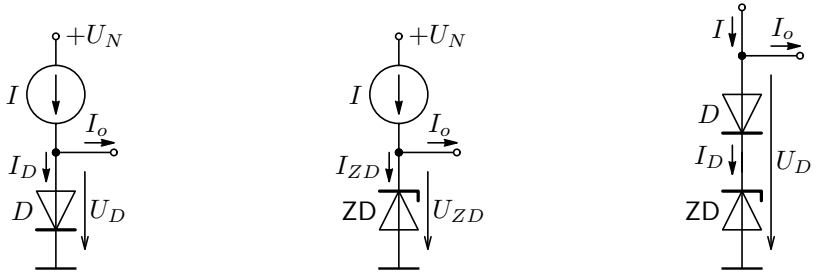
- Rozsah vstupního napětí: $1{,}4\,\mathrm{V}$ až $40\,\mathrm{V}$
- Rozsah výstupního napětí: $0{,}4\,\mathrm{V}$ až $32\,\mathrm{V}$
- Maximální výstupní proud: $2{,}1\,\mathrm{A}$
- Snímání proudu: $I_{\mathrm{MON}} = I_{\mathrm{out}}/1000$
- Přesné nastavení proudového limitu
- Programovatelný teplotní limit
- Paralelní spojení pro $2I_{\mathrm{out}}$
- Napěťová ztráta: $330\,\mathrm{mV}$



Obrázek 19.24: Vybrané dynamické parametry regulátoru LT3086, více viz datasheet.

19.2. Zdroje referenčního napětí

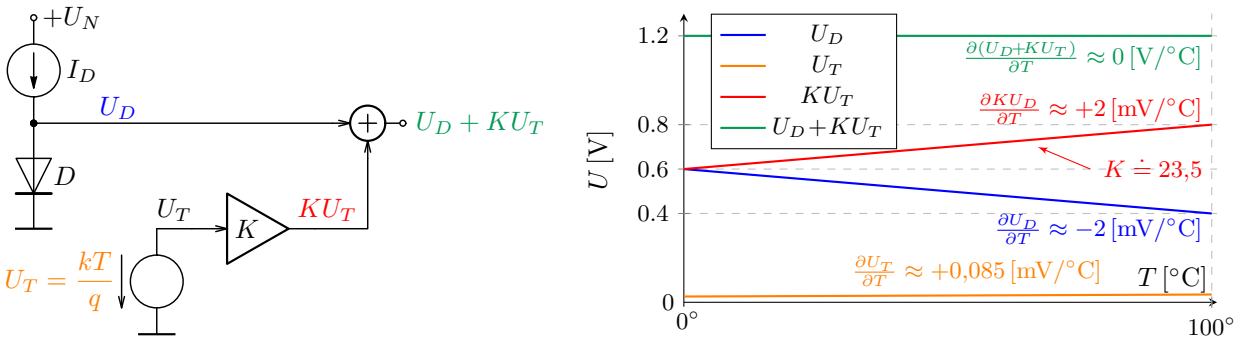
Jako jednoduchou napěťovou referenci lze požít napětí na propustě polarizovaném „křemíkovém“ PN přechodu, viz obrázek 19.25 (a). To je pro malé proudy cca $U_D \approx 0{,}6\,\mathrm{V}$ ($I_D \approx 100\,\mu\mathrm{A}$). Velkou nevýhodou je značná teplotní závislost tohoto napětí: $\alpha_\vartheta = \dfrac{\partial U_D}{\partial T} = -2\,\mathrm{mV/°C}$, viz obrázek 13.7. Další možností je využití Zenerovy diody – obrázek (b). Pro malou teplotní závislost je nutné vol volit $U_{ZD} \approx 6\,\mathrm{V}$, kdy přechází Zenerův průraz na lavinový, případně volit sériovou kombinaci ZD s lavinovým průrazem ($U_{ZD} > 6\,\mathrm{V}$), tj. s kladnou teplotní závislostí napětí a klasické diody se zápornou teplotní závislostí napětí, viz obrázek (c). Nevýhodou těchto řešení je však poměrně vysoké napětí, což je nepoužitelné pro nízkonapěťové obvody.



Obrázek 19.25: Zapojení obvodu referenčního napětí.

19.2.1. Napěťová reference na základě teplotně kompenzovaného PN přechodu (Bandgap)

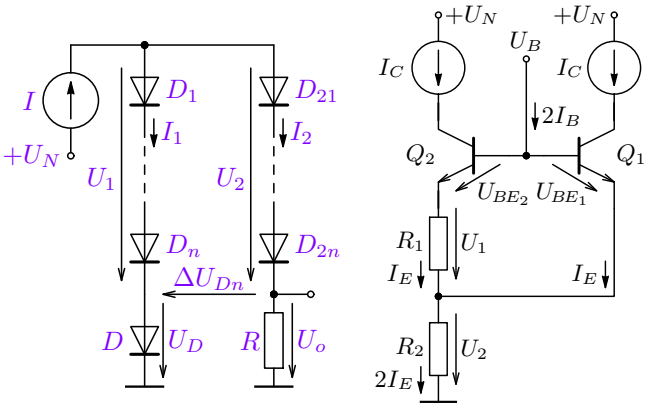
V současných obvodech se prakticky výhradně používá tzv. Bandgap reference. Jedná se o zdroj referenčního napětí, odvozeného z šířky zakázaného pásu, tj. opět napětí na propustně polarizovaném PN přechodu, avšak teplotně kompenzovaném. Princip teplotní kompenzace je uveden na obrázku 19.26. Ten vychází ze součtu dvou napětí s různým znaménkem: napětí na PN přechodu $U_D \approx 0{,}6\,\mathrm{V} - 2\,[\mathrm{mV/°C}]$ a teplotního napětí z (13.1) $U_T \approx +26\,\mathrm{mV} + 0{,}085\,[\mathrm{mV/°C}]$. Pak pro $K = \frac{2}{0{,}085} \doteq 23{,}5$ je $U_D + KU_T \approx 1{,}2\,\mathrm{V} + 0\,[\mathrm{V/°C}]$ **nezávislé na teplotě**.



Obrázek 19.26: Princip teplotní kompenzace napětí tzv. Bandgap reference.

Principiální obvodovou realizaci bandgap reference ukazuje obrázek 19.27 (a). Násobek teplotního napětí je získán jako rozdíl $U_1 - U_2 = \Delta U_{Dn}$. Předpokládejme stejné parametry diod ($I_S, \ldots$), pak s použitím (13.1) plyne:

$$U_o = U_D + \Delta U_{Dn}, \quad U_{1,2} \doteq n U_T \ln \frac{I_{1,2}}{I_S} \;\Rightarrow\; \Delta U_{Dn} = n U_T \ln \frac{I_1}{I_2} = K U_T \;\Rightarrow\; \boxed{K = n \ln \frac{I_1}{I_2}}. \qquad (19.18)$$



Obrázek 19.27: Principiální zapojení Bandgap reference.

Např. pro $n = 7$ a $\frac{I_1}{I_2} = 28{,}7$ je pak $K \doteq 23{,}5$, což vede na kompenzaci teplotního vlivu, viz analýzu.

Potřebu série diod a tím i velkého napájecího napětí lze výhodně řešit zapojením (b), přičemž platí:

$$U_1 = U_{BE_1} - U_{BE_2} = U_T \ln \frac{I_C I_{S2}}{I_C I_{S1}} = U_T \ln \frac{S_2}{S_1},$$

$$U_2 = 2 I_E R_2 = 2 R_2 \frac{U_1}{R_1} = \boxed{U_T \frac{2R_2}{R_1} \ln \frac{S_2}{S_1} = U_T K},$$

$$\boxed{U_B} = U_{BE_1} + U_2 \boxed{= U_{BE_1} + U_T K}, \qquad (19.19)$$

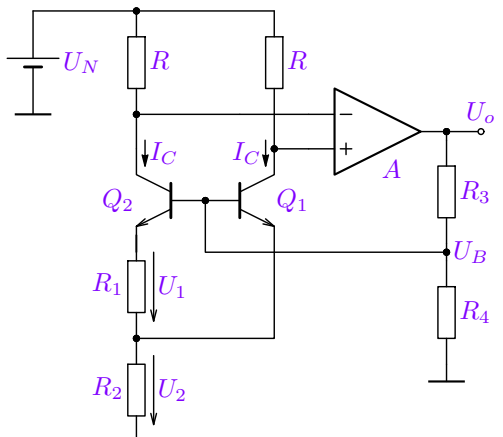
kde S_1, S_2 jsou plochy emitorových přechodů tranzistorů Q_1, Q_2.

Brokaw bandgap

Zapojením 19.27 (b) lze velmi výhodně implementovat princip bandgap reference, přičemž se místo poměrů proudů uplatňuje poměr ploch emitorových přechodů tranzistorů S_2/S_1 a počet diod je zde výhodně nahrazen poměrem rezistorů R_2/R_1. Takové zapojení pracuje i s malým napájecím napětím (např. $U_N = 2\,\mathrm{V}$) a výstupní referenční napětí je cca $1{,}2\,\mathrm{V}$, jak bylo výše uvedeno.

Jedna z možných konkrétních obvodových implementací je uvedena vpravo na obrázku 19.28. Kolektorové proudy I_C tranzistorů jsou nastavovány na stejnou velikost pomocí zesilovače A. Ten minimalizuje rozdíl napětí na kolektorových odporech R a tím udržuje stejné kolektorové proudy. Tranzistory pracují ve zpětné vazbě v zapojení SE, tj. obracejí fázi. Vzhledem k tomu, že stupeň Q_2 pracuje s nižším zesílením (větší emitorový odpor), je jeho výstup zapojen na invertující vstup, aby celkově převážila záporná ZV.

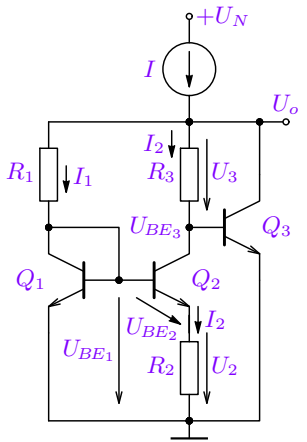
V případě základního zapojení je $R_3 = 0$ a $U_o = U_B \approx 1{,}2\,\mathrm{V}$. Změnou poměru rezistorů lze pak jednoduše měnit/zvyšovat výstupní napětí $U_o = U_B\left(1 + \frac{R_3}{R_4}\right)$, jak se lze přesvědčit analýzou. Dále viz mnohé z vyráběných obvodů – např. AD580, případně LT1790 (včetně vnitřního zapojení) a mnoho dalších.



Obrázek 19.28: Obvodová implementace Brokaw bandgap reference.

Widlar bandgap

Jednoduchou tranzistorovou implementaci Bangap reference ukazuje obrázek 19.29 včetně stručného matematického popisu. Jedním z prvních vyráběných obvodů pak byl IO LM133.



Obrázek 19.29: Obvodová implementace Widlar bandgap reference.

Jako v případě a obrázku 19.27, lze výstupní napětí odvodit ve tvaru $U_{BE} + U_T K$, což při správném nastavení násobící konstanty K vede na jeho teplotní nezávislost:

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{U_{BE_1} - U_{BE_2}}{R_2} = U_T \frac{1}{R_2} \ln \frac{I_1 I_{S2}}{I_{S1} I_2},$$

$$\boxed{U_o} = U_{BE_3} + I_2 R_3 =$$

$$\boxed{= U_{BE_3} + U_T \frac{R_3}{R_2} \ln \frac{I_1 S_2}{I_2 S_1} = U_{BE_3} + U_T K}, \quad (19.20)$$

kde S_1, S_2 jsou opět plochy emitorových přechodů tranzistorů Q_1, Q_2.

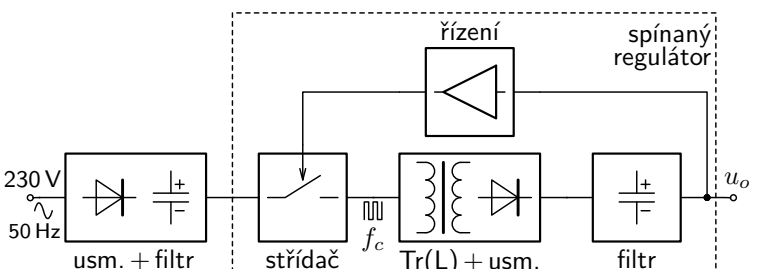
Násobící konstantu K lze tedy nastavit jak poměrem ploch emitorových přechodů tranzistorů Q_1 a Q_2, tak poměrem R_3/R_2 a hodnotou rezistoru R_2, čímž se mění i poměr I_1/I_2, viz analýzu.

19.3. Zdroje se spínanými regulátory

Základní nevýhodou spojitě pracujících regulátorů je jejich malá účinnost pokud je $U_i \gg U_o$ a nutnost platnosti podmínky $U_i > U_o$. Při větších ztrátových výkonech je nutné vzniklé teplo odvést chladičem, viz dodatek M.

19.3.1. Základní uspořádání a vlastnosti spínaného zdroje

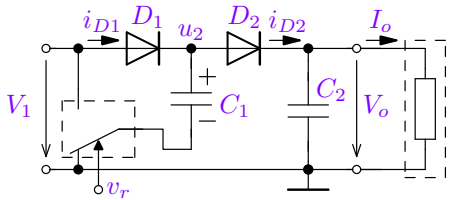
Spínaný regulátor využívá akumulačních schopností induktoru a kapacitoru, které nabíjí ze vstupního zdroje pomocí řízených spínačů, tak aby reguloval výstupní veličinu na požadovanou hodnotu, přičemž umožňuje jak snižovat (vstupní proud je pak obvykle nižší než výstupní!), tak zvyšovat napětí. V ideálním případě neobsahuje rezistivní prvky ⇒ dosahuje velké účinnosti. Při vysokém kmitočtu spínání lze dosáhnout malé rozměry a nízkou hmotnost zdroje. Lze realizovat zdroje napětí i zdroje proudu (vhodné pro buzení LED), ale prakticky nelze realizovat napěťový zdroj s regulovaným proudovým omezením pro ochranu zátěže (laboratorní zdroj).



Obrázek 19.30: Základní uspořádání zdroje se spínaným regulátorem.

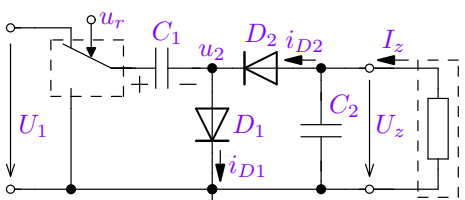
19.3.2. Principy spínaných regulátorů bez induktoru – nábojové pumpy

Princip spínaného regulátoru jako zvyšujícího „DC-DC“ měniče lze vysvětlit na zapojení vpravo: (a) pokud je přepínač v dolní poloze D_1 se otevře a nabije C_1 na napětí cca $U_1 - 0{,}7\,\mathrm{V}$, (b) pokud se přepínač přepne do horní polohy D_1 se uzavře, D_2 se otevře a náboj na C_1 se rozdělí do C_2, tak, že $U_{C_2} \to U_{C_1} - 0{,}7\,\mathrm{V}$. Přepínač je řízen u_r tak, že se periodicky přepíná a v ustáleném stavu bude $U_z \doteq 2U_1 - 1{,}4\,\mathrm{V} \approx 2U_1$.



Obrázek 19.31: Funkce a principiální schéma zapojení zdvojovače napětí (voltage doubler).

Princip spínaného regulátoru ve funkci invertoru – viz zapojení vpravo: (a) pokud je přepínač v horní poloze D_1 se otevře a nabije C_1 na napětí cca $U_1 - 0{,}7\,\mathrm{V}$, (b) pokud se přepínač přepne do dolní polohy D_1 se uzavře, D_2 se otevře a náboj na C_1 se rozdělí do C_2, tak, že $U_{C_2} \to -U_{C_1} + 0{,}7\,\mathrm{V}$. Přepínač je řízen u_r tak, že se periodicky přepíná a v ustáleném stavu bude $U_z \doteq -U_1 + 1{,}4\,\mathrm{V} \approx -U_1$.

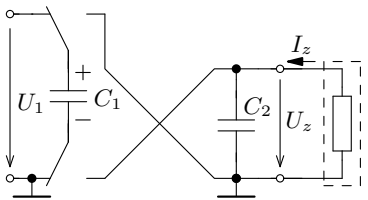


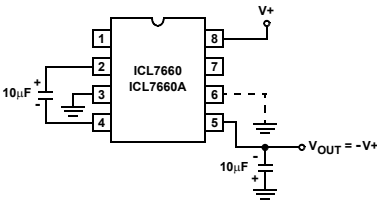
Obrázek 19.32: Principiální schéma zapojení invertoru napětí (charge pump voltage inverter).

Je zřejmé, že zvlnění výstupního napětí U_z roste s I_z a klesá s rostoucím přepínacím kmitočtem a pro nižší sériové odpory (ESR – Equivalent Series Resistance) kondenzátorů.

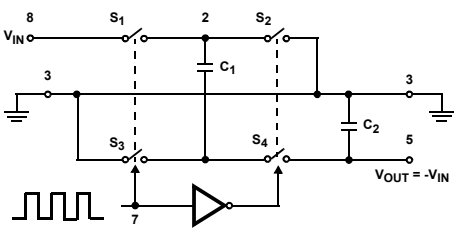
Funkce nábojové pumpy se uplatňuje i u tzv. násobičů napětí., viz odkaz. Princip lze vysledovat z časových průběhů analýzy.

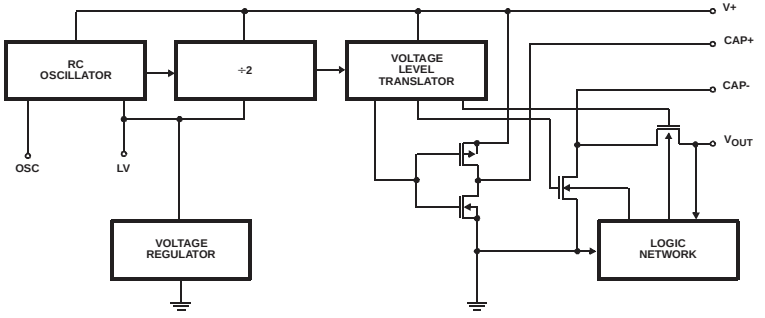
Nábojová pumpa se častěji implementuje bez diod, což zvyšuje účinnost. Diody jsou nahrazeny řízenými spínači s minimálním úbytkem napětí. To však vede na komplikovanější zapojení ⇒ např. integrovaný obvod ICL7660, ve funkci invertoru a další obvody, viz následující strana.



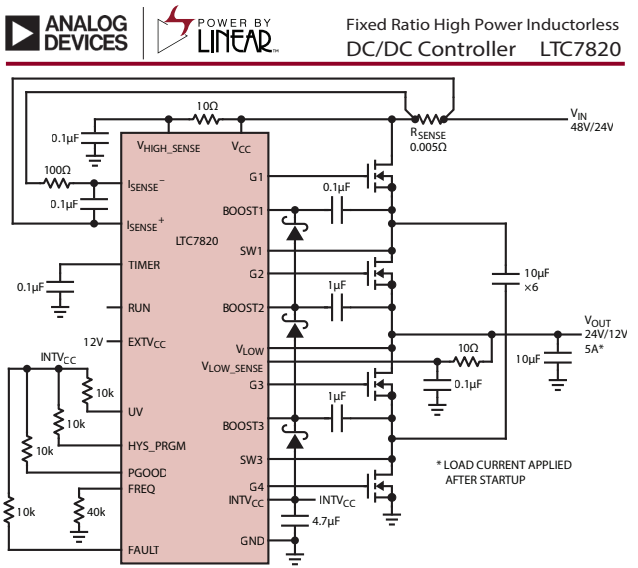


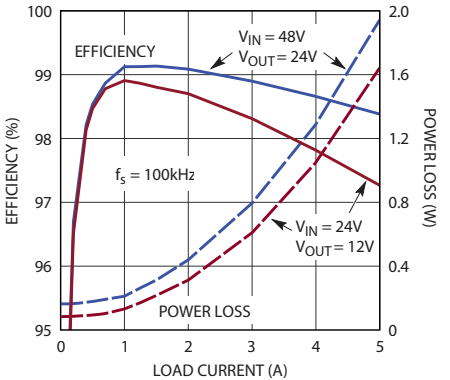
Obrázek 19.33: Princip invertoru napětí se spínači a jeho zapojení s obvodem ICL 7660.





Obrázek 19.34: Principiální schéma a blokové uspořádání obvodu ICL 7660, viz datasheet.





- Napájecí/vstupní napětí $6\,\mathrm{V}$ až $72\,\mathrm{V}$,
- Vysoké proudy, výkon až 500W,
- Spínací kmitočet $100\,\mathrm{kHz}$ až $1\,\mathrm{MHz}$,
- Typické aplikace: napěťový dělič $1/2$, násobič $2\times$ nebo invertor (např. $24\,\mathrm{V} \rightarrow -24\,\mathrm{V}/10\,\mathrm{A}$).

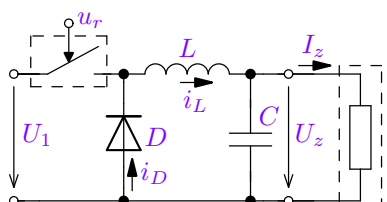
Obrázek 19.35: Zapojení obvodu LTC7820 jako vysoce účinného napěťového děliče $1/2$ na principu nábojové pumpy a jeho účinnost v závislosti na výstupním proudu (převzato z datasheetu).

Nábojové pumpy se široce využívají v integrovaných obvodech, jelikož je lze integrovat v případě velmi nízkých výkonů včetně kapacitorů (např. pro zvýšení napětí pro zápis do Flash pamětí), viz. principiální schéma s analýzou, více J. Marek, dizertační práce FEL ČVUT, 2018. Pro obecné zdroje vykazují řadu nevýhod jako je komplikovaná nebo nemožná obecná volba výstupního napětí – většinou v konkrétních násobcích napětí vstupního $(1/2,\ 2,\ \ldots)$. Pokud využijeme jako akumulační prvek i induktor, lze pak úroveň výstupního napětí jednoduše řídit a regulovat pomocí ZV. Níže jsou představeny principy základních DC-DC měničů a induktorem, které využívají s setrvačnosti induktoru i kapacitoru. Jejich výkonové ztráty (dioda, spínače, ztráty v induktoru) jsou většinou velmi malé a účinnost přesahuje 90%.

19.3.3. Snižující měnič (Buck converter)

Úkolem měniče je změnit velikost vstupního napětí U_1 na konkrétní hodnotu výstupního napětí $U_z < U_1$ při minimálních výkonových ztrátách. Principiální zapojení je uvedeno vpravo. V zásadě se jedná o LC filtr 2. řádu typu LP propouštějící pouze stejnosměrnou složku (průměrnou hodnotu) vstupního napětí, které je „modulováno“ pulzně šířkovou modulací (PWM) periodického signálu u_r, řídícího spínání spínače.

Popis činnosti, ze kterého lze určit hodnoty jednotlivých prvků je uveden dále, případně viz také step-down (buck) DC-DC convertor.



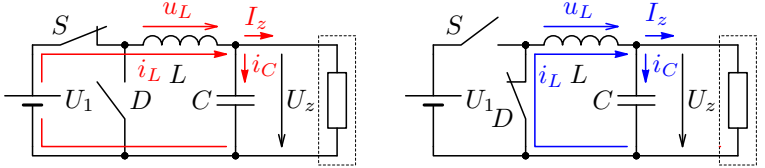
Obrázek 19.36: Principiální schéma zapojení snižujícího měniče napětí.

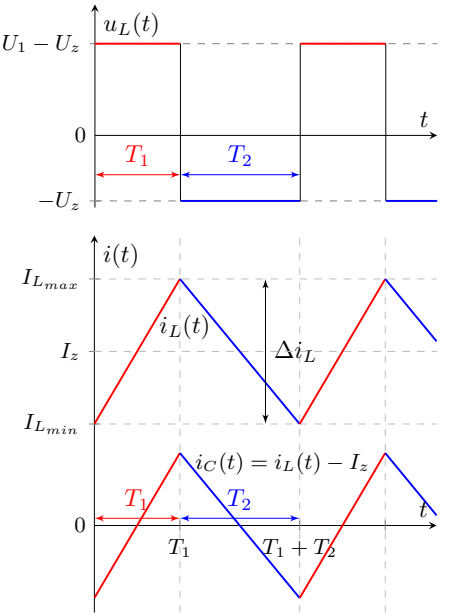
Popis činnosti snižující měniče

Snižující měnič lze popsat dvěma stavy – pro spojený a rozpojený spínač. Tyto stavy jsou uvedeny na následujícím obrázku včetně důležitých obvodových veličin, jejichž časové průběhy jsou uvedeny vpravo.

Nabíjení induktoru (čas T_1)
spínač S sepnutý, D nevodivá

Vybíjení induktoru (čas T_2)
spínač S rozepnutý, D vodivá





Obrázek 19.37: Základní stavy pro popis činnosti snižujícího měniče.

Předpokládejme konstantní výstupní napětí (malé zvlnění, $\Delta u_C \ll U_z$) a $i_L(t) > 0$. Pak pro sepnutý spínač (čas T_1) je na induktoru konstantní napětí $u_L = U_1 - U_z$, ta se nabíjí ($U_1 > U_z$) a její proud $i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t u_L(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ lineárně roste. Při vypnutí spínače se naopak sepne dioda D (čas T_2), na induktoru, který se vybíjí do kapacitoru a zátěže je konstantní napětí $u_L = -U_z$, tj. její proud $i_L(t)$ lineárně klesá, viz časové průběhy vpravo a analýzu.

Základní vztahy pro popis snižujícího měniče

Opět předpokládejme malé zvlnění, tj. $\Delta u_C \ll U_z$, $i_L(t) > 0$ a zanedbatelný (nulový) úbytek na diodě, pak pro ustálený stav platí:

$$\Delta i_L L = (U_1 - U_z)T_1 = U_z T_2 \;\Rightarrow\; \boxed{U_z = U_1 \frac{T_1}{T_1 + T_2} = U_1 D}, \tag{19.21}$$

$$L = (U_1 - U_z)\frac{T_1}{\Delta i_L} = U_z \frac{T_2}{\Delta i_L} \tag{19.22}$$

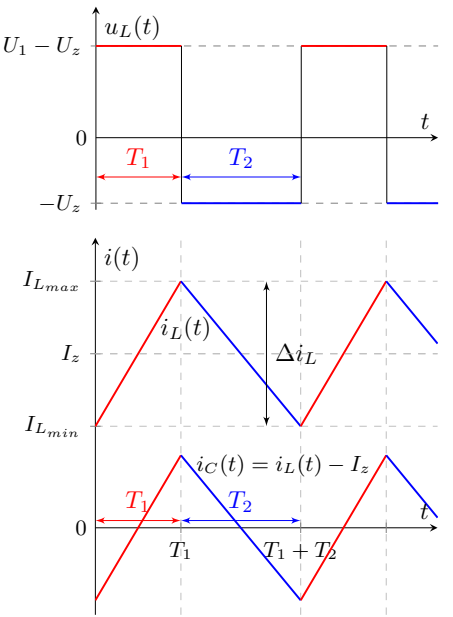
a pro změnu náboje kapacitoru platí:

$$\Delta Q_{C_{T_1}} = \Delta Q_{C_{T_2}} = 0 \;\Rightarrow\; (I_z - I_{L_{min}})\frac{T_1}{2} = (I_{L_{max}} - I_z)\frac{T_1}{2}, \tag{19.23}$$

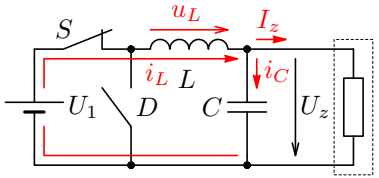
tj. průměrná hodnota $i_L(t)$ je I_z a průměrná hodnota $i_C(t)$ je nulová a tudíž průměrná hodnota U_z je konstantní. Pokud dále předpokládáme účinnost 100 %, tj. výkon a příkon je shodný, je:

$$U_1 I_1 = U_z I_z \Rightarrow \frac{U_z}{U_1} = \frac{I_1}{I_z}, \tag{19.24}$$

což vede na relaci $I_1 < I_z$ nemožnou pro lineární regulátor.



Zvlnění výstupního napětí snižujícího měniče

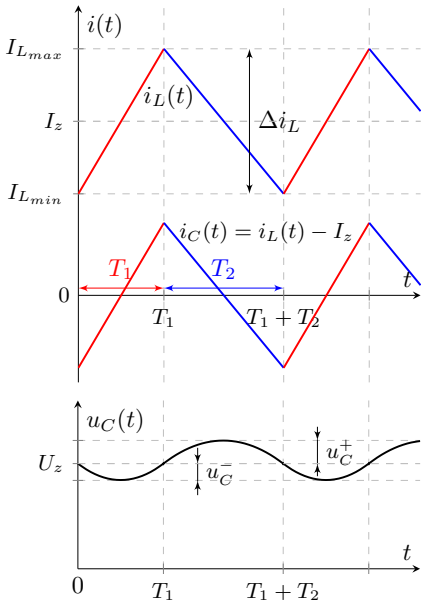


Zvlnění výstupního napětí, resp. časový průběh $u_C(t)$ lze určit integrací $i_C(t) = i_L(t) - I_z$, což vede na části parabol. Pro $t \in \langle 0, T_1 \rangle$ platí níže uvedený vztah, ze kterého lze urči zvlnění Δu_C výstupního napětí. Ověření, viz analýzu.

$$u_C(t) - U_z = \frac{1}{C} \int_0^t \frac{\Delta i_L}{T_1} \left(\tau - \frac{T_1}{2} \right) \mathrm{d}\tau = \frac{\Delta i_L t (t - T_1)}{2 C T_1}, t \in \langle 0, T_1 \rangle \tag{19.25}$$

a pro hodnotu zvlnění napětí ΔU_z platí ($u_C^- = \left| u_C\left(\frac{T_1}{2}\right) - U_z \right|$, ...):

$$\Delta U_z = \Delta u_C = u_C^- + u_C^+ = \frac{\Delta i_L T_1}{8C} + \frac{\Delta i_L T_2}{8C} = \frac{\Delta i_L}{8 f_c C} \tag{19.26}$$



Příklad 19.5

Zadání: Určete střídu spínání, hodnotu induktoru, odběr ze zdroje a hodnotu kapacitoru snižujícího DC-DC měniče, pokud je zadáno vstupní napětí $U_1 = 12\,\mathrm{V}$ požadované výstupní napětí $U_z = 5\,\mathrm{V}$ a proud $I_z = 0{,}1\mathrm{A}$, kmitočet spínání $f_c = 100\,\mathrm{kHz}$ a maximální zvlnění výstupního napětí $\Delta u_C = 40\,\mathrm{mV}$, přičemž změnu proudu induktorem volte $\Delta i_L = I_z/4$.

Řešení: Nejprve určíme střídu, resp. čas sepnutí a rozepnutí spínače. Z (19.21) vyplývá:

$$T_1 = \frac{U_z}{U_1 f_c} \doteq 4{,}2\,\mu\mathrm{s}, \qquad T_2 = \frac{1}{f_c} - T_1 \doteq 5{,}8\,\mu\mathrm{s}.$$

Pro velikost indukčnosti a vstupního proudu platí dle (19.22), resp. (19.24):

$$L = U_z \frac{T_2}{\Delta i_L} = 4U_z \frac{T_2}{I_z} \doteq 1{,}2\,\mathrm{mH}, \qquad I_1 = I_z \frac{U_z}{U_1} \doteq 42\,\mathrm{mA}.$$

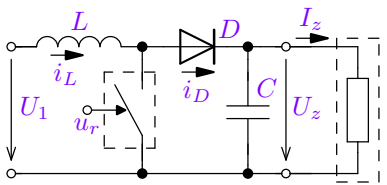
Velikost kapacity volíme z maximálního zvlnění výstupního napětí dle 19.26:

$$C = \frac{\Delta i_L}{8 f_c \Delta u_C} \doteq 0{,}78\,\mu\mathrm{F} \Rightarrow 1\,\mu\mathrm{F}.$$

19.3.4. Zvyšující měnič (Boost converter)

Úkolem měniče je změnit velikost vstupního napětí U_1 na konkrétní hodnotu výstupního napětí tak, aby platilo $U_z > U_1$! při minimálních výkonových ztrátách. Principiální zapojení je uvedeno níže.

Popis činnosti je podobný jako v předchozím případě. Pokud je spínač rozepnut a induktor nemá akumulovanou žádnou energii, tak se kapacitor nabije na $U_z = U_1 - U_D \approx U_1$. Pokud budeme dále spínač periodicky spínat, tak se v první fázi spínač sepne a indukčnost se nabíjí. V druhé fázi se spínač rozepne a proud induktorem teče dle orientace uvedené na obrázku díky akumulované energii a dále nabíjí kapacitor, tj. zvyšuje výstupní napětí $U_z > U_1$. Více viz dále včetně odvození hodnot jednotlivých prvků, případně viz také step-up (boost) DC-DC convertor.

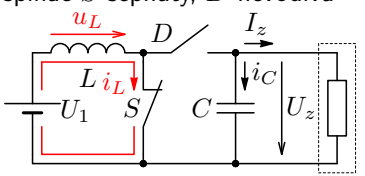


Obrázek 19.38: Principiální schéma zapojení zvyšujícího měniče napětí.

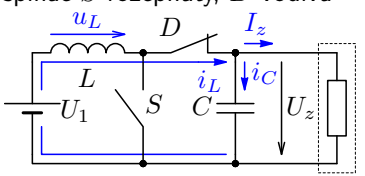
Popis činnosti zvyšujícího měniče

Zvyšující měnič popíšeme opět dvěma stavy – pro spojený a rozpojený spínač, viz následující obrázek s označením důležitých obvodových veličin, jejichž časové průběhy jsou uvedeny vpravo.

Nabíjení induktoru (čas T_1)
spínač S sepnutý, D nevodivá

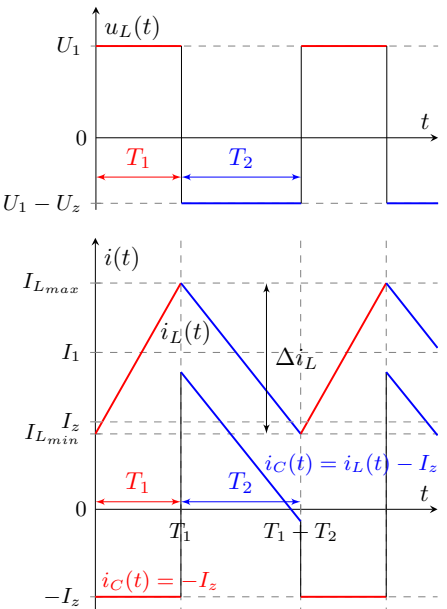


Vybíjení induktoru (čas T_2)
spínač S rozepnutý, D vodivá



Obrázek 19.39: Základní stavy pro popis činnosti zvyšujícího měniče.

Předpokládejme opět konstantní výstupní napětí ($\Delta u_C \ll U_z$) a $i_L(t) > 0$. Pak pro sepnutý spínač (čas T_1) je na induktoru konstantní napětí $u_L = U_1$, ta se nabíjí a její proud $i_L(t)$ lineárně roste. Zátěž je napájena pouze z náboje kapacitoru C. Při vypnutí spínače se naopak sepne dioda D (čas T_2), na induktoru, který se vybíjí do kapacitoru a zátěže je napětí $u_L = U_1 - U_z < 0$, tj. proud $i_L(t)$ lineárně klesá, viz časové průběhy vpravo a analýzu.



Základní vztahy pro popis zvyšujícího měniče

Opět předpokládejme malé zvlnění, tj. $\Delta u_C \ll U_z$, $i_L(t) > 0$ a zanedbatelný (nulový) úbytek na diodě, pak pro ustálený stav platí:

$$\Delta i_L L = U_1 T_1 = -(U_1 - U_z) T_2 \;\Rightarrow\; \boxed{U_z = U_1 \frac{T_1 + T_2}{T_2} = U_1 \frac{1}{f_c T_2}} \tag{19.27}$$

$$L = (U_z - U_1)\frac{T_2}{\Delta i_L} = U_1 \frac{T_1}{\Delta i_L} \tag{19.28}$$

Pokud je U_z konstantní, pak je průměrná hodnota i_C nulová a platí:

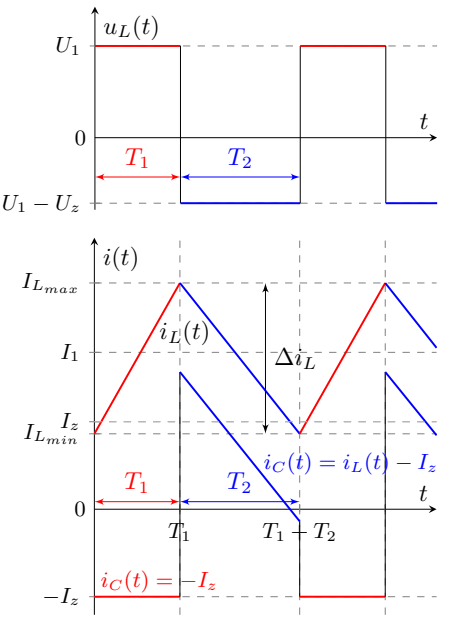
$$\Delta Q_{C_{T_1}} = \Delta Q_{C_{T_2}} \;\Rightarrow\; I_z T_1 = \frac{I_{L_{max}} - I_z + (I_{L_{min}} - I_z)}{2} T_2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; I_{L_{max,min}} = \frac{I_z}{T_2 f_c} \pm \frac{\Delta i_L}{2} = I_1 \pm \frac{\Delta i_L}{2}, \tag{19.29}$$

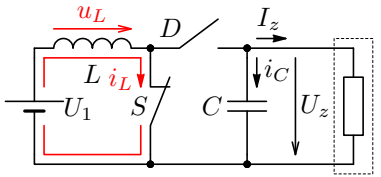
kde I_1 je průměrný proud ze zdroje U_1, (a L), přičemž pro účinnost 100 % platí:

$$U_1 I_1 = U_z I_z \Rightarrow \frac{U_z}{U_1} = \frac{I_1}{I_z}, \tag{19.30}$$

což znamená, že $I_1 > I_z$ i několikanásobně!



Zvlnění výstupního napětí zvyšujícího měniče



Zvlnění výstupního napětí je dáno lineární funkcí pro $t \in \langle 0,\, T_1 \rangle$, kde $i_C(t) = -I_z$ a pro $t \in \langle T_1,\, T_1 + T_2 \rangle$ je pak výstupního napětí určeno integrací $i_C(t) = i_L(t) - I_z$, což vede opět na část paraboly. Ověření, viz analýzu.

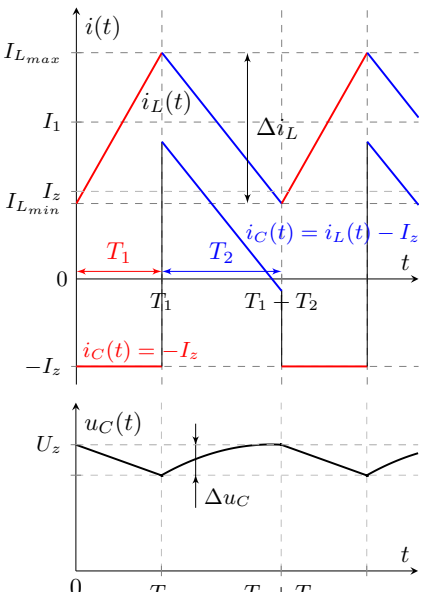
$$u_C(t) = -\frac{I_z t}{C} + U_z \quad \text{pro} \quad t \in \langle 0, T_1 \rangle$$

a pro velikost zvlnění Δu_C platí:

$$\Delta u_C = \frac{I_z T_1}{C}. \tag{19.31}$$

Tzv. činitel zvlnění výstupního napětí je dán:

$$\varphi = \frac{\Delta u_C}{U_z} \cdot 100\,[\%]$$



Příklad 19.6

Zadání: Určete střídu spínání, velikost a hraniční proudy induktoru, odběr ze zdroje a hodnotu kapacitoru zvyšujícího DC-DC měniče, pokud je zadáno vstupní napětí $U_1 = 7\,\mathrm{V}$ požadované výstupní napětí $U_z = 12\,\mathrm{V}$ a proud $I_z = 1\mathrm{A}$, kmitočet spínání $f_c = 100\,\mathrm{kHz}$ a maximální zvlnění výstupního napětí $\Delta u_C = 50\,\mathrm{mV}$, přičemž změnu proudu induktorem volte $\Delta i_L = I_z$.

Řešení: Nejprve určíme střídu, resp. čas sepnutí a rozepnutí spínače. Z (19.27) vyplývá:

$$T_2 = \frac{U_1}{U_z f_c} \doteq 5{,}8\,\mu\mathrm{s}, \qquad T_1 = \frac{1}{f_c} - T_2 \doteq 4{,}2\,\mu\mathrm{s}.$$

Pro velikost indukčnosti dle (19.28), vstupního proudu dle (19.30) a hraniční proudy induktoru dle 19.29 platí:

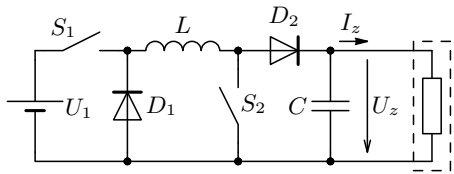
$$L = U_1 \frac{T_1}{\Delta i_L} = U_1 \frac{T_1}{I_z} \doteq 29\,\mu\mathrm{H}, \qquad I_1 = I_z \frac{U_z}{U_1} \doteq 1{,}7\,\mathrm{A}, \qquad I_{L_{min}} \doteq 1{,}2\,\mathrm{A}, \qquad I_{L_{max}} \doteq 2{,}2\,\mathrm{A}.$$

Velikost kapacity volíme z maximálního zvlnění výstupního napětí dle 19.31:

$$C = \frac{I_z T_1}{\Delta u_C} \doteq 83\,\mu\mathrm{F} \Rightarrow 100\,\mu\mathrm{F}.$$

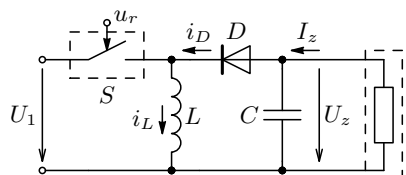
19.3.5. Kombinovaný měnič Buck-Boost, invertor

Princip činnosti Buck-boost měniče: spínače jsou ovládány řídícím obvodem tak, že v případě, že spínač S_2 je rozepnut a S_1 řízen (periodicky spínán), jedná se o snižující měnič jako na obrázku 19.36. V případě, že spínač S_1je sepnut a naopak S_2 je řízen (periodicky spínán), jedná se o vzyšující měnič jako na obrázku 19.38.



Obrázek 19.40: Princip funkce a zapojení Buck-boost měniče.

Princip činnosti DC-DC invertoru napětí s induktorem lze popsat podle obrázku vpravo podobně, jako v případě zvyšujícího měniče. V první fázi spínač sepne a indukčnost se nabíjí. V druhé fázi se spínač rozepne a proud induktorem teče dále dle orientace uvedené na obrázku díky akumulované energii a nabíjí kapacitor tak, že $U_z < 0$.



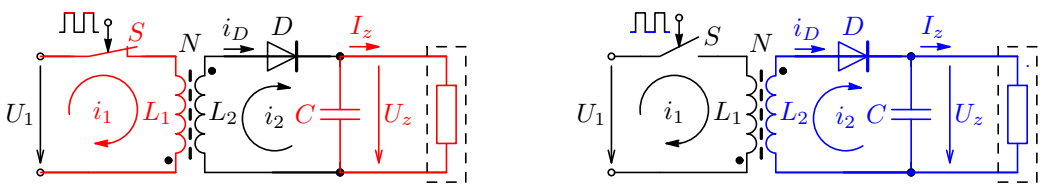
Obrázek 19.41: Princip funkce a zapojení spínaného DC-DC invertoru napětí s induktorem.

Výhody spínaných regulátorů oproti spojitě pracujícím stabilizátorům: • výrazně vyšší účinnost zejména při velkém rozdílu vstupního a výstupního napětí, • lze snižovat i zvyšovat napětí (a to nejenom zapojením Buck-boost , ale i SEPIC regulátoru), • lze měnit i polaritu výstupního napětí, • případně konvertor kombinovat (viz SIBO DC-DC Converter for OLED). Pro řízení měničů lze využít mnoho vyráběných IO. Viz také měření – dodatek O.

19.3.6. Principiální zapojení galvanicky oddělených spínaných měničů

Blokující jednočinný měnič („Flyback“)

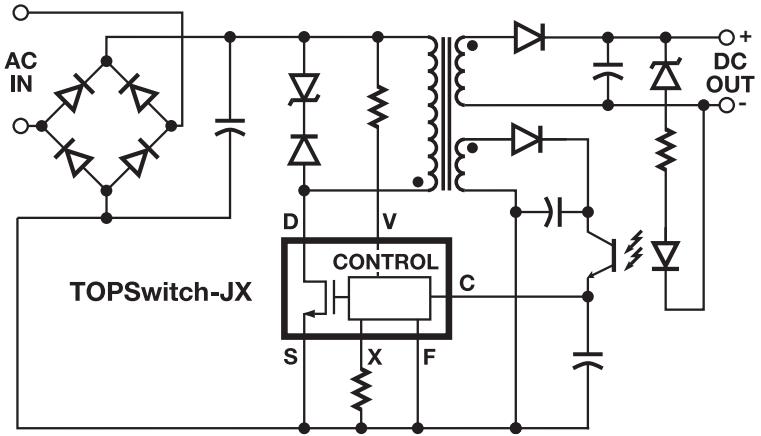
Jedná se o nejjednodušší zapojení galvanicky odděleného měniče. Pracuje prakticky na shodném principu jako invertor uvedený na obrázku 19.41. V tomto případě se při sepnutí spínače S (obrázek 19.42 (a)) akumuluje energie v magnetickém obvodu ($i_1 > 0$) – dioda D je zavřená vzhledem k obrácenému směru sekundárního vinutí, kterým neprochází proud, tj. zátěž je napájena z náboje filtračního kapacitoru C. Při rozpojení spínače (obrázek (b)) se akumulovaná energie odebírá z L_2 proudem i_2, který dobíjí kapacitor a zároveň napájí zátěž. Velikost výstupního napětí je dána střídou spínání $D = \frac{T_1}{T_1+T_2}$ dle (19.22), ale záleží i na převodu $N = \frac{N_1}{N_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$, přičemž poměr závitů pak umožňuje optimalizovat střídu při velkém rozdílu napětí ($U_1 \gg U_2$ nebo i $U_1 \ll U_2$).



Obrázek 19.42: Principiální schéma zapojení měniče typu Flyback.

V případě měniče typu Flyback, ale i Boost a uvedený invertor neprochází výkon přímo ze vstupu na výstup. Nejprve se v první fázi spínání akumuluje výkon, který se v druhé fázi předá zátěži (zdroj výkonu) ⇒ *blokující* měnič. Rozdělením jedné cívky na dvě s magnetickou vazbou je řešeno galvanické oddělení obou obvodů. Spojení akumulačního a oddělujícího prvku je výhodné zejména pro rozměrově malá zařízení (nabíječky, pomocné zdroje), což však omezuje výkonový rozsah, většinou do cca $100\,\mathrm{W}$. Při větších výkonech je problematické tento výkon v nabíjecím cyklu akumulovat (rozměry a magnetické vlastnosti jádra cívky).

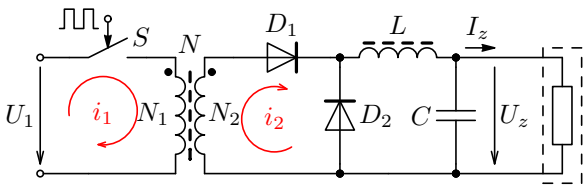
Na obrázku vpravo je uveden příklad jednoduchého řešení spínaného „síťového“ zdroje s řídícím obvodem TOPSwitch. Ten využívá principu akumulace energie a galvanického oddělení výstupního napětí, tj. Flyback. Vzhledem k $f_c \ggg 50\,\mathrm{Hz}$, se dosahuje podstatně menších rozměrů a hmotnosti magnetického obvodu (ferit) při přenosu stejného výkonu magnetickým obvodem pro $50\,\mathrm{Hz}$ (železité plechy).



Obrázek 19.43: Příklad zapojení galvanicky odděleného měniče (Flyback) s řídícím obvodem TOPSwitch, viz datasheet – převzato z https://ac-dc.power.com.

Propustný jednočinný měnič („Forward“)

Tato topologie spínaného měniče je odvozena od měniče Buck z kapitoly 19.3.3 zařazením impulsního transformátoru mezi spínač a zbývající obvod, viz obrázek 19.44.



Obrázek 19.44: Principiální schéma zapojení měniče typu Flyback.

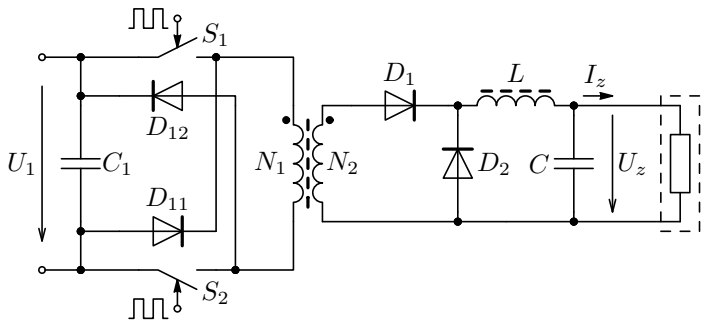
Výhodou této konstrukce oproti měniči Buck je jednak galvanické oddělení a jednak možnost změny výstupního napětí na základě poměru závitů transformátorů. Tím je pak umožněna větší variabilita této změny, jelikož střída je omezena minimálními spínacími časy použitých tranzistorů (ve funkci spínačů).

Pro určení velikosti výstupního napětí ve spojitém režimu a ustáleném stavu lze vyjít ze vztahu (19.21) pro měnič typu Buck. Pro výstupní napětí propustného měniče pak platí vztah (19.32), kde D je zmíněná střída spínání.

$$U_z = U_1 \frac{T_1}{T_1 + T_2} \frac{N_2}{N_1} = U_1 D \frac{N_2}{N_1} \tag{19.32}$$

Magnetický obvod propustného měniče skutečně funguje jako transformátor a na rozdíl od koncepce Flyback neakumuluje v ideálním případě energii. V reálném případě je však nutné zahrnout i reálné parametry transformátoru: rozptylové indukčnosti a magnetizační složku, které postupně akumulují energii. Tu je třeba odvádět, aby se jádro nepřesytilo. Možným řešením je pomocné rekuperační vinutí s diodou, která odvádí tuto energii zpět do obvodu, viz např. zde. V praxi se častěji využívá zapojení se dvěma spínači, které se synchronně spínají v první fázi periody, viz obrázek 19.45. Ve druhé fázi se pak rekuperovaná energie odvede pomocí diod do kapacitoru C_1.

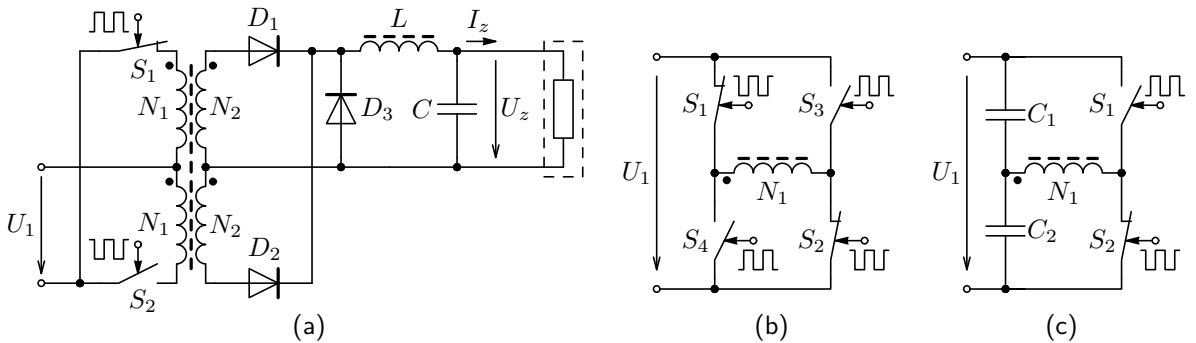
Výhodou této topologie měniče je možnost dosažení vyššího výkonu než je tomu u blokujícího měniče (Flyback) – cca do $500\,\mathrm{W}$. Pro správnou funkci měniče je však nutná výstupní tlumivka. Na výstupní straně je třeba filtrovat průměrnou hodnotu, aby se dalo výstupní napětí řídit pomocí střídy. Bez tlumivky by se výstupní kapacitor nabyl vždy na maximální hodnotu (amplitudu) napětí sekundárního vinutí N_2.



Obrázek 19.45: Zapojení měniče typu Flyback se dvěma spínači pro nulovou střední hodnotu magnetické indukce jádra.

Dvojčinný měnič

Jedná se opět o propustný měnič, ale ve dvojčinném zapojení, tj. přenáší energii v obou spínacích fázích a tím lze využít celý rozsah magnetické indukce jádra ($\pm B$), viz obrázek 19.46. Další výhodou jsou menší velikosti filtračních prvků (L a C), podobně jako u dvoucestného usměrňovače (i zde je možné použít Graetzův můstek).



Obrázek 19.46: Principiální zapojení dvojčinného propustného měniče s děleným primárním vinutí transformátoru, resp. Push-pull (a), jeho buzením typu „plný můstek“ (b) a tzv. „polomůstek“ (c).

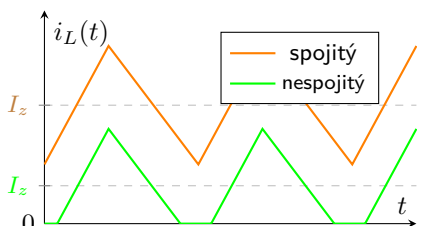
S dvojčinným měnič lze dosáhnout nejvyšších výkonů. Není třena „nulovat jádro“ v případě symetrického buzení, v případě buzení dle (c) ani při ne zcela symetrickém buzení. Více viz [23] nebo L. Havlát, Diplomová práce FEL ČVUT, 2017.

19.3.7. Pracovní režimy měničů a metody regulace

Pracovní režim indukčnosti

Odvození uvedená v podkapitolách 19.3.3 a 19.3.4 platí pro $i_L(t) > 0$, jak bylo uvedeno. Tato podmínka však neplatí vždy a podle toho pak označujeme tzv. pracovní režimy jako:

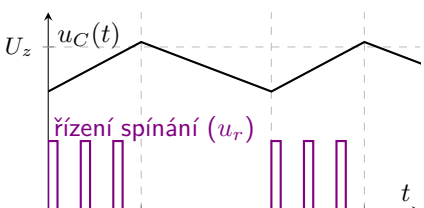
- spojitý, pokud je vždy dodrženo $i_L(t) > 0$ a
- nespojitý, pokud pro určitý rozsah t platí $i_L(t) = 0$.



Pro nespojitý režim (většinou při menších hodnotách induktorů) se samozřejmě příslušně mění výpočetní vztahy, viz např. [23].

Metody regulace

- PWM (Pulse Width Modulation)
  $T = T_1 + T_2 = 1/f_c$ konstantní,
  $D = T_1/T$ (střída) proměnná
- PFM (Pulse Frequency Modulation)
  T_1 nebo T_2 konstantní,
  $T = 1/f_c$ proměnná
- POM (Pulse On/Off modulation)
  $T = 1/f_c$ i D konstantní,
  řízení je povoleno pouze pro $u_C(t) < U_z$, viz ilustraci níže a komentář.



© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

aimtec
Your Power Partner

Series AMSR-78-NZ

Up to7.5Watt | DC-DC Switching Regulator



FEATURES:

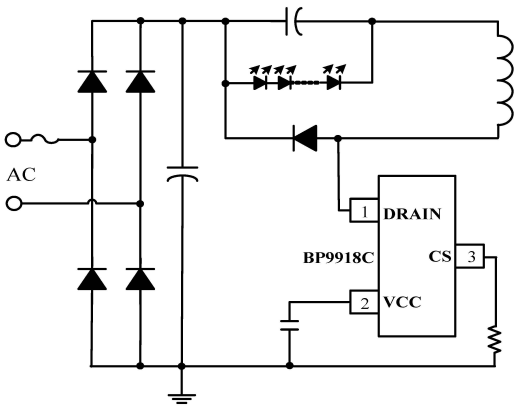
- Short Circuit Protection
- Thermal Shutdown
- Non-Isolated
- Low ripple and noise
- Pin Compatible to LM78xx
- Operating temperature -40°C to +85°C
- Very high efficiency up to 96%
- Pin compatible to multiple manufacturers
- Regulated Outputs

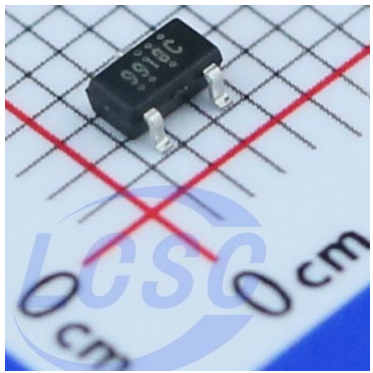
CE RoHS

Models
Single output

Model	Input Voltage (V)	Output Voltage (V)	Output Current max (mA)	Efficiency Vin Min (%)	Efficiency Vin Max (%)
AMSR-783.3-NZ	4.75-28	3.3	500	91	81
AMSR-7805-NZ	6.5-32	5	500	94	86
AMSR-786.5-NZ	8-32	6.5	500	94	87
AMSR-7809-NZ	11-32	9	500	95	91
AMSR-7812-NZ	15-32	12	500	95	92
AMSR-7815-NZ	18-32	15	500	96	93

Obrázek 19.47: Integrovaný spínaný stabilizátor AMSR-78xx: $f_c = 300\,\mathrm{kHz}$, přesnost U_o: $\pm 2\,\% \pm 0{,}02\,\%/°\mathrm{C}$, (převzato z datasheetu), L integrovaná v pouzdře $\Rightarrow$ možná přímá náhrada obvodu LM78xx (obrázek 19.22).





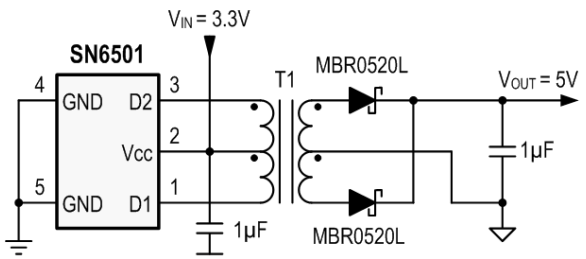


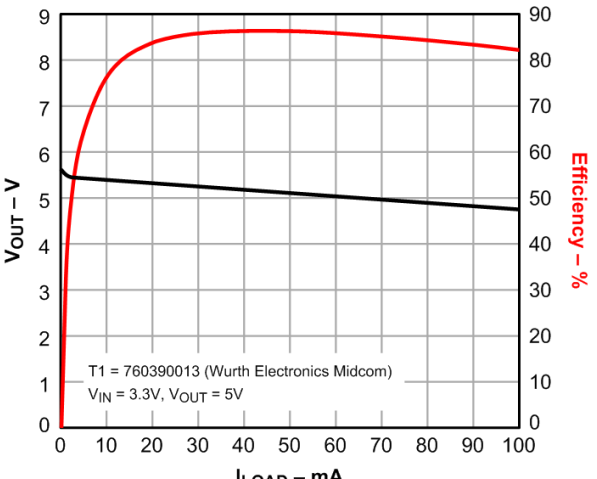
Obrázek 19.48: Neizolovaný snižující měnič BP9918B pro napájení LED ze síťového rozvodu 85 až 265 V_{RMS} (schéma zapojení, pouzdro, použití).

Základní parametry

- Integrovaný MOSFET do $500\,\mathrm{V}$, $300\,\mathrm{mA}$,
- $I_{o_{max}} = 120\,\mathrm{mA}$ pro $U_{\mathrm{LED}} > 15\,\mathrm{V}$,
- Vnitřní napájecí napětí/proud: $7{,}3\,\mathrm{V}/180\,\mu\mathrm{A}$ (max.),
- Výkonová ztráta: 0,3 W,
- Převzato z datasheetu, viz také tento material.

SN6501 Transformer Driver for Isolated Power Supplies





Základní parametry

- Push-Pull Driver pro malé transformátory,
- Napájecí napětí: $3{,}3\,\mathrm{V}$ nebo $5\,\mathrm{V}$,
- Pouzdro: 5-Pin SOT-23
- $f_c \approx 400\,\mathrm{kHz}$

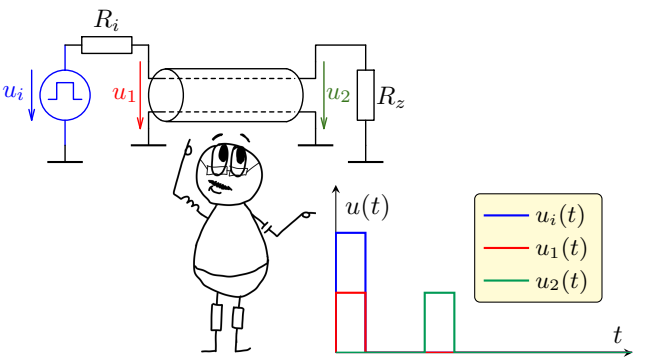
Obrázek 19.49: Zjednodušené zapojení galvanicky odděleného zdroje s řídícím obvodem SN6501 a závislost výstupního napětí a účinnosti na zatěžovacím proudu, převzato z datasheetu.

Poznámky XIX

Kapitola 20

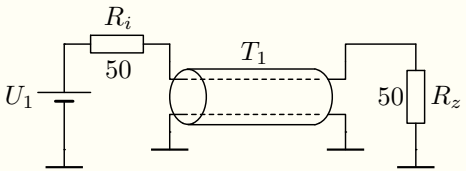
Obvody s rozprostřenými parametry, základní jevy na homogenním vedení

Doposud byly uvažovány pouze obvody se soustředěnými parametry, tj. obvody, kde lze jednoznačně oddělit jednotlivé prvky obvodu jako je rezistor, kapacitor, ... a vodiče. V případě, že je velikost obvodových veličin závislá i na místě jeho snímání, tj. časové změny obvodových jsou porovnatelné s rychlostí šíření signálu po vodičích, je nutné výpočet provést i v závislosti na další proměnné (souřadnici), tj. uvažovat obvody s rozprostřenými parametry. Tato kapitola uzavírá celý materiál právě velmi stručným úvodem do problematiky těchto obvodů.



Motivace

Popis motivačního příkladu: Stejnosměrný zdroj napětí U_1 s vnitřním odporem $R_1 = 50\,\Omega$ je v čase $t = 0$ připojen přes metalické bezeztrátové vedení (odpor vodičů je vůči R_1 zanedbatelný) na odporovou zátěž $R_2 = 50\Omega$. Jaký bude časový průběh napětí u_2 na zátěži? Uvažujte vedení nezanedbatelné délky (např. $100\,\mathrm{m}$ kabelu nebo i „klasický“ USB kabel, případně spoje na DSP pro rychlé DDR paměti).

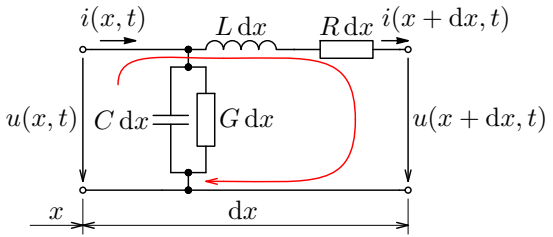


Obrázek 20.1: Příklad obvodu s vedením.

Diskuse:

- Z nabytých poznatků je zřejmé jaké bude napětí na zátěži v ustáleném stavu.
- Ale objeví se ihned po připojení zdroje?
- Obsahuje vedení nějaké akumulační prvky? (poznatky z Fyziky, Maxwellovy rovnice?)
- Jak se situace změní, pokud $R_2 \neq R_1$? $\Longrightarrow$ Na tyto otázky se bude snažit odpovědět tato kapitola.

Jedná se o „obvod“, kde jsou jednotlivé druhy energie elektromagnetického pole spojitě rozprostřeny podél vodičů ⇒ **obvod s rozprostřenými parametry**. Jeho elementární úsek je ilustrován na následujícím obrázku:



Pozor na jednotky $C\,[\mathrm{F/m}]$, ..., proto $C\,\mathrm{d}x\,[\mathrm{F}]$, $L\,\mathrm{d}x\,[\mathrm{H}]$, ...

Obrázek 20.2: Model elementárního úseku homogenního (jeho vlastnosti se v podélném směru nemění) vedení.

Obvodové veličiny jsou jak funkcí času t, tak podélné vzdálenosti (souřadnice x). Popis je pak nutné provést pro obě tyto veličiny. Pro naznačenou smyčku s uzlovými napětími lze psát:

$$-u(x,t) + R\,\mathrm{d}x\,i(x+\mathrm{d}x,t) + L\,\mathrm{d}x\,\frac{\partial i(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial t} + u(x+\mathrm{d}x,t) = 0 \tag{20.1}$$

$$-i(x,t) + i(x+\mathrm{d}x,t) + G\,\mathrm{d}x\,u(x,t) + C\,\mathrm{d}x\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0 \tag{20.2}$$

Úpravou (20.1), (20.2) a uvažováním limity $\mathrm{d}x \to 0$, tj. $\frac{u(x+\mathrm{d}x,t)-u(x,t)}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial u}{\partial x}$ získáme základní rovnice vedení:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = Ri + L\frac{\partial i}{\partial t}, \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = Gu + C\frac{\partial u}{\partial t} \tag{20.3}$$

a jejich další úpravou (derivací a eliminací proměnných) dostáváme

Vlnové rovnice napětí a proudu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (LG+RC)\frac{\partial u}{\partial t} + RGu, \quad \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (LG+RC)\frac{\partial i}{\partial t} + RGi \tag{20.4}$$

Jejich řešení pro obecné průběhy obvodových veličin je komplikované (není plně podporováno ani v běžných numerických simulátorech), nicméně lze je dobře řešit pro harmonické buzení. V dalším textu jsou uvedeny pouze závěry dějů na bezeztrátovém vedení. Více viz např. [4].

Pro **bezeztrátové vedení** platí $R = 0$ a $G = 0$, což je idealizovaný případ, ale pro pochopení dějů na vedení velmi vhodný a v mnoha případech je i dobrou aproximací reálných vedení.
Rovnicím (20.3) a (20.4) vyhovují pro $R = 0$, $G = 0$ libovolné funkce argumentu $x \pm vt$, resp. $t \pm x/v$, kde v je konstanta a t je čas.

Pokud je tedy ve vzdálenosti x a v čase $t = t_0$ napětí na vedení $u_p(x, t_0)$ dáno libovolnou funkcí $u_p(x, t_0) = f_p(x - vt_0) = f_p(x - x_0)$, pak v okamžiku $t = t_0 + \Delta t$ platí $u_p(x, t_0 + \Delta t) = f_p\big(x - v(t_0 + \Delta t)\big) = f_p\big(x - (x_0 + \Delta x)\big) \Rightarrow$ **jedná se o shodné, posunuté funkce, kde místní posun Δx lze vyjádřit časovým posunem $\Delta x = v\Delta t$.**

Parametr $v = \Delta x/\Delta t$ tedy odpovídá rychlosti (šíření) [m/s], pro kterou lze odvodit vztah [4]:

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \mu_0 \epsilon_r \epsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \leq c \tag{20.5}$$

Funkce $f_p(x - vt) = u_p(x, t)$ představuje **postupnou vlnu napětí[a], která se šíří po vedení v kladném směru souřadnice x rychlostí v.**

Podobně bude rovnicím vyhovovat i funkce $f_z(x + vt) = u_z(x, t)$, představující **zpětnou vlnu napětí**, která se šíří po vedení v opačném směru rovněž rychlostí v.

Výsledné napětí na vedení je pak dáno superpozicí (součtem) obou těchto vln.

[a] proto index index p

Vzhledem k tomu, že pro proud platí shodný tvar rovnic, je i jejich řešení a uvedené závěry shodné. Vztah mezi vlnami napětí a proudu lze určit z (20.3) a pro $R = 0$, $G = 0$ pak integrací dostaneme pro proud:

$$i_p = vCf_p(x - vt) = vCu_p = \sqrt{\frac{C}{L}}\, u_p \;\Rightarrow\; u_p = \sqrt{\frac{L}{C}}\, i_p = R_0 i_p, \quad \text{kde} \quad \boxed{R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}\ [\Omega]} \qquad (20.6)$$

R_0 je tzv. **vlnový (charakteristický) odpor bezeztrátového vedení**.

Obdobně pro zpětnou vlnu platí: $u_z = -R_0 i_z$, jelikož $u_z = f_z(x + vt)$. Pozor, $i_z(x,t)$ není proud rezistorem R_2, ale zpětný proud vedením, a to s orientací jako $i(x,t)$ dle 20.2, tj. stejně jako $i_p(x,t)$, proto $u_z = -R_0 i_z$ a proud rezistorem R_2 je pak $i_p + i_z$.

Diskuse: Předpokládejme situaci z obrázku 20.1, kde zdroj napětí má hodnotu $U_1 = 2\,\mathrm{V}$ a $R_0 = R_1 = 50\,\Omega$.

- Bezprostředně po připojení zdroje se v uzlu (1) objeví napětí $1\,\mathrm{V}$, jelikož se zdroji jeví celé vedení jako rezistor o velikosti R_0. Zdroj nemá v tento okamžik informaci o tom, jak je vedení zakončeno!
- Vznikne postupná vlna napětí ($1\,\mathrm{V}$) a proudu ($1/50\,\mathrm{A}$) a ty budou postupovat vedením rychlostí v, která je dána parametry vedení. Dorazí na konec vedení o délce l v čase (se zpožděním) $T_D = l/v$. Tam může vzniknout odražená vlna, která postupuje na začátek vedení přičemž se sčítá s postupnou vlnou. Na začátek vedení dorazí v čase $2T_D$ a teprve v tomto okamžiku se na začátku vedení „dozvíme“ o situaci na konci vedení.

Kdy vzniká odražená vlna a jakou má velikost?

Rozbor tohoto problému pro obecný případ rozhraní dvou různých vedení je uveden např. v [4]. Zde uvedeme jenom závěry, které platí v našem jednoduchém případě.

Pokud postupná vlna dorazí na konec vedení mohou nastat dva případy:

1. $R_2 = R_0$: Nedojde k žádnému odrazu a energie postupné vlny se převede na teplo v zatěžovacím rezistoru.
2. $R_2 \neq R_0$: Dojde k odrazu jak napěťové, tak proudové vlny. Vzhledem k relacím $u_p = R_0 i_p$, $u_z = -R_0 i_z$ a skutečnosti, že na konci vedení se postupná a zpětná vlna začínají sčítat je $u_p + u_z = R_2(i_p + i_z)$ a pro podíl odražené a postupné vlny lze pak odvodit:

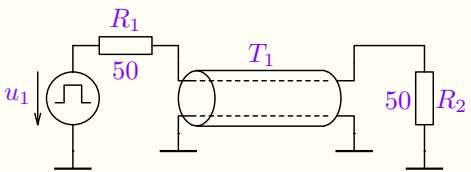
$$\frac{u_z}{u_p} = \frac{R_2 - R_0}{R_0 + R_2} = \rho_u, \quad \frac{i_z}{i_p} = \frac{R_0 - R_2}{R_0 + R_2} = \rho_i \tag{20.7}$$

kde $\rho_u = -\rho_i = \rho$ je tzv. **činitel odrazu**.

Pokud pak odražená vlna dorazí na začátek vedení mohou nastat opět dva případy pro $R_1 = R_0$ a $R_1 \neq R_0$ s analogickými výsledky. Celý postup výpočtu uvedeme na následujícím příkladě.

Příklad 20.1

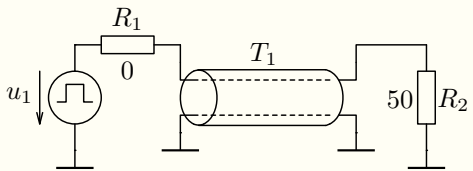
Zadání: Vedení s následujícími parametry: $C = 100\,\mathrm{pF/m}$, $L = 250\,\mathrm{nH/m}$ a délkou $l = 50\,\mathrm{m}$ je vybuzeno pulzem o amplitudě $V_1 = 2\,\mathrm{V}$ a šířce $\tau = 100\,\mathrm{ns}$. Určete časové průběhy napětí a proudu na začátku i konci vedení, pokud je vnitřní odpor budicího zdroje $R_1 = 50\,\Omega$ a pro zatěžovací odpor budeme uvažovat následující případy: (a) $R_2 = R_1 = 50\,\Omega$, (b) $R_2 \to \infty$ (rozpojeno) a (c) $R_2 = 0$ (zkrat).



Řešení: Dosazením do vztahů (20.6) a (20.5) dostaneme $R_0 = \sqrt{L/C} = 50\,\Omega$, $v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2{\cdot}10^8\,[\mathrm{m/s}] = 0{,}\overline{6}\,c$ a odtud zpoždění postupné vlny (pulzu) mezi začátkem a koncem vedení $T_D = l/v = 250\,\mathrm{ns}$. Její velikost bude $u_p = U_1 \frac{R_0}{R_0+R_1} = 1\,\mathrm{V}$. Dle zakončení vedení se postupná vlna napětí (a) neodrazí, (b) odrazí s $\rho_u = 1 = -\rho_i \;\Rightarrow\; u_z = u_p,\ i_z = -i_p$ a (c) odrazí s $\rho_u = -1 = -\rho_i \;\Rightarrow\; u_z = -u_p,\ i_z = i_p$. Časové průběhy viz analýzu včetně komentáře.
Diskuse: Jak se změní výsledky, pokud bude pulz široký $\tau = 1\,\mu\mathrm{s}$, případně pro „DC“ zdroj, kdy $\tau \to \infty$?
Potvrzení experimentem: viz přednáška.

Příklad 20.2 *jako domácí cvičení*

Zadání: V příkladu 20.1 předpokládejte vnitřní odpor budicího zdroje $R_1 = 0$ $(50\,\mathrm{m\Omega})$. Diskutujte, jak se změní výsledky v případech: (a) a (b), pokud ostatní parametry zůstanou nezměněny. Neuvažujte případ (c): $R_2 = 0$. Výsledky ověřte simulací.



Analýza: Využijte stejný odkaz, kde nastavte $R_1 = 50\,\mathrm{m\Omega}$ a $R_2 = 50\,\Omega$ (případně 50Meg) a mimo vln napětí zobrazte i časové vlny proudů na začátku a konci vedení (proudy rezistory R_1 a R_2)[a].
Experiment: Experiment nelze provést s „klasickým“ generátorem, jelikož jeho vnitřní odpor je $50\,\Omega$. Mezi generátor a vedení bychom museli zařadit např. invertor, jehož výstupní odpor může být menší než $1\,\Omega$ – záleží na použitých tranzistorech (jejich odporu v sepnutém stavu).

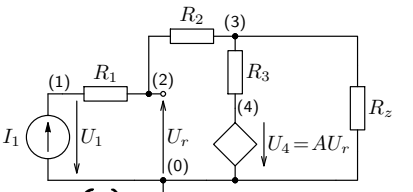
[a] Neberte v úvahu úzké špičky (peaky), které jsou dány nedokonalostmi numerické simulace.

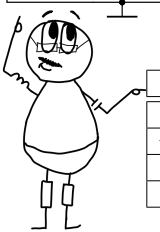
Poznámky XX

Dodatek A

Algoritmizace analýz elektrických obvodů

Tento dodatek je věnován maticovému zápisu obvodových rovnic, který je vhodný počítačové zpracování. Volně navazuje na kapitoly 3, přičemž využívá znalosti dalších kapitol (1, 7 a 10). Obvodové rovnice se však nesestavují a popis se tvoří z topologie obvodu, takzvaného netlistu, přímým zápisem jednotlivých prvků do matice soustavy. Uživatel se seznámí jednak s tvorbou vlastní matice – maticového popisu obvodu, jednak s výpočtem obvodových veličin a charakteristických obvodových parametrů. Použití odvozených pravidel a algoritmů je ukázáno v závěru na řešení jednoduchých příkladů.

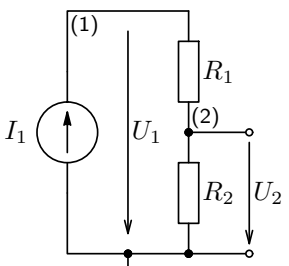




U_1	U_2	U_3	U_4	
G_1	$-G_1$	0	0	I_1
$-G_1$	G_1+G_2	$-G_2$	0	0
0	$-G_2$	$G_2+G_3+G_z$	$-G_3$	0
0	$-A$	0	-1	0

A.1. Textový zápis topologie obvodu a algoritmizace jeho matematického popisu

Simulační programy používají pro zápis topologie obvodů dobře definovaný textový formát – **netlist**. A to i v případě grafických editorů schémat, ze kterých se pro potřeby analýzy tento popis generuje, viz obrázek A.1.




```
I1 0 1 dc 10m ac 1m sin 0 5m 10k
R1 1 2 1k
R2 2 0 600
```

Obrázek A.1: Elementární odporový obvod a textový jeho topologie, tzv. netlist.

Ze zápisu je zřejmá souvislost mezi popisem a obvodovou reprezentací. Pozor, u nezávislých zdrojů se udává hodnota pro DC, AC i tranzientní analýzu. Podrobnější syntaxe zápisu těchto a dalších prvků je např. v manuálu (Ngspice), případně jeho html verzi. Netlist může obsahovat i příkazy pro provádění analýz v daném programu. V tomto textu se však změříme na algoritmizaci analýz základních lineárních obvodů.

A.2. Sestavení matice spojitě pracujícího obvodu

Pro matematický popis vztahů mezi obvodovými veličinami se vždy používá metoda uzlových napětí (viz kapitola 3.1). Je to dáno její snadnější algoritmizací a minimem výjimek. Základní rovnice klasické metody pro popis lineárního obvodu lze vyjádřit následujícím způsobem:
Klasická metoda uzlových napětí vychází z 1. Kirchhoffova zákona a její maticové vyjádření se často používá pro „počítačové“ řešení elektrických lineárních obvodů.Její vyjádření uvádějí rovnice (A.1).

$$\mathbf{Y} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{I}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{U} = \mathbf{Y}^{-1} \cdot \mathbf{I} \tag{A.1}$$

kde $\mathbf{Y}$ je admitanční matice soustavy (lineárního obvodu),
$\mathbf{U}$ je vektor neznámých uzlových napětí a
$\mathbf{I}$ je vektor všech budících proudů do jednotlivých uzlů soustavy.

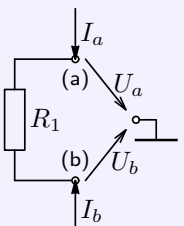
Řešením můžeme potom získat jakékoliv uzlové napětí u_k, jestliže známe všechny budící proudy i_j podle následující rovnice (A.2)

$$u_k = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^{n} \Delta_{jk} i_j, \quad \text{kde } \Delta, \text{ resp. } \Delta_{jk} \text{ je determinant, resp. příslušný subdeterminant matice } \mathbf{Y}. \tag{A.2}$$

Nevýhodou této metody je především nemožnost popisu obvodu obsahujícího řízené zdroje (kromě zdroje proudu řízeného napětím) a napěťové zdroje. Dále je to nemožnost řešením daných rovnic určit proudy jednotlivých větví.

A.2.1. Zařazení rezistoru (R) do admitanční matice obvodu

Pravidlo A.1 *Zařazení rezistoru do matice obvodu*



Neuzemněný rezistor R_1 mezi uzly (a), (b) s uzlovými napětími U_a, U_b, do kterých jsou připojeny budicí zdroje proudu I_a, I_b lze popsat uvedenou soustavou rovnic, jejím maticovým zápisem a z něho vyplývajícím pravidlem pro zařazení rezistoru:

$$(U_a - U_b)G_1 = I_a$$
$$(-U_a + U_b)G_1 = I_b$$
$$\text{kde} \quad G_1 = \frac{1}{R_1}$$

$$\begin{array}{c} \\ \text{(a)} \\ \text{(b)} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{(a)} & \text{(b)} \end{array} \\ \begin{bmatrix} G_1 & -G_1 \\ -G_1 & G_1 \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix}$$

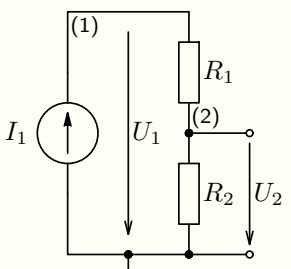
Zařazení R: Do matice obvodu přičteme na hlavní diagonále vodivost odporu v pozicích odpovídajícím uzlům, ve kterých je zapojen, tj. pozice (a)-(a) a (b)-(b). Dále odečteme vodivost odporu v pozicích odpovídajícím uzlům, mezi kterými je zapojen, tj. pozice (a)-(b) a (b)-(a). Jinými slovy k matici obvodu přičteme v odpovídajících uzlech následující matici:

	U_a	U_b	
U_a	G_1	$-G_1$	I_a
U_b	$-G_1$	G_1	I_b

Pokud je odpor jednou svorkou uzemněn bude se k matici přičítat pouze jeden prvek daný vodivostí odporu, a to na hlavní diagonále v pozici odpovídající neuzemněnému uzlu, ke kterému je druhou svorkou připojen.

Sestavení matice ukážeme na příkladu elementárního obvodu z obrázku A.1

Příklad A.1 *Matice odporového děliče napětí*



Zadání: Sestavte matici obvodu dle obrázku vlevo a z ní určete pomocí vztahu (A.2) velikost uzlových napětí U_1 a U_2.

Řešení: Na základě pravidla A.1 lze výslednou matici včetně vektoru uzlových napětí a budících proudů zapsat ve tvaru:

$$\begin{bmatrix} G_1 & -G_1 \\ -G_1 & G_1+G_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

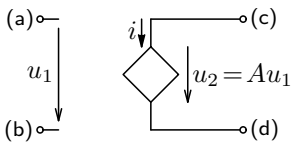
Uzlová napětí určíme dle vztahu (A.2). Vzhledem k buzení pouze do uzlu 1 proudem I_1, tj. $I_2 = 0$ pak dostaneme:

$$U_1 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} I_1 = \frac{G_1+G_2}{G_1 G_2} I_1 = (R_1+R_2) I_1, \qquad U_2 = \frac{\Delta_{12}}{\Delta} I_1 = \frac{-G_1 \cdot (-1)^3}{G_1 G_2} I_1 = \frac{I_1}{G_2} = I_1 R_2.$$

Dále jsou odvozeny pravidla pro zařazení dalších lineárních prvků (i řízených zdrojů) do matice obvodu.

A.2.2. Zařazení napětím řízeného zdroje napětí (VCVS)

Zdroj lze popsat níže uvedenými rovnicemi, převedenými do maticového zápisu. Přidanou proměnnou je proud i. Pokud jeho výpočet nepožadujeme, matici lze redukovat (součet pátého sloupce je nulový): přičíst 3. řádek ke 4. a na místo 3. řádku lze posunout řádek pátý. Nulový 5. sloupec potom vypustíme a získáme opět matici 4×4, čímž ale nelze přímo vypočítat proud i. Vypuštěním původního řádku 3 (pravá strana je nulová), nelze budit přímo do tohoto uzlu (c). Nicméně buzení do uzlu (d) je identické jako buzení do uzlu (c), I_d přejde redukcí na $I_c + I_d$.



$$(u_a - u_b)A - (u_c - u_d) = 0$$
$$i_c = i, \quad i_d = -i$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} & & & & 1 \\ & & & & -1 \\ \hline A & -A & -1 & 1 & \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} u_a \\ u_b \\ u_c \\ u_d \\ \hline i \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_d \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

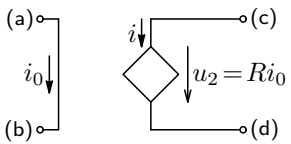
Pravidlo A.2 *Zařazení napětím řízeného zdroje napětí do matice obvodu*

Zařazení VCVS: V matici obvodu přičteme řádek odpovídající uzlu (c) k řádku odpovídajícímu uzlu (d), řádek (c) potom vynulujeme. K takto vzniklé matici přičteme v odpovídajících uzlech následující matici:

u_a	u_b	u_c	u_d	
				I_a
				I_b
A	$-A$	-1	1	0
				I_d

A.2.3. Zařazení proudem řízeného zdroje napětí (CCVS)

Zdroj lze obdobně popsat rovnicemi a převést do maticového zápisu, který lze následně redukovat: přičíst 3. řádek ke 4. a na místo 3. řádku posunout řádek šestý. Dále lze přičíst 1. sloupec ke 2., na místo 1. sloupce posunout 5. sloupec. a nulový 6. sloupec a 5. řádek vypustit. Získáme opět matici 4×4, přičemž lze formulovat pravidlo pro zařazení tohoto zdroje do matice obvodu.



$$u_a - u_b = 0,$$
$$u_c - u_d - Ri_0 = 0$$
$$i_a = i_0,\ i_b = -i_0,$$
$$i_c = i,\ i_d = -i$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} & & & & 1 \\ & & & & -1 \\ & & & & & 1 \\ & & & & & -1 \\ \hline 1 & -1 & & & \\ & & 1 & -1 & & -R \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} u_a \\ u_b \\ u_c \\ u_d \\ \hline i_0 \\ i \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_d \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right]$$

Pravidlo A.3 *Zařazení proudem řízeného zdroje napětí do matice obvodu*

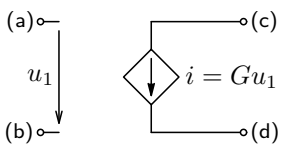
Zařazení CCVS: Přičteme řádek odpovídající uzlu (c) k řádku odpovídajícímu uzlu (d) a dále přičteme sloupec odpovídající napětí u_a, tj. (a) ke sloupci odpovídajícímu napětí u_b. Sloupec (a) a řádek (c) potom vynulujeme. K takto vzniklé matici přičteme v odpovídajících uzlech následující matici:

i_0	u_b	u_c	u_d	
1				I_a
-1				I_b
$-R$		1	-1	0
				I_d

Redukcí matice opět ztrácíme možnost přímého buzení do uzlu (c). Dále je buzení do uzlu (a) proudem I_a shodné s buzením do uzlu (b) proudem I_b, jelikož jsou uzly (a) a (b) zkratovány. Redukcí se také ruší napětí u_a, které je shodné s napětím u_b a místo uzlového napětí u_a lze přímo vypočítat řídící proud i_0.

A.2.4. Zařazení napětím řízeného zdroje proudu (VCCS)

Převodní konstanta tohoto zdroje má fyzikální jednotku [S], tj. lze ji zapsat přímo do admitanční matice obvodu, podobně jako odpor (vodivost). Pravidlo pro zařazení napětím řízeného zdroje proudu lze formulovat následujícím způsobem:



$$(u_a - u_b)G = i,$$
$$i_c = i,\ i_d = -i$$

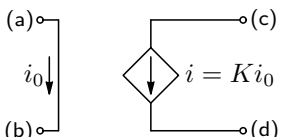
Pravidlo A.4 *Zařazení napětím řízeného zdroje proudu do matice obvodu*

Zařazení VCCS: K matici obvodu přičteme v odpovídajících uzlech následující matici:

u_a	u_b	u_c	u_d	
				I_a
				I_b
G	$-G$			I_c
$-G$	G			I_d

A.2.5. Zařazení proudem řízeného zdroje proudu (CCCS)

Obdobně jako v předchozích případech lze zdroj popsat rovnicemi a ty převést do maticového zápisu, který lze následně redukovat: přičíst 1. sloupec ke druhému. První sloupec lze zrušit a na jeho místo posunout sloupec 5. Stejně jako v případě A.2.3 je buzení do uzlu (a) shodné s buzením do uzlu (b) a místo uzlového napětí u_a, které je shodné s napětím u_b lze přímo vypočítat řídící proud i_0. Pravidlo pro zařazení tohoto zdroje do matice obvodu lze formulovat níže uvedeným způsobem.



$$u_a - u_b = 0, \quad i = Ki_0$$
$$i_a = i_0,\ i_b = -i_0,$$
$$i_c = i,\ i_d = -i$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} & & & & 1 \\ & & & & -1 \\ & & & & K \\ & & & & -K \\ \hline 1 & -1 & & & \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} u_a \\ u_b \\ u_c \\ u_d \\ \hline i_0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} I_{0a} \\ I_{0b} \\ I_{0c} \\ I_{0d} \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

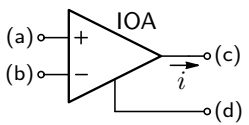
Pravidlo A.5 *Zařazení proudem řízeného zdroje proudu do matice obvodu*

Zařazení CCCS: Přičteme sloupec odpovídající napětí u_a, tj. sloupec (a), ke sloupci odpovídajícímu napětí u_b, tj. (b). Sloupec (a) potom vynulujeme. K takto vzniklé matici přičteme v odpovídajících uzlech následující matici: :

i_0	u_b	u_c	u_d	
1				I_a
-1				I_b
K				I_c
$-K$				I_d

A.2.6. Zařazení ideálního operačního zesilovače (IOZ)

Ideální operační zesilovač lze modelovat pomocí zdroje VCVS se ziskem $A \to \infty$. **Při zavedené a převládající ZZV** je rozdíl vstupních napětí $u_a - u_b = 0$ a nerozlišujeme už ani jednotlivé vstupy (invertující/neinvertující). Matici lze pak redukovat, podobně jako u zdrojů řízených proudem. Jestliže není třeba vypočítat proud i, lze matici zredukovat podle uvedeného pravidla.



$$u_a - u_b = 0$$
$$i_c = -i, \quad i_d = i$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} & & & -1 \\ & & & 1 \\ \hline 1 & -1 & & \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} u_a \\ u_b \\ u_c \\ u_d \\ \hline i \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_d \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

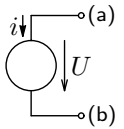
Pravidlo A.6 *Zařazení ideálního operačního zesilovače se* ***zavedenou ZZV*** *do matice obvodu*

Zařazení IOZ: Přičteme řádek odpovídající uzlu (c) k řádku odpovídající uzlu (d) a dále přičteme sloupec odpovídající napětí u_a, tj. (a) ke sloupci odpovídajícímu napětí u_b. Sloupec (a) a řádek (c) vynulujeme, resp. vypustíme, pokud není třeba vypočítat přímo proud i.

Tím opět ztrácíme možnost buzení přímo do uzlu (c). Ve většině zapojení je navíc uzel (d) uzlem referenčním. Potom vypustíme sloupec i řádek (d), resp. je vůbec nesestavujeme stejně jako u uzemněného rezistoru. Zde bychom dostali tedy matici 2×2, přičemž proměnné by byly v pořadí $u_a = u_b$, u_c.

A.2.7. Zařazení nezávislého napěťového zdroje (V)

Zde nelze redukovat první sloupec (přičtením k druhému sloupci) a tím i poslední řádek, protože pravá strana tohoto „řádku“ není nulová. Jestliže však nepotřebujeme vypočítat přímo proud i, lze matici redukovat podobně jako v předchozích případech, tj. přičíst 1. řádek k druhému. První řádek lze vypustit a na jeho místo posunout řádek 3. Tím opět ztrácíme možnost buzení přímo do uzlu (a), což je však pro proměnné obvodu (mimo proud i) ekvivalentní s buzením do uzlu (b). Pravidlo pro zařazení nezávislého napěťového zdroj je pak formulováno níže.



$$u_a - u_b = U$$
$$I_a = i, \quad I_b = -i$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} & & 1 \\ & & -1 \\ \hline 1 & -1 & \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} u_a \\ u_b \\ \hline i \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} I_a \\ I_b \\ \hline U \end{array}\right] \qquad \text{(A.3)}$$

Pravidlo A.7 *Zařazení nezávislého zdroje napětí do matice obvodu*

Zařazení V: Přičteme řádek odpovídající uzlu (a) k řádku odpovídajícímu uzlu (b) a řádek (a) potom vynulujeme. K takto vzniklé matici přičteme v odpovídajících uzlech následující matici:

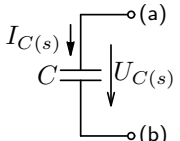
u_a	u_b	
1	−1	U
		I_b

V případě **zkratu** dvou uzlů lze redukovat i sloupec (a), jelikož $\mathbf{U=0}$. Pro přímý výpočet proudu i neredukujeme odpovídající sloupec, ale přičteme sloupec (b) ke sloupci (a) a sloupec (b) vynulujeme. K takto vzniklé matici přičteme následující matici, přičemž místo proměnné u_b je nyní i:

u_a	i	
	1	I_a
	−1	I_b

A.2.8. Zařazení kapacitoru (C) do matice obvodu

Zařazení akumulačních prvků L a C do matice obvodu je analogické algoritmu pro rezistor, ale zde je navíc dodat funkci derivace či integrace, což lze v případě lineárních obvodů řešit operátorovým počtem. Místo vodivosti pak uvažujeme obrazovou admitanci kapacitoru Cs a pro nenulové počáteční podmínky náhradní zapojení pro operátorovou analýzu z obrázku 7.10 (b). Kapacitor C dle obrázku níže lze dle popsat soustavou rovnic dle vztahů (7.20), resp. maticovým zápisem a z něho pak vyplývajícím pravidlem pro zařazení:



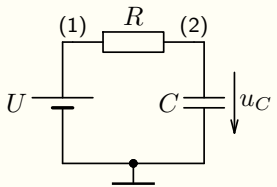
$$\begin{array}{c} \\ \text{(a)} \\ \text{(b)} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{(a)} & \text{(b)} \end{array} \\ \begin{bmatrix} sC & -sC \\ -sC & sC \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{bmatrix} U_a(s) \\ U_b(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_a(s) + Cu_C(0) \\ I_b(s) - Cu_C(0) \end{bmatrix}$$

Pravidlo A.8 *Zařazení kapacitoru do matice obvodu*

Zařazení C: Obrazovou admitanci kapacitoru přičteme do matice obvodu na hlavní diagonále v pozicích odpovídajícím uzlům, ve kterých je zapojen a odečteme ji v pozicích odpovídajícím uzlům, mezi kterými je zapojen. Dále k budicím proudům přičteme, resp. odečteme počáteční podmínku dle maticového zápisu vpravo:

$U_a(s)$	$U_b(s)$	
sC	$-sC$	$I_a(s) + Cu_C(0)$
$-sC$	sC	$I_b(s) - Cu_C(0)$

Příklad A.2 *Analýza integračního RC článku*



Zadání: Sestavte matici obvodu pro obvod vlevo a z ní určete Laplaceův obraz napětí $U_2(s)$ a z něho časovou funkci $u_2(t)$ pro $t \geq 0$, pokud je obvod buzen stejnosměrným napětím U a kapacitor byl pro $t \leq 0$ nabyt na $u_C(0)$.

Řešení: Na základě pravidla A.8 sestavíme nejprve matici obvodu bez zdroje U (maticový zápis vlevo) a poté uplatníme pravidlo A.7 a dostaneme výslednou matici vpravo, včetně vektoru uzlových napětí a budících proudů. Uzel (b) kapacitoru i napěťového zdroje je nyní referenční (vypouští/nesestavuje se).

$U_1(s)$	$U_2(s)$	
G	$-G$	0
$-G$	$G+sC$	$Cu_C(0)$

zařazení U $\longrightarrow$

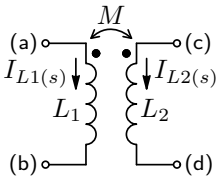
$U_1(s)$	$U_2(s)$	
1	0	$\frac{U}{s}$
$-G$	$G+sC$	$Cu_C(0)$

Požadovaný obraz napětí $U_2(s)$ určíme dle vztahu (A.2) a aplikací zpětné Laplaceovy transformace dostaneme požadovanou časovou funkci $u_2(t)$ pro $t \geq 0$:

$$U_2(s) = \frac{\Delta_{12}}{\Delta}\frac{U}{s} + \frac{\Delta_{22}}{\Delta}Cu_C(0) = \frac{U}{s} - C\frac{U-u_C(0)}{Cs+G} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} u_2(t) = U + \big(u_C(0)-U\big)\mathrm{e}^{\frac{-t}{RC}}, \text{ kde } R = \frac{1}{G}$$

A.2.9. Zařazení induktoru (L) do matice obvodu

Podobně jako kapacitor lze popsat i induktor a jeho zařazení do matice obvodu. Opět lze využít náhradní zapojení operátorové analýzy dle obrázku 7.10 (c), které vychází ze vztahů (7.21). V případě vázaných induktorů je pak nutné do rovnic zařadit příspěvky od vázaných částí. vzhledem k použité metodě uzlových napětí, je třeba pracovat s tzv. inverzními indukčnostmi Γ, které byly zavedeny vztahy (1.28) a (1.29). Další možností, zejména pro reálné simulace, je použití modelu transformátoru z obrázku 1.18. Pro induktory se vzájemnou vazbou dle níže uvedeného obrázku lze pak vyjádřit vztahy mezi obvodovými veličinami a uvést pravidlo pro zařazení induktoru do obvodové matice:



$$\Gamma_1 \frac{U_a(s)-U_b(s)}{s} + \Gamma_M \frac{U_c(s)-U_d(s)}{s} = I_a(s) - \frac{i_{L1}(0)}{s},$$
$$\Gamma_M \frac{U_a(s)-U_b(s)}{s} + \Gamma_2 \frac{U_c(s)-U_d(s)}{s} = I_c(s) - \frac{i_{L2}(0)}{s},$$
$$\vdots$$

Pokud nebudu induktory vázané, tj $M = 0$, pak

$$\Gamma_1 = \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2} = \frac{1}{L_1},\ \Gamma_2 = \frac{1}{L_2} \text{ a } \Gamma_M = 0.$$

Vztahy pro popis induktoru (např. L_1) se tak zjednoduší na:

$$\frac{U_a(s)-U_b(s)}{L_1 s} = I_a(s) - \frac{i_{L1}(0)}{s},$$
$$\frac{-U_a(s)+U_b(s)}{L_1 s} = I_b(s) + \frac{i_{L1}(0)}{s}.$$

Pravidlo A.9 *Zařazení induktoru (vázaných induktorů) do matice obvodu*

Zařazení L: Obrazovou admitanci induktoru přičteme do matice obvodu na hlavní diagonále v pozicích odpovídajícím uzlům, ve kterých je zapojen a odečteme ji v pozicích odpovídajícím uzlům, mezi kterými je zapojen. V případě vázaných induktorů je nutné použít inverzní indukčnosti a inverzní indukčnosti dle zápisu vpravo. Dále k budicím proudům přičteme, resp. odečteme počáteční podmínku opět dle maticového zápisu:

$U_a(s)$	$U_b(s)$	$U_c(s)$	$U_d(s)$	
$\frac{\Gamma_1}{s}$	$-\frac{\Gamma_1}{s}$	$\frac{\Gamma_M}{s}$	$-\frac{\Gamma_M}{s}$	$I_a(s) - \frac{i_{L1}(0)}{s}$
$\frac{-\Gamma_1}{s}$	$+\frac{\Gamma_1}{s}$	$-\frac{\Gamma_M}{s}$	$\frac{\Gamma_M}{s}$	$I_b(s) + \frac{i_{L1}(0)}{s}$
$\frac{\Gamma_M}{s}$	$-\frac{\Gamma_M}{s}$	$\frac{\Gamma_2}{s}$	$-\frac{\Gamma_2}{s}$	$I_c(s) - \frac{i_{L2}(0)}{s}$
$\frac{-\Gamma_M}{s}$	$\frac{\Gamma_M}{s}$	$-\frac{\Gamma_2}{s}$	$\frac{\Gamma_2}{s}$	$I_d(s) + \frac{i_{L2}(0)}{s}$

Tímto jsou popsány metody zařazení všech základních lineárních prvků do matice obvodu. Přechod do kmitočtové roviny (např. pro kmitočtové charakteristiky) je pak umožněn substitucí $s = j\omega$.

Pozn.: To, že lze sčítat řádky nebo sloupce matice ve výše uvedených případech, je patrné z následujících ukázek:

V tomto případě přičtením prvního řádku (první rovnice) k druhému eliminujeme proměnnou x.

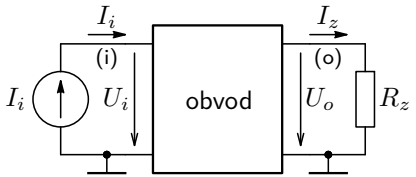
$$\begin{aligned} x+2y\ -z &= 3 \\ -x+5y+3z &= 2 \\ 0\ -y\ +z &= 1 \end{aligned}$$

V tomto případě přičtením prvního sloupce koeficientů k druhému eliminujeme opět proměnnou x, jelikož $x = y$.

$$\begin{aligned} x\ -y\ +0 &= 0 \\ -2x+5y+3z &= 2 \\ x-5y\ +z &= 1 \end{aligned}$$

A.3. Výpočet charakteristických parametrů dvojbranu

Jak bylo uvedeno v úvodu, lze pro výpočet jakéhokoliv uzlového napětí použít vztah (A.2). V mnoha případech je však možné elektronické zapojení znázornit ve tvaru dvojbranu se vstupními a výstupními svorkami, přičemž na vstupní straně bude připojeno proudové buzení a na výstupní straně zátěž, jak je uvedeno obrázku A.2. Uzlová napětí lze pak vyjádřit následovně, vzhledem k tomu, že a $I_o = -I_z$:



$$U_i = \frac{\Delta_{ii}}{\Delta} I_i - \frac{\Delta_{oi}}{\Delta} I_z = \frac{\Delta_{ii}}{\Delta} I_i - \frac{\Delta_{oi}}{R_z \Delta} U_o \,, \qquad \text{(A.4)}$$

$$U_o = \frac{\Delta_{io}}{\Delta} I_i - \frac{\Delta_{oo}}{\Delta} I_z = \frac{\Delta_{io}}{\Delta} I_i - \frac{\Delta_{oo}}{R_z \Delta} U_o \,. \qquad \text{(A.5)}$$

Obrázek A.2: Dvojbranové uspořádání obvodového zapojení.

Po úpravě získáme

$$U_o = \frac{R_z \Delta_{io}}{R_z \Delta + \Delta_{oo}} I_i \,, \qquad U_i = \frac{I_i}{\Delta} \frac{R_z \Delta \Delta_{ii} + \Delta_{ii} \Delta_{oo} - \Delta_{io} \Delta_{oi}}{R_z \Delta + \Delta_{oo}} = \frac{R_z \Delta_{ii} + \Delta_{ii,oo}}{R_z \Delta + \Delta_{oo}} I_i \,, \qquad \text{(A.6)}$$

jelikož rozdíl součinu jednoduchých subdeterminantů vyjádřit pomocí součinu determinantu soustavy a tzv. dvojitého algebraického doplňku $\Delta_{ii}\Delta_{oo} - \Delta_{io}\Delta_{oi} = \Delta\Delta_{ii,oo}$, obecně $\Delta_{ab}\Delta_{cd} - \Delta_{ad}\Delta_{cb} = \Delta\Delta_{ab,cd}$.

Nyní lze odvodit obecné vztahy pro dvojbranové parametry. Zde budeme místo zatěžovacího odporu R_z uvažovat obecně obraz zatěžovací impedance $Z_z(s)$ a parametry pak vyjadřovat také jako Laplaceovy obrazy.

Napěťový přenos (obecně, naprázdno)

$$A_u(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{Z_z(s)\Delta_{io}}{Z_z(s)\Delta_{ii} + \Delta_{ii,oo}}, \qquad A_{up}(s) = \left.\frac{U_o(s)}{U_i(s)}\right|_{Z_z=\infty} = \frac{\Delta_{io}}{\Delta_{ii}}. \tag{A.7}$$

Vstupní impedance (obecně, naprázdno, nakrátko)

$$Z_i(s) = \frac{U_i(s)}{I_i(s)} = \frac{Z_z(s)\Delta_{ii} + \Delta_{ii,oo}}{Z_z(s)\Delta + \Delta_{oo}}, \quad Z_{ip}(s) = \left.\frac{U_i(s)}{I_i(s)}\right|_{Z_z=\infty} = \frac{\Delta_{ii}}{\Delta}, \quad Z_{ik}(s) = \left.\frac{U_i(s)}{I_i(s)}\right|_{Z_z=0} = \frac{\Delta_{ii,oo}}{\Delta_{oo}}. \tag{A.8}$$

Proudový přenos (obecně, nakrátko)

Dosazením do vztahu (A.6) za výstupní napětí $U_o(s) = Z_z(s)I_z(s)$, dostaneme vztah pro proudový přenos:

$$A_i(s) = \frac{I_z(s)}{I_i(s)} = \frac{\Delta_{io}}{Z_z(s)\Delta + \Delta_{oo}}, \qquad A_{ik}(s) = \left.\frac{I_z(s)}{I_i(s)}\right|_{Z_z=0} = \frac{\Delta_{io}}{\Delta_{oo}}. \tag{A.9}$$

Přenosová impedance – transimpedance (obecně, nakrátko)

Přenosová impedance $Z_t(s)$ vyjadřuje poměr výstupního napětí ku vstupnímu proudu. Lze ji získat přímo ze vztahu (A.6) pro výstupní napětí $U_o(s)$:

$$Z_t(s) = \frac{U_o(s)}{I_i(s)} = \frac{Z_z(s)\Delta_{io}}{Z_z(s)\Delta + \Delta_{oo}}, \qquad Z_{tp}(s) = \left.\frac{U_o(s)}{I_i(s)}\right|_{Z_z=\infty} = \frac{\Delta_{io}}{\Delta}. \tag{A.10}$$

Přenosová admitance – transadmitance (obecně, nakrátko)

Podobně lze odvodit opět z výrazu (A.6) po dosazení $U_o(s) = Z_z(s)I_z(s)$ vztah pro transadmitanci Y_t:

$$Y_t(s) = \frac{I_z(s)}{U_i(s)} = \frac{\Delta_{io}}{Z_z(s)\Delta_{ii} + \Delta_{ii,oo}}, \qquad Y_{tk}(s) = \left.\frac{I_z(s)}{U_i(s)}\right|_{Z_z=0} = \frac{\Delta_{io}}{\Delta_{ii,oo}}. \tag{A.11}$$

Výstupní impedance (obecně, naprázdno, nakrátko)

Výstupní impedanci lze určit jako poměr výstupního napětí ku výstupnímu proudu $I_o(s)$, kterým budíme s opačnou orientací vůči I_z do výstupní svorky místo zátěže, přičemž vstupní svorka je zakončena impedancí $Z_i(s)$. Výstupní impedanci pak určíme z rovnic (A.4) a (A.5) dosazením vztahu $I_i(s) = -\frac{U_i(s)}{Z_i}$:

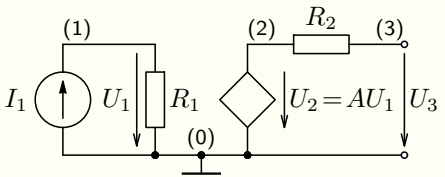
$$Z_o(s) = \frac{U_o(s)}{I_o(s)} = \frac{Z_i(s)\Delta_{oo} + \Delta_{ii,oo}}{Z_i(s)\Delta + \Delta_{ii}}, \quad Z_{op}(s) = \left.\frac{U_o(s)}{I_o(s)}\right|_{Z_i=\infty} = \frac{\Delta_{oo}}{\Delta}, \quad Z_{ok}(s) = \left.\frac{U_o(s)}{I_o(s)}\right|_{Z_i=0} = \frac{\Delta_{ii,oo}}{\Delta_{ii}}. \tag{A.12}$$

Lze odvodit a tím potvrdit i vztahy mezi jednotlivými parametry, např. $A_i^k = \frac{Z_t^p}{Z_o^p}$. Viz také relaci 15.26.

Dále jsou uvedeny příklady, které ilustrují použití uvedených pravidel a výpočet charakteristických veličin.

A.4. Příklady analýz odporových obvodů s řízenými zdroji

Příklad A.3 *Matice odporového děliče napětí*

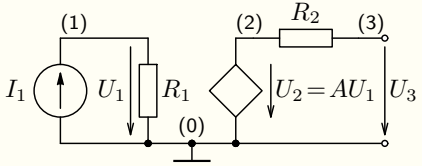


Zadání: Sestavte matici obvodu dle obrázku vlevo a z ní určete základní dvojbranové parametry. Předpokládejte proudové buzení do uzlu (1), jak ukazuje obrázek a výstup v uzlu (3).

Řešení: Na základě pravidla A.1 sestavíme prvotní matici bez řízeného zdroje, na kterou následně aplikujeme pravidlo A.2 pro zařazení uvedeného řízeného zdroje. Výsledná matice včetně vektoru uzlových napětí a budícího proudu je ve tvaru:

U_1	U_2	U_3	
G_1	0	0	I_1
A	-1	0	0
0	$-G_2$	G_2	0

Výpočet jednotlivých parametrů je dle vztahů (A.7) až (A.12) uveden níže. Výsledky v případě takto elementárního příklad lze jednoduše ověřit, jelikož je lze přímo psát z obvodového zapojení.

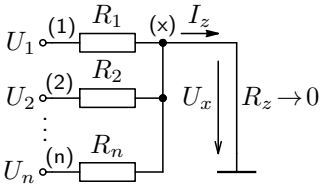


U_1	U_2	U_3	
G_1	0	0	I_1
A	-1	0	0
0	$-G_2$	G_2	0

Napěťový přenos naprázdno	$A_u^p = \dfrac{\Delta_{13}}{\Delta_{11}} = A$
Proudový přenos nakrátko	$A_{ik} = \dfrac{\Delta_{13}}{\Delta_{33}} = \dfrac{AR_1}{R_2}$
Vstupní impedance	$Z_{ip} = Z_{ik} = \dfrac{\Delta_{11}}{\Delta} = \dfrac{\Delta_{11,33}}{\Delta_{33}} = R_1$
Výstupní impedance	$Z_{op} = Z_{ok} = \dfrac{\Delta_{33}}{\Delta} = \dfrac{\Delta_{11,33}}{\Delta_{11}} = R_2$
Transimpedance naprázdno	$Z_{tp} = \dfrac{\Delta_{13}}{\Delta} = AR_1$
Transadmitance nakrátko	$Y_{tk} = \dfrac{\Delta_{13}}{\Delta_{11,33}} = \dfrac{A}{R_2}$

Zkratový proud používaný v některých parametrech lze vypočítat jednoduchou úpravou matice bez použití dvojitých doplňků, jak ukazuje následující postup. Pokud je zkratován nějaký uzel na zemní potenciál, vypustí se sloupec i řádek odpovídající tomuto uzlu, jelikož jeho napětí nulové a nelze do něho budit (nyní referenční uzel), viz pravidlo A.7 při $U = 0$ a pro uzel (b) jako referenční.

Obrázek A.3 ilustruje obecný případ, kdy je zkratován uzel (x), tj. $U_x = 0$. Vpravo jsou pak uvedeny rovnice pro uzel (x) bez zkratu ($U_x \neq 0$ a místo R_z je I_x vtékající do tohoto uzlu) a se zkratem ($R_z = 0$) bez výpočtu a s výpočtem zkratového proudu $I_k = I_z|_{R_z=0}$. Podle (A.15) lze pak formulovat pravidlo analogické pravidlu A.7.



$$-U_1G_1 - U_oG_2 - \cdots - U_nG_n + U_x(G_1 + G_2 + \cdots + G_n) = I_x \qquad \text{(A.13)}$$

$$-U_1G_1 - U_oG_2 - \cdots - U_nG_n + 0 = 0 \qquad \text{(A.14)}$$

$$-U_1G_1 - U_oG_2 - \cdots - U_nG_n + I_k \cdot 1 = 0 \qquad \text{(A.15)}$$

Obrázek A.3: Zapojení a rovnice pro uzel (x) se zkratem a bez zkratu.

Pravidlo A.10 *Úprava matice soustavy pro výpočet zkratového proudu.*

Sloupec matice obvodu, který odpovídá zkratovanému uzlu na zemní potenciál vynulujeme, přičemž v pozici odpovídající tomuto uzlu přičteme jedničku. Ve vektoru uzlových napětí je pak na této pozici požadovaný zkratový proud I_k a ve vektoru budicích proudu nula.

Je zřejmé. že pro výpočet proudů lze využít pravidla A.7 pro zařazení napěťového zdroje s výpočtem proudu zdrojem při $U = 0$, více viz také [5].

U_1	$\cdots$	U_n	I_k	
			0	I_1
			0	$\cdots$
			0	I_n
			1	0

Pokud aplikujeme tento postup/pravidlo na příklad A.3, dostaneme matici soustavy po uvedených úpravách a včetně vektorů obvodových veličin v níže uvedeném tvaru. Z dostupných obvodových veličin lze pak určit následující parametry, které po dosazení musí samozřejmě souhlasit s již vypočtenými vztahy.

U_1	U_o	I_k	
G_1	0	0	I_1
A	-1	0	0
0	$-G_2$	1	0

$$A_{ik} = \frac{\Delta_{13}}{\Delta}, \qquad Y_{tk} = \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{11}}$$

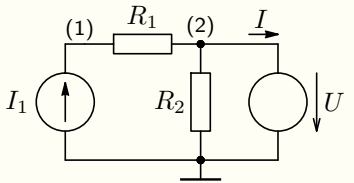
Podobně lze určit i výstupní impedanci nakrátko. V tomto případě zkratován první uzel (připojen na referenční napětí) a to bez výpočtu zkratového proudu. Proto se první řádek a první sloupec vypustí (přičte k referenčnímu a vypustí). Po této úpravě obdržíme:

$U_o(s)$	U_3	
-1	0	0
$-G_2$	G_2	I_3

$$Z_{ok} = \frac{U_3}{I_3} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta} = R_2$$

Stejným způsobem lze dospět i ke vztahu pro vstupní impedanci nakrátko Z_{ik}.

Příklad A.4 *Elementární obvod s nezávislým zdrojem napětí*



Zadání: Sestavte matici obvodu dle obrázku vlevo a z ní určete uzlové napětí U_1 a proud napěťového zdroje I v orientaci podle schématu.

Řešení: Na základě pravidla A.1 sestavíme prvotní matici bez řízeného zdroje, na kterou následně aplikujeme pravidlo A.7 pro zařazení nezávislého zdroje napětí.

Výsledná matice včetně vektoru uzlových napětí a budícího proudu je uvedena níže, včetně výpočtu požadovaných obvodových veličin dle vztahu A.2, kde místo proudu i_3 figuruje nyní napětí U.

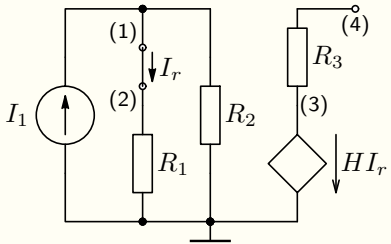
U_1	U_2	I	
G_1	$-G_1$	0	I_1
$-G1$	G_1+G2	1	0
0	1	0	U

$$U_1 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} I_1 + \frac{\Delta_{31}}{\Delta} U = \frac{-I_1 - G_1 U}{-G1} = I_1 R_1 + U,$$
$$I = \frac{\Delta_{13}}{\Delta} I_1 + \frac{\Delta_{33}}{\Delta} U = \frac{-G1 I_1 + G_1 G2 U}{-G1} = I_1 - U G_2.$$

Výsledky lze díky elementárnímu zapojení opět jednoduše ověřit např. z principu superpozice.

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

Příklad A.5 Elementární obvod s proudem řízeným zdrojem napětí



I_r	U_2	U_3	U_4	
1	G_2	0	0	I_1
-1	G_1	0	0	0
$-H$	0	1	0	0
0	0	$-G_3$	G_3	0

Zadání: Sestavte matici obvodu dle obrázku vlevo a z ní určete základní dvojbranové parametry a řídící proud I_r.

Řešení: Na základě pravidla A.1 sestavíme prvotní matici bez řízeného zdroje, na kterou pak aplikujeme pravidlo A.3. Výsledná matice s vektory uzlových napětí a budících proudů je uvedena níže, včetně výpočtu požadovaných parametrů.

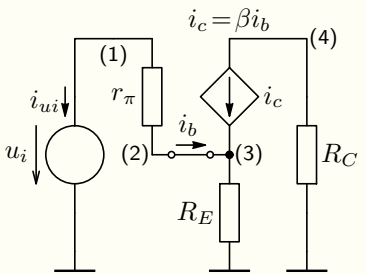
$$A_{up} = \frac{\Delta_{14}}{\Delta_{22}} = \frac{\Delta_{24}}{\Delta_{22}} = \frac{H}{R_1}, \quad A_{ik} = \frac{\Delta_{14}}{\Delta_{44}} = H\frac{R_2}{R_3(R_1+R_2)},$$

$$Z_{ip} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta} = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}, \quad Z_{ik} = \frac{\Delta_{22,44}}{\Delta_{44}} = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2},$$

$$Z_{tp} = \frac{\Delta_{14}}{\Delta} = H\frac{R_2}{R_1+R_2}, \quad Y_{tk} = \frac{\Delta_{14}}{\Delta_{22,44}} = \frac{H}{R_3R_1},$$

Řídící proud je pak $I_r = I_1\dfrac{\Delta_{11}}{\Delta} = I_1\dfrac{\Delta_{21}}{\Delta} = I_1\dfrac{R_2}{R_1+R_2}$. Jelikož buzení do uzlu (1) je identické jako buzení do uzlu (2), je $\Delta_{11} = \Delta_{21}$, $\Delta_{22} = \Delta_{12}$, …, jak je patrné např. z výpočtu A_u a I_r.

Příklad A.6 *Jednoduchý obvod s proudem řízeným zdrojem proudu*



Zadání: Sestavte matici obvodu dle obrázku vlevo a z ní určete základní parametry, podobně jako u tranzistorového zesilovače v zapojení SE, tj. se vstupem v uzlu (1) a výstupem v uzlu (4).

Řešení: Na základě pravidla A.1 sestavíme prvotní matici bez řízeného zdroje, na kterou pak aplikujeme pravidlo A.5 a pravidlo A.7. Výsledná matice s vektory uzlových napětí a budících proudů je uvedena níže. Vzhledem k tomu, že, vstupní proud $i_i = i_b = \frac{\Delta_{12}}{\Delta} u_i$ (buzení do uzlu (1) a 2. pozice vektoru neznámých), $u_1 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} u_i$, resp. $u_4 = \frac{\Delta_{14}}{\Delta} u_i$, vypočteme požadované parametry následovně:

u_1	i_b	u_3	u_4	
1	0	0	0	u_i
$-g_\pi$	1	g_π	0	0
0	$-\beta-1$	G_E	0	0
0	β	0	G_C	0

$$A_{up} = \frac{u_4}{u_1} = \frac{\Delta_{14}}{\Delta} = \frac{\Delta_{14}}{\Delta_{11}} = -\frac{\beta R_C}{r_\pi + R_E(\beta+1)},$$

$$R_{ip} = \frac{u_1}{i_b} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{12}} = r_\pi + R_E(\beta+1).$$

Výsledky vzhledem k $\frac{\beta}{\beta+1} = \alpha$ samozřejmě souhlasí s (15.32) a (15.33) pro $R_B \to \infty$ a $r_\pi = (\beta+1) r_e$. Uživatel si může ověřit výsledky i při použití VCCS, který byl použit v příkladu 15.11.

V tomto případě je vstupní proud i_i přímo řídícím proudem i_b, který je v proměnných maticového zápisu. Pokud by tomu tak nebylo, lze výpočet vstupního proudu provést pomocí výpočtu proudu $i_{ui} = -i_i$ napěťovým zdrojem u_1 podle zápisu A.3, který neredukuje matici na rozdíl od pravidla A.7. Matice je pak v následujícím tvaru a vstupní proud a odpor je dán těmito vztahy:

u_1	i_b	u_3	u_4	i_{ui}	
g_π	0	$-g_\pi$	0	1	0
$-g_\pi$	1	g_π	0	0	0
0	$-\beta-1$	G_E	0	0	0
0	β	0	G_C	0	0
1	0	0	0	0	u_i

$$u_1 = \frac{\Delta_{15}}{\Delta} u_i = u_i,$$

$$i_{ui} = \frac{\Delta_{55}}{\Delta} u_i = -\frac{u_i}{r_\pi + R_E(\beta+1)} = -i_i = -i_b,$$

$$R_{ip} = \frac{\Delta_{55}}{\Delta_{15}} = r_\pi + R_E(\beta+1).$$

To, že $i_{ui} = -i_b$ je zřejmé i z maticového zápisu – viz první a druhý řádek. Z obvodu je také patrné, že zakončením se vstupní proud nemění, tj. platí $i_{ip} = i_{ik} = i_b = -i_{ui}$ a $R_{ip} = R_{ik}$.

Dále následuje výpočet proudového zisku a výstupního odporu.

Pro výpočet proudového zisku a výstupního odporu bychom museli modifikovat odvození v podkapitole A.3, které bylo provedeno pro proudové buzení a některé závěry pro napěťové buzení neplatí. Pokud však použijeme pravidlo A.10, je možné určit i tyto parametry. Původní matici modifikujme dle A.10 pro výpočet zkratového proudu z uzlu (4). Dostaneme níže uvedenou matici, kde i_k je zkratový proud uzlu (4), při jeho připojení k referenčnímu (zemnímu) uzlu. Výpočet uvedených parametrů je pak následující:

u_1	i_b	u_3	i_k	
1	0	0	0	u_i
$-g_\pi$	1	g_π	0	0
0	$-\beta-1$	G_E	0	0
0	β	0	1	0

$$i_i = i_b = \frac{\Delta_{12}}{\Delta}u_i = \frac{u_i}{r_\pi + R_E(\beta+1)},$$

$$i_k = \frac{\Delta_{14}}{\Delta}u_i = \frac{-\beta u_i}{r_\pi + R_E(\beta+1)},$$

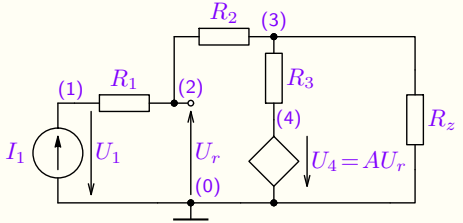
$$A_{ik} = \frac{\Delta_{14}}{\Delta_{12}} = -\beta,$$

$$R_o = \frac{u_4|_{R_z=\infty}}{i_k|_{R_z=0}} = \frac{A_{up}u_1}{i_k} = R_C.$$

Výpočet výstupního odporu je proveden z definičního vztahu (výstupní napětí u_4 naprázdno/výstupní proud nakrátko i_k), přičemž obě veličiny byly již určeny.

Následuje příklad invertujícího zesilovače s napětím řízeným zdrojem napětí (VSVS), resp. operačním zesilovačem (OZ) s konečným zesílením A.

Příklad A.7 *Invertující zesilovač s napěťovým zdrojem řízeným napětím*



Zadání: Sestavte matici obvodu dle obrázku vlevo a z ní určete napěťový přenos (A_u, A_{up}) a vstupní a výstupní odpor (R_{ip} i R_{ik} a R_{op} i A_{ok}). Výsledky ověřte pro ideální OZ ($A \to \infty$).

Řešení: Na základě pravidla A.1 sestavíme prvotní matici bez R_z a řízeného zdroje, na kterou následně aplikujeme pravidlo A.2 a dostaneme zápis, z něhož určíme:

U_1	U_2	U_3	U_4	
G_1	$-G_1$	0	0	I_1
$-G_1$	G_1+G_2	$-G_2$	0	0
0	$-G_2$	G_2+G_3	$-G_3$	0
0	$-A$	0	-1	0

$$A_u = \frac{R_z\Delta_{13}}{R_z\Delta_{11}+\Delta_{11,33}} = \\ = \frac{-AR_2+R_3}{AR_1+R_1+R_2+R_3+G_zR_3(R_1+R_2)}, \quad \text{(A.16)}$$

$$A_{up} = \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{11}} = \frac{-AR_2+R_3}{AR_1+R_1+R_2+R_3}. \quad \text{(A.17)}$$

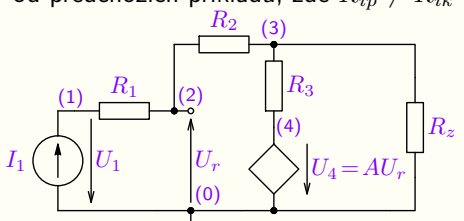
Pokud $A \to \infty$, pak $A_u = A_{up} = -\dfrac{R_2}{R_1}$, což je případ neinvertujícího zesilovače s ideálním OZ (jeho výstupní odpor R_3 se pak samozřejmě neuplatní), viz (11.2).

Vstupní a výstupní odpor určíme dle vztahů A.8 a A.12, přičemž pro výpočet výstupního odporu je R_i zakončovací odpor vstupní svorky, který je zapojen místo zdroje I_1.

$$R_{ip} = \left.\frac{U_1}{I_1}\right|_{R_z=\infty} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = \frac{AR_1 + R_1 + R_2 + R_3}{A+1}, \quad R_{ik} = \left.\frac{U_1}{I_1}\right|_{R_z=0} = \frac{\Delta_{11,33}}{\Delta_{33}} = R_1 + R_2. \tag{A.18}$$

$$R_{op} = \left.\frac{U_3}{I_3}\right|_{R_i=\infty} = \frac{\Delta_{33}}{\Delta} = \frac{R_3}{A+1}, \quad R_{ok} = \left.\frac{U_3}{I_3}\right|_{R_i=0} = \frac{\Delta_{11,33}}{\Delta_{11}} = \frac{(R_1+R_2)R_3}{AR_1 + R_1 + R_2 + R_3}. \tag{A.19}$$

R_{op} odpovídá proudovému buzení (zapojení dle obrázku), zatímco R_{ok} buzení napěťovému (místo I_1 je zapojen zdroj U_1). Výsledky lze ověřit i metodou popsanou v 10.4, viz také příklad 10.1. Pozor, na rozdíl od předchozích příkladů, zde $R_{ip} \neq R_{ik}$ a $R_{op} \neq R_{ok}$, což je patrné ze zapojení obvodu.



Výstup nakrátko vede na $U_3 = 0$ a tím $R_{ik} = R_1 + R_2$. Buzení nakrátko (napěťovým zdrojem) má vliv na výstupní odpor, jelikož se v tomto případě mění vratný rozdíl, resp. zpětnovazební přenos z $\beta_i = -1$ pro proudové buzení na $\beta_u = -\frac{R_1}{R_1+R_2+R_3}$ pro buzení napěťové, tj. z $R_{op} = \frac{R_3}{1-\beta_i A}$ na $R_{ok} = \frac{R_3||(R_1+R_2)}{1-\beta_u A}$. Vlivem změny charakteru buzení a tím vratného přenosu se mění i další parametry a např. proudové buzení může, na rozdíl od buzení napěťového, vést i k nestabilitě soustavy (při kmitočtově závislém zesílení $A(j\omega)$), jelikož $\beta = -1$, viz. kapitolu 10.8.4.

Jak již bylo uvedeno, vede případ $A \to \infty$ na neinvertující zesilovače s ideálním OZ, jehož výstupní odpor R_3 se pak samozřejmě neuplatní, proto $A_u = A_{up} = -\dfrac{R_2}{R_1}$. Výsledek však lze získat z jednodušší matice, kdy je místo řízeného zdroje zařazen ideální OZ dle pravidla A.6, viz maticový zápis níže. Ve vektoru budicích proudů jsou zmíněny i případné budící proudy I_2 a I_3, které včak uvažujeme nulové. Vzhledem k tomu, že výstupní napětí U_3 je na druhé pozici vektoru proměnných ($U_2 = 0$), tak požadované parametry lze vyjádřit následovně:

U_1	U_3	U_4	
G_1	0	0	I_1
$-G_1$	$-G_2$	0	I_2
0	G_2+G_3	$-G_3$	I_3

$$A_u = \frac{R_z \Delta_{12}}{R_z \Delta_{11} + \Delta_{11,32}} = A_{up} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}} = -\frac{R_2}{R_1} \qquad \text{(A.20)}$$

$$R_{ip} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = R_1, \qquad \text{(A.21)}$$

$$R_{op} = \frac{\Delta_{32}}{\Delta} = 0, \qquad \text{(A.22)}$$

což je v souladu s odpovídajícími parametry ve vztazích (A.18), (A.19) a (A.16), resp. (A.17) pro $A \to \infty$. Je to zřejmé i z obvodu, jelikož pro ideální OZ bude vlivem ZZV platit $U_2 = 0$.

Pro výstup nakrátko by dle uvedené matice vedl výpočet $R_{ik} = \frac{\Delta_{11,32}}{\Delta_{32}}$ na dělení nulou a pro $R_{ok} = \frac{\Delta_{11,32}}{\Delta_{11}} = 0$, jelikož $\Delta_{32} = 0$ i $\Delta_{11,32} = 0$. To samozřejmě není pravda a je to způsobeno právě výstupem nakrátko, což vede na $U_3 = 0$ a tím na přerušení zpětné vazby. **Převládající záporná zpětná vazba je nutná podmínka platnosti pravidla A.6 pro zařazení ideálního OZ. Tato podmínka není při výstupu nakrátko dodržena a postup nelze v tomto případě použít** (neplatí $U_2 = 0$).

Pokud bychom výstup nakrátko realizovali dle pravidla A.10 dostaneme matici vpravo. Výpočet např. zkratového proudu je pak dán $I_k = \frac{\Delta_{12}}{\Delta} \to \infty$ (I_k je na 2. pozici místo U_3 a budí se do uzlu 1), což vede na dělení nulou, jelikož determinant matice je $\Delta = 0$!

U_1	I_k	U_4	
G_1	0	0	I_1
$-G_1$	0	0	I_2
0	1	$-G_3$	0

Výsledky lze zkontrolovat analýzou.

Stabilita obvodu jak pro proudové, tak napěťové buzení je ukázána na analýze Wienova oscilátoru včetně textového popisu.

Podrobně se problematikou algoritmizace popisu obvodů zabývá literatura [5], kde jsou uvedeny další postupy, které se v programech pro analýzu obvodů využívají.

V další části je ukázán postup sestavení matice obvodu a analýzy idealizovaných, periodicky spínaných obvodů, tj. tzv. obvodů se spínanými kapacitory nebo proudy.

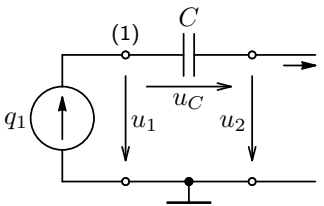
A.5. Sestavení matice periodicky spínaného SC obvodu

Podstata metody analýzy **idealizovaných, periodicky spínaných obvodů se spínanými kapacitory** vychází z metody uzlových nábojových rovnic, která je analogií MUN. Maticový zápis (A.1) lze upravit tak, že místo budicích proudů použijeme zdroje náboje a místo admitanční matice pak matici kapacitní.

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{Q} \tag{A.23}$$

kde $\mathbf{C}$ je kapacitní matice soustavy – lineárního obvodu se spínanými kapacitory,
$\mathbf{U}$ je vektor neznámých uzlových napětí a
$\mathbf{Q}$ je vektor všech budících nábojů do jednotlivých uzlů soustavy,

přičemž pro sestavení kapacitní matice platí analogické pravidla k výše uvedeným. Matici je třeba sestavit pro obvodové veličiny v různých fázích, jak je uvedeno v kapitole 17.8.2. Pro její sestavení uvažujme elementární obvod spínaný pouze ve dvou fázích, který lze pro uzel (1) popsat následujícími relacemi:



$$\begin{aligned} q_1[n] &= C\big(u_C[n] - u_{\bar{C}}[n-1/2]\big), \\ q_{\bar{1}}[n-1/2] &= C\big(u_{\bar{C}}[n-1/2] - u_C[n-1]\big), \end{aligned} \tag{A.24}$$

přičemž $q_1[n]$, resp. $q_{\bar{1}}[n-1/2]$ jsou vzorky vstupního náboje v časech $t = nT_c$ pro první a $t = (n-1/2)T_c$ pro druhou fázi, což platí i pro ostatní obvodové veličiny.

Pokud vyjádříme napětí kapacitoru rozdílem uzlových napětí, tj. $u_C[n] = u_1[n] - u_2[n]$ a aplikujeme pak na soustavu (A.24) transformaci $\mathcal{Z}$, tak dostaneme:

$$\begin{aligned} Q_1(z) &= C\Big(\big(U_1(z) - U_2(z)\big) - z^{-1/2}\big(U_{\bar{1}}(z) - U_{\bar{2}}(z)\big)\Big), \\ z^{-1/2}Q_{\bar{1}}(z) &= C\Big(z^{-1/2}\big(U_{\bar{1}}(z) - U_{\bar{2}}(z)\big) - z^{-1}\big(U_1(z) - U_2(z)\big)\Big), \end{aligned} \tag{A.25}$$

přičemž druhou rovnici soustavy je vhodné ještě upravit na následující tvar

$$Q_{1l}(z) = C\Big(-z^{-1/2}\big(U_{1s}(z) - U_{2s}(z)\big) + \big(U_{1l}(z) - U_{2l}(z)\big)\Big).$$

Pro obvod spínaný ve dvou fázích pak lze pro maticový zápis použít rovnici (17.89), která vychází z popisu, přičemž např. $\mathbf{Q}_e(z) = \big(Q_1(z), Q_2(z), ...\big)^T$, resp. $\mathbf{Q}_o(z) = \big(Q_{\bar{1}}(z), Q_{\bar{2}}(z), ...\big)^T$ jsou vektory vstupního náboje v první (sudé – even), resp. druhé (liché – odd) fázi, atd.

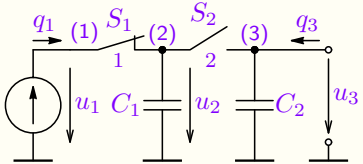
$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_e(z) \\ \mathbf{Q}_o(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ee} & -z^{-\frac{1}{2}}\mathbf{C}_{eo} \\ -z^{-\frac{1}{2}}\mathbf{C}_{oe} & \mathbf{C}_{oo} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_e(z) \\ \mathbf{U}_o(z) \end{bmatrix}. \tag{A.26}$$

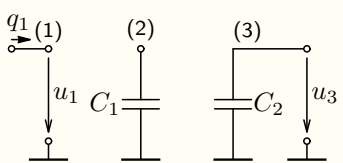
Jak bylo uvedeno, jsou pravidla pro zařazení obdobná výše uvedeným, proto zde již nejsou uvedena (viz např. [16]). Sestavení jednotlivých kapacitních matic a tím její celkové struktury je ukázáno na příkladech – nejprve na elementárním obvodu SC integračního článku z obrázku 17.65.

Příklad A.8 Analýza SC integračního článku

Zadání: Sestavte kapacitní matici vycházející z metody uzlových nábojových rovnic a analyzujte přenosy SC integračního článku z obrázku 17.65.

Řešení: Nejprve z obvodu vyjmeme obvodové prvky jejichž chování se mění se spínacími fázemi, tj. spínači a pro něj pak sestavme základní kapacitní matici $\mathbf{C}_0$. V takto upraveném obvodu se vyskytují pouze kapacitory, jejich zařazení je zcela analogické jako zařazení rezistoru do admitanční matice dle pravidla A.1.





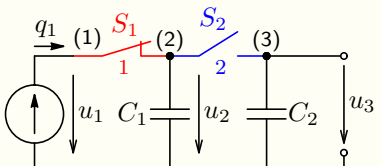
$$\mathbf{C}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}$$

Tuto matici pak použijeme pro sestavení celkové matice dle (A.26). Dostaneme pak tvar (A.27) na který aplikujeme vliv jednotlivých spínačů. Spínač je zkratem, tj. zařazení ze řídí pravidlem A.7, které aplikujeme pouze na tu část matice, která odpovídá fázi, ve které je daný spínač sepnut. V případě spínače S_1 přičteme řádek odpovídající napětí $U_2(z)$ (označen (2), tj. v první fázi) k řádku odpovídající napětí $U_1(z)$ a sloupec (1) ke sloupci (2). Řádek a sloupec (2) pak vypustíme (nepožaduje se výpočet proudu). Analogicky zařadíme spínač S_2 (modifikujeme řádky a sloupce části matice odpovídající 2. fázi) a dostaneme matici (A.28).

$$\mathbf{C}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

	(1)	(2)	(3)	$(\bar{1})$	$(\bar{2})$	$(\bar{3})$
(1)	0	0	0	0	0	0
(2)	0	C_1	0	0	$-z^{-1/2}C_1$	0
(3)	0	0	C_2	0	0	$-z^{-1/2}C_2$
$(\bar{1})$	0	0	0	0	0	0
$(\bar{2})$	0	$-z^{-\frac{1}{2}}C_1$	0	0	C_1	0
$(\bar{3})$	0	0	$-z^{-1/2}C_2$	0	0	C_2

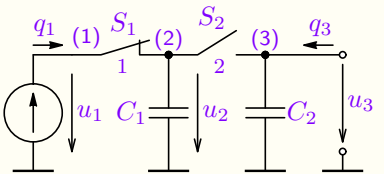
(A.27)



	(1) + (2)	(3)	$(\bar{1})$	$(\bar{2}) + (\bar{3})$
(1) + (2)	C_1	0	0	$-z^{-1/2}C_1$
(3)	0	C_2	0	$-z^{-1/2}C_2$
$(\bar{1})$	0	0	0	0
$(\bar{2}) + (\bar{3})$	$-z^{-\frac{1}{2}}C_1$	$-z^{-1/2}C_2$	0	$C_1 + C_2$

(A.28)

Je zřejmé, že vlivem spínačů je $U_1(z) \equiv U_{1e}(z) = U_{2e}(z) \equiv U_2(z)$ a $U_{\bar{2}}(z) \equiv U_{2o}(z) = U_{3o}(z) \equiv U_{\bar{3}}(z)$ a dále nelze budit do uzlu $\bar{1}$ v liché fázi. K tomuto uzlu není pro 2. fázi nic připojeno, tj. odpovídající řádek i sloupec matice je nulový a proto ho lze ho vypustit. Výsledný maticový popis obvodu je následující:



$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -\frac{C_1}{\sqrt{z}} \\ 0 & C_2 & -\frac{C_2}{\sqrt{z}} \\ -\frac{C_1}{\sqrt{z}} & -\frac{C_2}{\sqrt{z}} & C_1 + C_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_3 \\ U_{\bar{3}} \end{bmatrix}, \quad \text{(A.29)}$$

Přenosové funkce lze z výsledné matice určit dle (A.7), tj.

$$H_{13}(z) = \left.\frac{U_3(z)}{U_1(z)}\right|_{Q_3=0,\, Q_{\bar{3}}=0,\, Q_{\bar{1}}=0} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}} = \frac{C_1}{z(C_1+C_2) - C_2},$$

$$H_{1\bar{3}}(z) = \left.\frac{U_{\bar{3}}(z)}{U_1(z)}\right|_{Q_3=0,\, Q_3=0,\, Q_{\bar{1}}=0} = \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{11}} = \frac{\sqrt{z}C_1}{z(C_1+C_2) - C_2},$$

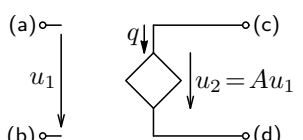
kde číslování algebraických doplňků neodpovídá číslování uzlů, ale pořadí řádků a sloupců ve výsledné kapacitní matici. Pro $U_3 = 0$ je $H_{13}(z) = 0$, $H_{1\bar{3}}(z) = \frac{C_1}{\sqrt{z}(C_1+C_2)}$ a pro $U_{\bar{3}} = 0$ jsou oba přenosy nulové.

Předchozí obvod se skládal pouze z pasivních prvků (pomineme-li spínače). Podobně jako pro kapacitor lze na základní matici $\mathbf{C}_0$ uplatnit i pravidlo na pro ideální OZ (analogicky k pravidlu A.6), jelikož ovlivňuje stejně veličiny bez ohledu na fázi spínání.

Pravidlo A.11 *Zařazení ideálního operačního zesilovače se* ***zavedenou ZZV*** *do kapacitní matice obvodu*

Zařazení IOZ: V matici přičteme řádek odpovídající uzlu (c) pro obě fáze (řádek c, resp. $\bar{c}$) k řádku odpovídajícímu uzlu (d) (řádek d, resp. $\bar{d}$). Dále přičteme sloupec odpovídající napětí uzlu (a) pro obě fáze (sloupec a, resp. $\bar{a}$) ke sloupci odpovídajícímu napětí uzlu (b) (sloupec b, resp. $\bar{b}$). Řádky c, resp. $\bar{c}$ a sloupce a, resp. $\bar{a}$ potom vynulujeme, resp. vypustíme, pokud není třeba vypočítat přímo náboj q výstupních svorek.

Rozdílná situace je s řízenými zdroji, kde např. pro zdroj napětí řízený napětím (VCVS) je pro dvoufázově spínaný obvod nutné popsat veličiny v obou fázích, přičemž samozřejmě neexistuje přenos z jedné fáze do druhé (ze sudé do liché) a naopak, tj. $Q_e \neq f(U_o)$, $Q_o \neq f(U_e)$, resp. např. $Q_c \neq f(U_{\bar{a}})$, $f(U_{\bar{b}})$, ...



$$(U_a - U_b)A - (U_c - U_d) = 0, \qquad Q_c = Q, \quad Q_d = -Q,$$
$$(U_{\bar{a}} - U_{\bar{b}})A - (U_{\bar{c}} - U_{\bar{d}}) = 0, \qquad Q_{\bar{c}} = Q, \quad Q_{\bar{d}} = -Q,$$

kde jednotlivé veličiny vyjadřují $\mathcal{Z}$ obrazy, např. $Q \equiv Q(z)$.

Pravidlo pro zařazení VCVS je pak možné formulovat následujícím způsobem.

Pravidlo A.12 *Zařazení napětím řízeného zdroje napětí do kapacitní matice obvodu*

Zařazení VCVS: V matici přičteme řádek odpovídající uzlu (c) pro obě fáze (řádek c, resp. $\bar{c}$) k řádku odpovídajícímu uzlu (d) (řádek d, resp. $\bar{d}$) a řádky c, resp. $\bar{c}$ potom vynulujeme. K takto vzniklé matici přičteme v odpovídajících uzlech následující matici:

U_a	U_b	U_c	U_d	$U_{\bar{a}}$	$U_{\bar{b}}$	$U_{\bar{c}}$	$U_{\bar{d}}$	
								Q_a
								Q_b
A	$-A$	-1	1					0
								Q_d
								$Q_{\bar{a}}$
								$Q_{\bar{b}}$
				A	$-A$	-1	1	0
								$Q_{\bar{d}}$

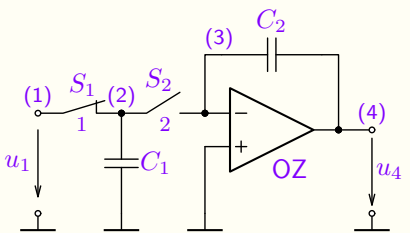
Řízený zdroj nemá paměťový efekt, tj. má nulový přenos mezi fázemi, proto se k maticím $\mathbf{C}_{eo}$ a $\mathbf{C}_{oe}$ nepřičítají žádné prvky a provede se jen výše uvedené sečtení a nulování řádků – zdroj nemění své chování v závislosti na spínací fázi. Jelikož jsme vypustili původní řádek c a $\bar{c}$, ztrácíme možnost buzení přímo do tohoto, resp. těchto uzlů (pravá strana rovnice 3 a $\overline{3}$ je nyní nulová). Jak je ale patrné, buzení do uzlu d, resp. $\bar{d}$ je identické jako buzení do uzlu c, resp. $\bar{c}$ (ve skutečnosti je na místě prvku Q_d, resp. $Q_{\bar{d}}$ prvek $Q_c + Q_d$, resp. $Q_{\bar{c}} + Q_{\bar{d}}$).

Podobně lze upravit ostatní pravidla pro zařazení ostatních řízených zdrojů uvedená v podkapitole A.2, viz. také [16].

Příklad A.9 *Analýza SC integrátoru*

Zadání: Sestavte kapacitní matici vycházející z metody uzlových nábojových rovnic a analyzujte přenosy SC integrátoru podle obrázku 17.71 jak pro případ ideálního OZ, tak OZ s konečným zesílením A_d.

Řešení: Postup je naprosto stejný jako v předcházejícím příkladě. Nejprve sestavíme základní kapacitní matici $\mathbf{C}_0$ obvodu bez spínačů (případně řízených zdrojů). Pro případ ideálního OZ dostaneme aplikujeme na tuto matici pravidlo A.11, tj. škrtneme přímo třetí řádek (třetí řádek přičteme k referenčnímu a potom škrtneme). Stejným způsobem škrtneme i čtvrtý sloupec. Napětí U_3 je tedy nulové a nelze budit do uzlu 4, což má však stejný efekt jako budit do referenčního uzlu. Dostáváme tak základní redukovanou matici v následujícím tvaru (A.31):



$$\mathbf{C}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 & -C_2 \\ 0 & 0 & -C_2 & C_2 \end{bmatrix} \qquad \text{(A.30)}$$

	(1)	(2)	(4)
(1)	0	0	0
(2)	0	C_1	0
(3)	0	0	$-C_2$

(A.31)

Nyní již lze sestavit celkovou kapacitní matici a aplikovat vliv jednotlivých spínačů. Vliv spínače S_1 se projeví součtem řádků a sloupců 1 a 2 – k řádku (sloupci) 2 přičteme řádek (sloupec) 1 a ten pak vypustíme. Spínač S_2 připojuje uzel $\bar{2}$ (v liché fázi) k uzlu referenčnímu (vlivem OZ je uzel $3 \equiv 0$). Škrtneme tedy řádek $\bar{2}$ a sloupec $\bar{2}$. Uzel $\bar{1}$ (v liché fázi) je opět odpojen, a tudíž opět vypustíme řádek a sloupec $\bar{1}$. Tím dostaneme výslednou maticovou reprezentaci daného obvodu, přičemž opět platí $U_1(z) \equiv U_{1e}(z) = U_{2e}(z) \equiv U_2(z)$.

$$\begin{bmatrix} Q_{1s} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & -C_2 & \frac{C_2}{\sqrt{z}} \\ -\frac{C_1}{\sqrt{z}} & \frac{C_2}{\sqrt{z}} & -C_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{1s} \\ U_{4s} \\ U_{4l} \end{bmatrix}, \tag{A.32}$$

Pro výpočet přenosových funkcí odpovídá číslování algebraických doplňků pořadí řádků a sloupců ve výsledné kapacitní matici:

$$H_{14}(z) = \left.\frac{U_4(z)}{U_1(z)}\right|_{Q_4=0,\, Q_{\bar{4}}=0,\, Q_{\bar{1}}=0} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}} = -\frac{C_1}{C_2}\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}\,, \tag{A.33}$$

$$H_{1\bar{4}}(z) = \left.\frac{U_{\bar{4}}(z)}{U_1(z)}\right|_{Q_4=0,\, Q_{\bar{4}}=0,\, Q_{\bar{1}}=0} = \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{11}} = -\frac{C_1}{C_2}\frac{z^{-1/2}}{1-z^{-1}}\,. \tag{A.34}$$

V případě operačního zesilovače s konečným zesílením vyjdeme z původní matice (A.30). Z ní opět sestavíme celkovou kapacitní matici dle (A.26), na kterou dále aplikujeme vliv napětím řízeného zdroje napětí se zesílením A_d podle pravidla A.12. Nakonec aplikujeme na matici vliv spínačů S_1 a S_2 stejně jako v předchozím případě. Výsledná matice soustavy má následující tvar (pro lepší orientaci jsou opět označeny řádky a sloupce čísly, které odpovídají daným uzlům):

	$(1+2)$	(3)	(4)	$(\bar{2}+\bar{3})$	$(\bar{4})$
$(1+2)$	C_1	0	0	$-z^{-1/2}C_1$	0
(3)	0	C_2	$-C_2$	$-z^{-1/2}C_2$	$z^{-1/2}C_2$
(4)	0	A_d	-1	0	0
$(\bar{2}+\bar{3})$	$-z^{-1/2}C_1$	$-z^{-1/2}C_2$	$z^{-1/2}C_2$	C_1+C_2	$-C_2$
$(\bar{4})$	0	0	0	A_d	-1

Obvod je opět buzen pouze v sudé fázi – v liché fázi je vstup obvodu odpojen, tj. musí platit $Q_{\bar{1}} = 0$. Z přenosů existují pouze napěťové přenosy typu H_{14} a $H_{1\bar{4}}$ a existují pouze přenosy naprázdno, tj. pro $Q_4 = 0$ a $Q_{\bar{4}} = 0$, jelikož pro výstup nakrátko (podmínka $U_4 = 0$ nebo $U_{\bar{4}} = 0$) nelze analýzu provést – nelze zkratovat výstup OZ.

Výrazy pro napěťové přenosy jsou v tomto případě samozřejmě složitější, viz. (A.35) a (A.36). Číslování subdeterminantů je opět podle pořadí řádků a sloupců v matici, nikoli podle číslování uzlů. Čtenář se může přesvědčit, že pro limitní případ $\lim_{A_d=\infty} H_{14}(z)$ a $\lim_{A_d=\infty} H_{1\bar{4}}(z)$, dostane výsledky podle (A.33) a (A.34).

$$H_{14}(z) = \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{11}} = -\frac{C_1 A_d (A_d - 1)}{(C_2 + C_1 - 2C_2 A_d - C_1 A_d + C_2 A_d^2) z - C_2 + 2C_2 A_d - C_2 A_d^2} \tag{A.35}$$

$$H_{1\bar{4}}(z) = \frac{\Delta_{15}}{\Delta_{11}} = -\frac{\sqrt{z} C_1 A_d (A_d - 1)}{(C_2 + C_1 - 2C_2 A_d - C_1 A_d + C_2 A_d^2) z - C_2 + 2C_2 A_d - C_2 A_d^2} \tag{A.36}$$

Uvedený postup a obdržené výsledky platí pro idealizované obvody, tj. pro případ kdy se prakticky neuplatní nabíjecí a vybíjecí časy kapacitorů, viz stranu XVII-97.

Pomocí uvedené metody lze analyzovat pouze idealizované SC obvody obsahující základní lineární prvky: V, C, A – ideální OZ, spínače S, VCVS, CCCS. Nelze zařadit R, L, I, VCCS (G) a CCVS (H). Více o analýze SC obvodů viz [16]. Dále následuje postup sestavení matice a analýzy obvodů s periodicky spínanými proudy.

A.6. Sestavení matice periodicky spínaného SI obvodu

Pro analýzu **idealizovaných, periodicky spínaných obvodů se spínanými proudy (SI)** s výhodou používáme maticové metody analogicky k metodě uzlových napětí (A.1), resp. metodě uzlových nábojových rovnic (A.23). V tomto případě se jedná o obecný zápis (A.37), který lze pro obvod spínaný ve dnou fázích formulovat dle (A.38, analogicky k (17.89) pro SC obvody:

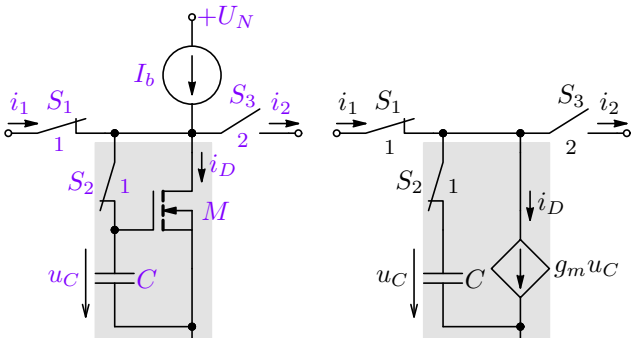
$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{I}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{U} = \mathbf{Y^{-1}} \cdot \mathbf{I} \tag{A.37}$$

kde $\mathbf{Y}$ je admitanční matice soustavy (lineárního obvodu),
$\mathbf{U}$ je vektor neznámých uzlových napětí a
$\mathbf{I}$ je vektor všech budících proudů do jednotlivých uzlů soustavy.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_e(z) \\ \mathbf{I}_o(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{ee} & -z^{-\frac{1}{2}}\mathbf{G}_{eo} \\ -z^{-\frac{1}{2}}\mathbf{G}_{oe} & \mathbf{G}_{oo} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_e(z) \\ \mathbf{U}_o(z) \end{bmatrix} \tag{A.38}$$

kde $\mathbf{I}_e(z)$, resp. $\mathbf{I}_o(z)$ je opět vektor budicích proudů nábojů v sudé (1.), resp. liché (2.) fázi, $\mathbf{U}_e(z)$, resp. $\mathbf{U}_o(z)$ je vektor uzlových napětí sudé (1.), resp. liché (2.) fázi a $\mathbf{G}_{ee}$, resp. $\mathbf{G}_{eo}$, ...jsou kapacitní matice obvodu pro přenosy ze sudé (1.) do sudé (1.), resp. ze sudé (1.) do liché (2.) fáze, ... Jejich sestavení a použití je ukázáno dále. Vzhledem k využití pouze dvoufázově spínaných obvodů je využito značení dle (17.87), tj. $U_1(z) \equiv U_{1e}(z)$, resp. $U_{\bar{1}}(z) \equiv U_{1o}(z)$ pro napětí v uzlu 1 v 1. (sudé), resp. 2. (liché) fázi.

Maticový zápis (A.38) je vyjádřením zobecněné metody uzlových napětí pro obvod spínaný ve dvou fázích. Matice jsou skutečně vodivostní – neobsahují žádní akumulační prvky a její sestavení odpovídá pravidlům pro sestavování kapacitní matice, popsané v podkapitole A.5. Vzhledem k tomu, že SI obvody obsahují pouze spínače a aktivní prvky (odpor je modelován pomocí VCVS a kapacitor indikuje pouze paměť), lze sestavovat přímo celkovou matici, přičemž do ní zapisujeme jednotlivé paměťové buňky, jako základní prvky SI obvodu, tj. pro obvod z obrázku 17.85.



Vzhledem k relaci $I_{\bar{1}} = -I_{\bar{2}}$, platí pro řízení spínače v 1. fázi dle modelu (b):

$$\begin{aligned} I_1(z) &= g_m U_1(z), \\ I_{\bar{1}}(z) &= z^{-1/2} g_m U_1(z). \end{aligned} \tag{A.39}$$

Pokud by byl paměťový kapacitor nabíjen v liché fázi, platí:

$$\begin{aligned} I_{\bar{1}}(z) &= g_m U_{\bar{1}}(z), \\ I_1(z) &= z^{-1/2} g_m U_{\bar{1}}(z). \end{aligned} \tag{A.40}$$

Obrázek A.4: Zpožďovací SI obvod (a), jeho lineární model (b) a popis pro spínání v 1. i ve 2. fázi.

Maticový zápis relací (A.39), resp. (A.40) je uveden níže (a), tj. pro řízení v 1. fázi, resp. (b) pro řízení ve fázi 2. Zápis (c) je popisem buňky s výstupem v uzlu (5) a řízením v 1. fázi z uzlu (2) dle M_2 z obrázku 17.86.

(a):

	U_1	$U_{\bar{1}}$
I_1	g_m	0
$I_{\bar{1}}$	$z^{-1/2}g_m$	0

(b):

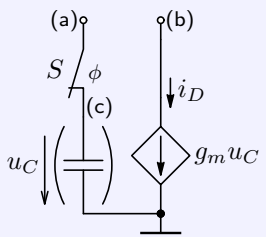
	U_{1s}	$U_{\bar{1}}$
I_{1s}	0	$z^{-1/2}g_m$
$I_{\bar{1}}$	0	g_m

(c):

	U_2
I_5	α
$I_{\bar{5}}$	$z^{-1/2}\alpha$

(A.41)

Pravidlo A.13 *Zařazení zpožďovací SI buňky do vodivostní matice obvodu*



K prvku matice, který je v řádku odpovídajícímu uzlu buňky (b) a sloupci odpovídajícímu uzlu buňky (a), přičteme převodní vodivost (g_m) tranzistoru buňky, a to pouze v řádku a sloupci odpovídajícím fázi (ϕ), ve které spíná řídící spínač. Dále přičteme převodní (normovanou) vodivost daného tranzistoru, vynásobenou členem $z^{-1/2}$ k prvku, který je ve sloupci, odpovídajícímu uzlu buňky (a) a v řádku, odpovídajícímu uzlu (b), a to pouze ve sloupci odpovídajícímu fázi, ve které spíná řídící spínač a v řádku odpovídajícímu fázi opačné.

Pozn.: Převodní vodivost tranzistoru je přímo úměrná šířce kanálu tranzistoru MOS, tj. $g_m = k\alpha$, kde k je konstanta dle (15.3), resp. (15.4). Vzhledem k tomu, že výsledkem analýzy jsou proudové přenosy (podíly), tak se uplatní pouze relativní (poměrné) vodivosti α. Z tohoto důvodu se používá zjednodušený zápis uvedený v případě (c) vztahu (A.41). Obecně by bylo třeba relativní vodivosti α vynásobit normovací vodivostí.

Proudové přenosy jsou definovány obdobně jako v případě SC obvodů, viz (17.91). Pokud je výstupní proud orientován ven z obvodu, má v maticovém zápisu záporné znaménko, stejně jako v případě nábojových přenosů. Pro dvoufázově spínaný obvod se vstupním proudem I_1 a výstupním I_2 definujeme opět čtyři základní proudové přenosy analogicky k napěťovým přenosům SC obvodů (17.90):

$$\begin{bmatrix} -I_2 \\ -I_{\bar{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{12} & H_{1\bar{2}} \\ H_{\bar{1}2} & H_{\bar{1}\bar{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_{\bar{2}} \end{bmatrix} \tag{A.42}$$

kde $H_{12}(z) \equiv H_{ee}(z)$, resp. $H_{1\bar{2}}(z) \equiv H_{eo}(z)$ je přenos vstupního proudu v první fázi na výstupní proud v první resp. druhé fázi, ... Ke každému přenosu pak existují další 4 varianty dle zakončení:

$$H_{12} = \left.\frac{-I_2}{I_1}\right|_{U_2=0,\, I_{\bar{2}}=0,\, I_{\bar{1}}=0} \tag{A.43}$$

$$H_{12} = \left.\frac{-I_2}{I_1}\right|_{U_2=0,\, I_{\bar{2}}=0,\, U_{\bar{1}}=0} \tag{A.44}$$

$$H_{12} = \left.\frac{-I_2}{I_1}\right|_{U_2=0,\, U_{\bar{2}}=0,\, I_{\bar{1}}=0} \tag{A.45}$$

$$H_{12} = \left.\frac{-I_{2s}}{I_{1s}}\right|_{U_2=0,\, U_{\bar{2}}=0,\, U_{\bar{1}}=0} \tag{A.46}$$

Vlastní výpočet proudových přenosů definovaných podle (A.42) můžeme vyjádřit pomocí algebraických doplňků, jak bylo uvedeno v kapitole A.3 dle (A.9). Jedná se o výpočet proudových přenosů pro různá zakončení: za podmínek uvedených v (A.43) dostaneme výsledné vztahy dle (A.47), za podmínek (A.44) vztahy (A.48), za podmínek (A.45) vztahy (A.49) a konečně za podmínek (A.46) vztahy[1] (A.50):

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{22}} & \frac{\Delta_{\bar{1}2}}{\Delta_{22}} \\ \frac{\Delta_{1\bar{2}}}{\Delta_{\bar{2}\bar{2}}} & \frac{\Delta_{\bar{1}\bar{2}}}{\Delta_{\bar{2}\bar{2}}} \end{bmatrix} \qquad \text{(A.47)}, \qquad \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\Delta_{12,\bar{1}\bar{1}}}{\Delta_{22,\bar{1}\bar{1}}} & \frac{\Delta_{\bar{1}2,11}}{\Delta_{22,11}} \\ \frac{\Delta_{1\bar{2},\bar{1}\bar{1}}}{\Delta_{\bar{2}\bar{2},\bar{1}\bar{1}}} & \frac{\Delta_{\bar{1}\bar{2},11}}{\Delta_{\bar{2}\bar{2},11}} \end{bmatrix} \qquad \text{(A.48)}$$

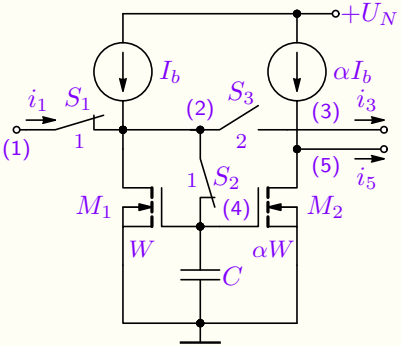
$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} \frac{\Delta_{12,\bar{2}\bar{2}}}{\Delta_{22,\bar{2}\bar{2}}} & \frac{\Delta_{\bar{1}2,\bar{2}\bar{2}}}{\Delta_{22,\bar{2}\bar{2}}} \\ \frac{\Delta_{1\bar{2},22}}{\Delta_{\bar{2}\bar{2},22}} & \frac{\Delta_{\bar{1}\bar{2},22}}{\Delta_{\bar{2}\bar{2},22}} \end{bmatrix} \qquad \text{(A.49)}, \qquad \mathbf{H}_4 = \begin{bmatrix} \frac{\Delta_{12,\bar{2}\bar{2},\bar{1}\bar{1}}}{\Delta_{22,\bar{2}\bar{2},\bar{1}\bar{1}}} & \frac{\Delta_{\bar{1}2,\bar{2}\bar{2},11}}{\Delta_{22,\bar{2}\bar{2},11}} \\ \frac{\Delta_{1\bar{2},22,\bar{1}\bar{1}}}{\Delta_{\bar{2}\bar{2},22,\bar{1}\bar{1}}} & \frac{\Delta_{\bar{1}\bar{2},22,11}}{\Delta_{\bar{2}\bar{2},22,11}} \end{bmatrix} \qquad \text{(A.50)}$$

Použití metody analýzy je ukázáno na následujících příkladech.

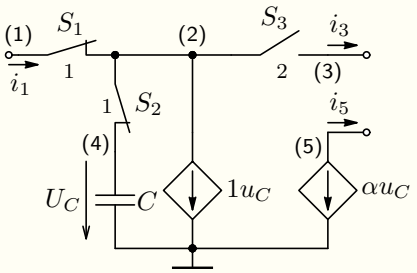
[1] V tomto případě je výpočet přenosů proveden pomocí trojných algebraických doplňků.

Příklad A.10 Analýza SI proudového zrcadla

Zadání: Sestavte matici obvodu zpožďovacího proudového zrcadla implementovaného SI technikou uvedeného obrázkem (17.101). Z maticového vyjádření určete odpovídající proudové přenosy.

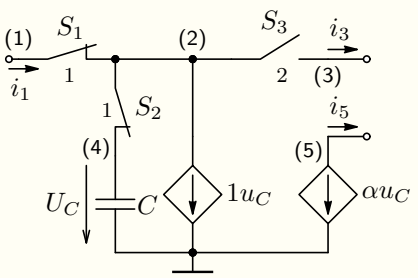


Řešení: Nejprve sestavíme model obvodu dle modelu paměťové buňky dle obrázku A.4.



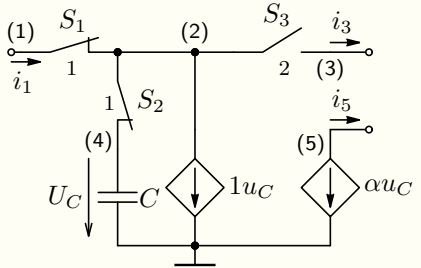
Obvod obsahuje pouze čtyři nezávislé uzly, jelikož buňky (proudové zdroje) jsou řízeny v první fázi napětím, pro které vlivem spínače S_2 platí $u_2 = u_4 = u_{\bar{4}}$.

Podle výše uvedeného bude vodivostní matice hodnosti 8 (pro uzly (1), (2), (3) a (5) v obou fázích), přičemž jednotlivé paměťové buňky, resp. jejich modely do ní zařadíme a podle pravidla A.13. Takto vzniklá matice má následující tvar:



	(1)	(2)	(3)	(5)	$(\bar{1})$	$(\bar{2})$	$(\bar{3})$	$(\bar{5})$
(1)	0	0	0	0	0	0	0	0
(2)	0	1	0	0	0	0	0	0
(3)	0	0	0	0	0	0	0	0
(5)	0	α	0	0	0	0	0	0
$(\bar{1})$	0	0	0	0	0	0	0	0
$(\bar{2})$	0	$z^{-1/2}$	0	0	0	0	0	0
$(\bar{3})$	0	0	0	0	0	0	0	0
$(\bar{5})$	0	$z^{-1/2}\alpha$	0	0	0	0	0	0

Zařazením vlivu spínačů S_1 a S_3 a vyškrtnutím všech nulových řádků s příslušnými nulovými sloupci (výsledná matice musí být čtvercová, což je nutné pro výpočet determinantů a tím výsledných přenosů) dostaneme výslednou matici obvodu v následujícím tvaru:



	$(1+2)$	(5)	$(\bar{2}+\bar{3})$	$(\bar{5})$
$(1+2)$	1	0	0	0
(5)	α	0	0	0
$(\bar{2}+\bar{3})$	$z^{-1/2}$	0	0	0
$(\bar{5})$	$z^{-1/2}\alpha$	0	0	0

Redukce matice je pochopitelná. Uzel (3) je v první fázi odpojen, stejně jako uzel (1) ve fázi druhé, tj. $(\bar{1})$, proto jsou příslušné řádky i sloupce nulové a lze je vypustit. Dále je spínačem S_1 spojen uzel (1) s uzlem (2) a spínačem S_3 uzel $(\bar{2})$ s uzlem $(\bar{3})$. To odpovídá zbylým redukcím.

Pro přenosy do uzlu $(\bar{3})$ je třeba uzel (5) zkratovat na zemní svorku, tj. vypustit řádky i sloupce (5) a $(\bar{5})$, přičemž dostaneme matici vlevo s odpovídajícím přenosem dle (A.47). Obdobně pro přenosy do uzlu (5) je uzel $(\bar{3})$ třeba zkratovat, tj. vypustit řádek a sloupec $(\bar{3})$, přičemž dostaneme matici vpravo s odpovídajícími přenosy dle (A.49). Výsledky jsou shodné s (17.101).

	$(1+2)$	$(\bar{2}+\bar{3})$
$(1+2)$	1	0
$(\bar{2}+\bar{3})$	$z^{-1/2}$	0

	$(1+2)$	(5)	$(\bar{5})$
$(1+2)$	1	0	0
(5)	α	0	0
$(\bar{5})$	$z^{-1/2}\alpha$	0	0

$$H_{1\bar{3}} = \frac{I_{\bar{3}}(z)}{I_1(z)}\bigg|_{U_3=0,\, I_3=0,\, I_{\bar{1}}=0} = \frac{\Delta_{1\bar{3}}}{\Delta_{\bar{3}\bar{3}}} = -z^{-1/2} \tag{A.51}$$

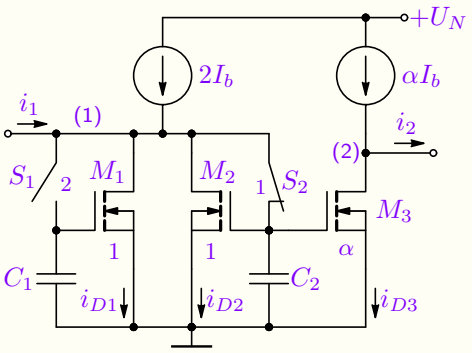
$$H_{15} = \frac{I_5(z)}{I_1(z)}\bigg|_{U_5=0,\, U_{\bar{5}}=0,\, I_{\bar{1}}=0} = \frac{\Delta_{15,\bar{5}\bar{5}}}{\Delta_{55,\bar{5}\bar{5}}} = -\alpha \tag{A.52}$$

Přenosy z druhé fáze neexistují a v tomto případě neexistuje ani přenos do první fáze.

$$H_{1\bar{5}} = \frac{I_{\bar{5}}(z)}{I_1(z)}\bigg|_{U_{\bar{5}}=0,\, U_5=0,\, I_{\bar{1}}=0} = \frac{\Delta_{1\bar{5},55}}{\Delta_{\bar{5}\bar{5},55}} = -\alpha z^{-1/2} \tag{A.53}$$

Příklad A.11 Analýza SI integrátoru

Zadání: Sestavte matici integrátoru implementovaného SI technikou uvedeného obrázkem (17.87). Z maticového vyjádření určete odpovídající proudové přenosy.



Řešení: Vodivostní matici obvodu sestavíme stejně jako v předchozím případě zařazením třech paměťových buněk podle pravidla A.13.

	(1)	(2)	$(\bar{1})$	$(\bar{2})$
(1)	1	0	$z^{-1/2}$	0
(2)	α	0	0	0
$(\bar{1})$	$z^{-1/2}$	0	1	0
$(\bar{2})$	$z^{-1/2}\alpha$	0	0	0

V tomto případě obsahuje obvod pouze dva nezávislé uzly, tj. hodnost matice je 4 (spínání ve dvou fázích) a dále se neredukuje, jelikož neobsahuje další spínače mimo spínače paměťových buněk.

Proudové přenosy za podmínek (A.43) a (A.44) nejsou v tomto případě vůbec definované (výstupní proud musí být odebírán v každé fázi). Přenosy za podmínek (A.46) sice definované jsou, ale nemají praktický význam (pro $U_{\bar{1}} = 0$ se degraduje činnost obvodu). Z tohoto důvodu určíme pouze přenosy podle (A.45):

	(1)	(2)	$(\bar{1})$	$(\bar{2})$
(1)	1	0	$z^{-1/2}$	0
(2)	α	0	0	0
$(\bar{1})$	$z^{-1/2}$	0	1	0
$(\bar{2})$	$z^{-1/2}\alpha$	0	0	0

$$H_{12}\big|_{U_2=0,\,U_2=0,\,I_{\bar{1}}=0} = \frac{\Delta_{12,\bar{2}\bar{2}}}{\Delta_{22,\bar{2}\bar{2}}} = -\frac{\alpha}{1-z^{-1}} = -\frac{\alpha z}{z-1}, \tag{A.54}$$

$$H_{1\bar{2}}\big|_{U_2=0,\,U_{\bar{2}}=0,\,I_{\bar{1}}=0} = \frac{\Delta_{\bar{1}2,\bar{2}\bar{2}}}{\Delta_{22,\bar{2}\bar{2}}} = -\frac{\alpha\sqrt{z}}{z-1}, \tag{A.55}$$

$$H_{\bar{1}2}\big|_{U_2=0,\,U_{\bar{2}}=0,\,I_1=0} = \frac{\Delta_{1\bar{2},22}}{\Delta_{\bar{2}\bar{2},22}} = \frac{\alpha\sqrt{z}}{z-1}, \tag{A.56}$$

$$H_{\bar{1}\bar{2}}\big|_{U_2=0,\,U_{\bar{2}}=0,\,I_1=0} = \frac{\Delta_{\bar{1}\bar{2},22}}{\Delta_{\bar{2}\bar{2},22}} = \frac{\alpha}{z-1}. \tag{A.57}$$

Číslování algebraických doplňků je zde uvedeno podle číslování uzlů. Pro jejich výpočet je však výhodnější uvést jejich číslování podle pořadí příslušných řádků a sloupců v matici. Např. pro doplněk $\Delta_{12,\bar{2}\bar{2}}$ bychom tedy psali $\Delta_{12,44}$, atd.

Na závěr je uvedena analýza uvedeného SI integrátoru s uvažováním výstupních vodivostí tranzistorů ($g_o \equiv G$ pro tranzistory M_1 a M_2 a $g_{o3} \equiv G_3$ pro tranzistor M_3). Ty lze modelovat zdrojem proudu řízeným vlastním napětím (viz obrázek 2.3) a následně do vodivostní matice. Jelikož se však jedná o „klasickou“ vodivost, tj. bez paměti (má nulový přenos mezi fázemi), *její vliv se projeví pouze v matici* $\mathbf{G}_{ss}$ a $\mathbf{G}_{ll}$. Výsledný tvar matice je uveden vpravo.

	(1)	(2)	$(\bar{1})$	$(\bar{2})$
(1)	$1+2G$	0	$z^{-1/2}$	0
(2)	α	G_3	0	0
$(\bar{1})$	$z^{-1/2}$	0	$1+2G$	0
$(\bar{2})$	$z^{-1/2}\alpha$	0	0	G_3

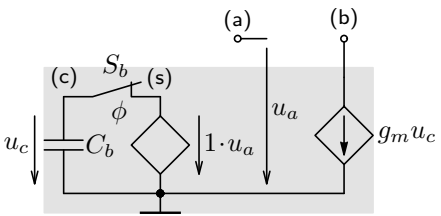
Příslušně se samozřejmě změní i proudové přenosy, např. pro přenos A.54 bude pak platit:

$$H_{12}(z) = \left.\frac{I_2(z)}{I_1(z)}\right|_{U_2=0,\, U_2=0,\, I_1=0} = -\frac{\alpha(1+2G)z}{(4G^2+4G+1)z-1} \tag{A.58}$$

Je však nutné zdůraznit, že i když lze tímto způsobem zařazovat do obvodu „klasické“ vodivosti, resp. rezistory, stále se jedná o analýzu idealizovaného obvodu, což je dáno podstatou dané metody. To znamená, že se neberou v úvahu přechodové děje při nabíjení a vybíjení paměťových kapacitorů a předpokládá se, že k těmto dějům nedochází, resp. odezní vždy před přechodem do další fáze.

Níže je uvedena ukázka modelu zpožďovací buňky dle pravidla A.13 a její netlist pro zařazení do upravené matice pro SI obvody pro algoritmus analyzátoru GEEC. Obsahuje kapacitor, který slouží jako paměť, tj. přenos z jedné fáze do druhé. Zpožďovací buňka tvořená tranzistorem M_2 zrcadla z příkladu A.10 se pak zapíše jako:

```
X2 5 4 1 SIb PARAMS: gm=alpha.
```



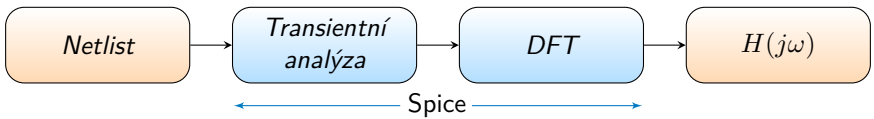

```
.subckt SIb b a ph
Eb s~0 a 0 1
Sb s~c ph
Cb c 0 1
Gb b 0 c 0 gm
.ends SIb
```

Obrázek A.5: Model zpožďovací SI buňky a její netlist pro algoritmus analyzátoru GEEC.

Pomocí uvedené metody lze opět analyzovat pouze idealizované SI obvody obsahující základní lineární prvky vyjma induktoru (L), nenulového napěťového zdroje (V), tj. lze použít zkrat s výpočtem proudu a dále nelze zařadit CCVS (H – zdroj napětí řízený proudem). Více o maticové analýze a výpočtu přenosů SI obvodů viz [16].

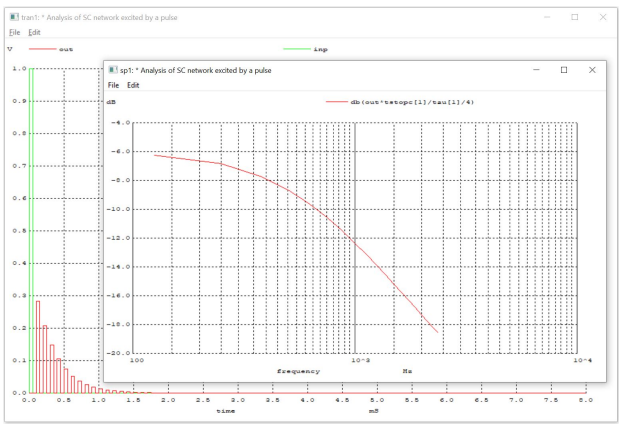
A.7. Kmitočtová analýza spínaných obvodů ve Spice

Výše uvedená metoda je použitelná pouze u idealizovaných obvodů, tj. obvodů, kde dojde k ustálení nabíjecích procesů před každou změnou spínačů. Pokud toto není dodrženo, lze využít metod posaných zde, případně zde. Pomocí programu Spice lze při správném nastavení analyzovat kmitočtové vlastnosti spínaného obvodu včetně jeho parazitních vlastností a nelinearit následovně:



- Metoda je založena na časové (transientní) analýze obvodu a následném výpočtu DFT z časového vektoru vzorků transientní analýzy, tj. **nelze použít přímou AC analýzu**.
- Obvod může být buzen impulzem nebo sadou harmonických signálů.
- Nastavení parametrů transientní analýzy je klíčové pro platnost celé analýzy.
- V případě periodického buzení je třeba vypočítat časovou odezvu (vstupní data Fourierovy analýzy, resp. DFT) v ustáleném stavu, v případě buzení pulsů musí odezva obsahovat naopak celý přechodový děj.
- Pro minimální chybu výpočtu musí časový úsek pro výpočet DFT odpovídat celočíselnému násobku nejdelší periody vstupního (analyzovaného) signálu a zároveň musí být celočíselným násobkem spínací periody obvodu.
- Implementace DFT v programech Spice předpokládají ekvidistantní vzorky $\Rightarrow$ linearizace časové osy vstupních dat, zejména pro malou relativní chybu výpočtu `RELTOL`. Více o nastavení programu Spice zde.

Následuje ukázka výpisu vstupního souboru pro program WinSpice pro analýzu SC integračního článku z příkladu A.8, tj. definice parametrů, netlistu a vlastních příkazů programu. V kódu jsou barevně odlišeny části pro buzení pulzem (zeleně) a pro buzení 19 sinusovými signály (červeně). Níže je uvedena výsledná časová odezva a kmitočtová charakteristika, více viz komentář.



Definice parametrů netlistu

```
*clock frequency
.PARAM fc=10000
*the biggest input/clock signal frequency ratio
.PARAM n=80
*number of time samples per clock period
.PARAM m=200
*number of input signal periods to reach steady
state
.PARAM nop=0 nop=1
*number of signal periods for computation
.PARAM nops=1 nops=2
*number of signal frequencies
.PARAM km=19

.PARAM Tstop={n/fc*(nop+nops)}
.PARAM Tstep={1/fc/m}
.PARAM Tstart={n/fc*nop}
.PARAM Fstep={fc/n}
.PARAM Fstop={Fstep*km}

.OPTION reltol=1e-2
.OPTION trtol=4
.OPTION CHGTOL=1e-16
```

Netlist obvodu

```
.MODEL SMODR SW(VT=0e-3 RON=5000 ROFF=1e13)
.MODEL SMOD SW(VT=0e-3 RON=0.1 ROFF=1e13)

*******clock signal*****************************************
B2 clk 0 V=sin(2*pi*{fc}*TIME)

*******Exciting by the pulse*********************************
V1 1 0 PWL(0 0 0 1 {1/fc/2} 1 {1/fc/2} 0) DC 0
*******Exciting by set of sinusoidal signals*****************
B1 in 0 V=1+sin(2*pi*{fc/n]}*TIME)+sin(2*2*pi*{fc/n}*TIME)+ ... +
+ ... + sin(18*2*pi*{fc/n}*TIME)+ sin(19*2*pi*{fc/n}*TIME)

*******Netilist of SC network*****************************
S1 1 3 clk 0 SMODR
S2 3 2 0 clk SMODR
C1 3 0 6.2n
C2 2 0 10n
S5 2 4 clk 0 SMOD
S6 4 0 0 clk SMOD
```

Řídící sekvence

```
.control
set method=gear

******transient analysis********
tran {Tstep} {Tstop} {Tstart}

******output voltage******
let out=v(4)
let inp=v(1)
plot out inp

******DFT calculation***********
linearize out

set specwindow = none
spec {Fstep} {Fstop} {Fstep} out

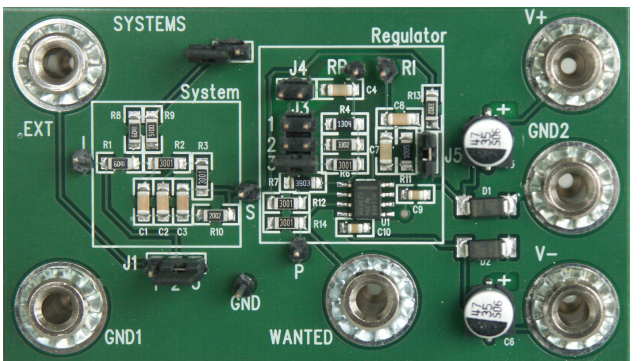
*plot of the magnitude response*
plot db(out*Tstop/tau/4) xlog
.endc
.end
```

Soubor je k dispozici zde: scrc.cir pro buzení pulzem a scrc-sin.cir pro buzení harmonickými signály. Dále soubor pro analýzu SC bikvadu scbiq.cir a SI integrátoru si_int.cir.

Dodatek B

Měření vlastností lineárního zpětnovazebního systému

V této části je uveden komentář k měření na laboratorním přípravku zpětnovazebního systému. Základní komentář je uveden v této videoukázce a závěrečné vysvětlení a ověření stability systému měřením v této videoukázce. Podrobný návod na měření s postupem měření, všemi schématy včetně matematického popisu je uveden zde.

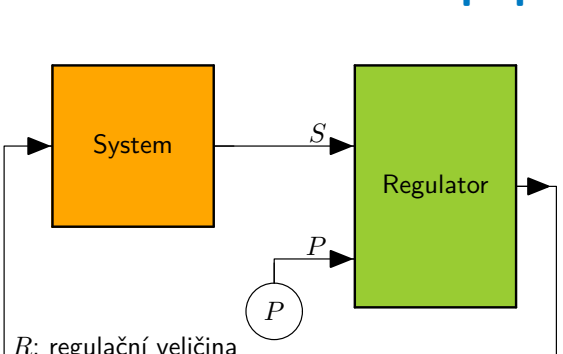


© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

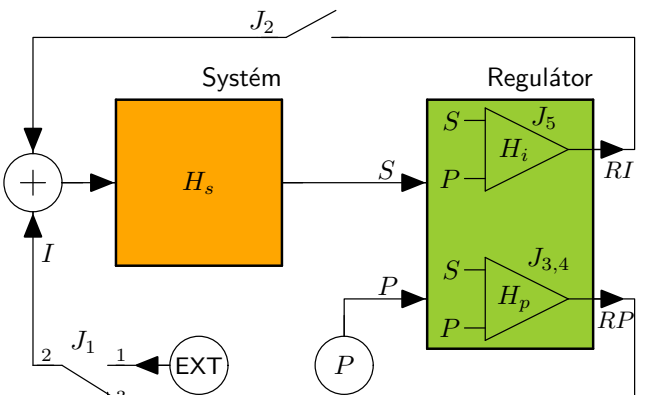
B.1. Cíl měření

Měření je motivací, jeho cílem je ukázat základní zákonitosti funkce zpětnovazebního elektronického systému/regulátoru, včetně zjišťování jeho stability pomocí měření kmitočtových vlastností otevřené ZV smyčky.

B.2. Blokové schéma přípravku



S: regulovaná veličina, P: požadovaná hodnota

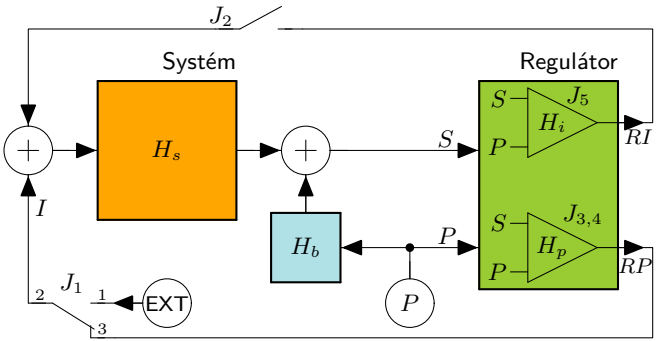


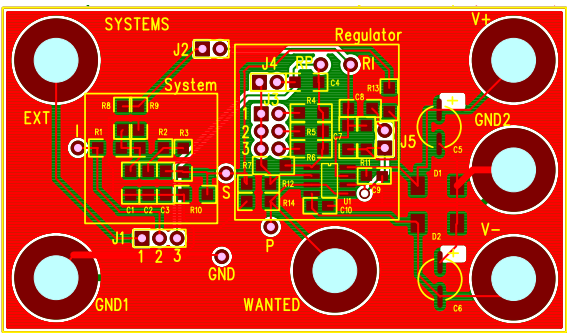
Obrázek B.1: Základní a rozšířené blokové schéma laboratorního přípravku zpětnovazebního systému.

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

B.3. Měření základních statických parametrů přípravku

1. Počáteční nastavení: J1 v poloze 2-3, J2 rozpojen, J3 v poloze 3 a J4 spojen.
2. DC měření: na vstup P připojit 1 V DC a změřit DC napětí v bodě S pro $H_p = A = 1,\ 10,\ 100$ a 130 s rozpojeným i spojeným přepínačem J4 a dále pro případ $H_p = 1$ se zařazeným integračním členem (J2 spojen).



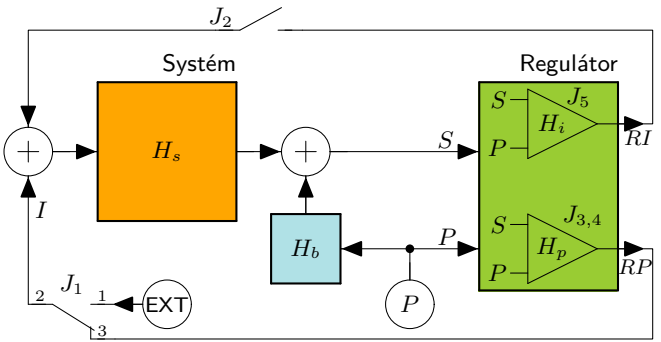


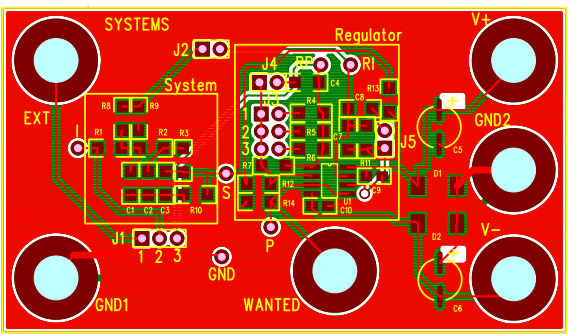
Obrázek B.2: Rozkreslené blokové schéma a rozložení součástek na plošném spoji laboratorního přípravku.

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

B.4. Měření základních dynamických parametrů přípravku

3. Počáteční nastavení přepínačů (bod 1.).
4. Na vstup P připojit obdélníkový signál o velikosti $1\,\mathrm{V}$ a kmitočtu $10\,\mathrm{Hz}$,
5. Na osciloskopu zobrazit signály P a S pro $H_p = 1,\ 10,\ 100$ a 130 s rozpojeným i spojeným přepínačem J4 a dále pro $H_p = 1$ s integračním členem (J2 spojen, J3 v poloze 3, J4 spojen) pro obě časové integrační konstanty (J5 spojen i rozpojen).

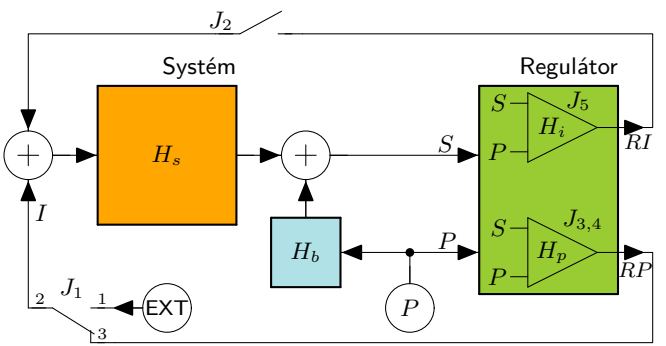


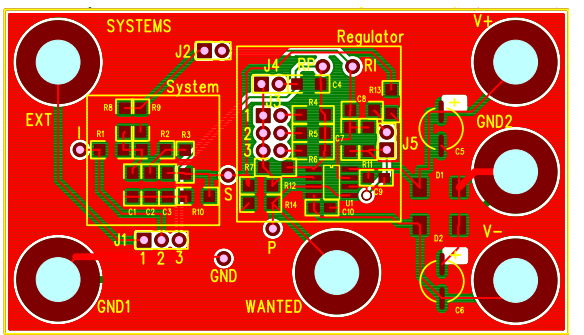


© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

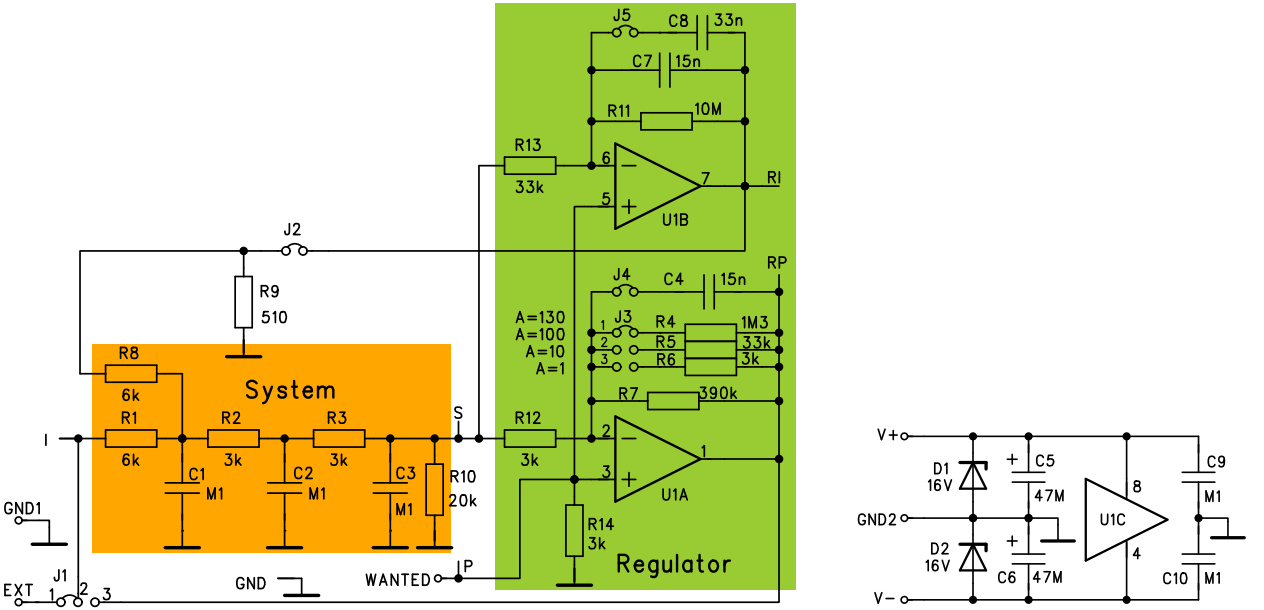
B.5. Měření kmitočtových vlastností otevřené ZV smyčky regulační soustavy

6. Počáteční nastavení: přepínač J1 v poloze 1-2, J2 rozpojen, J3 v poloze 3, J4 i J5 spojeny.
   Na vstup EXT připojte harmonický signál z externího generátoru o takové amplitudě, aby výstupní signál RP nebyl omezen (cca $1\,\mathrm{V_{p\text{-}p}}$).
7. AC měření: Změřte amplitudovou charakteristiku $H(j\omega) = RP(j\omega)/S(j\omega)$ při f_0, kdy fáze přenosu $\varphi_H(f_0) = 0$ a $\varphi_H(f_l) \doteq 180°$ (cca $f_l \doteq 10\,\mathrm{Hz}$) pro $H_p = 1,\ 10,\ 100$ a 130 s rozpojeným i spojeným přepínačem J4. Výsledky zapište a vyhodnoťte podmínky pro nestabilitu a filtrační vlastnosti soustavy.



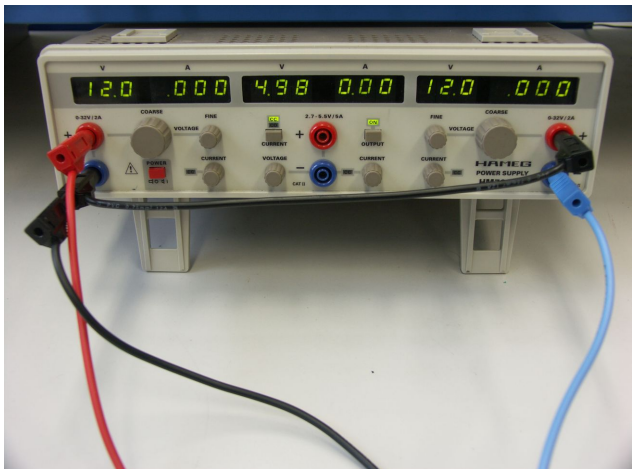


© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL



Obrázek B.3: Kompletní elektrické zapojení přípravku zpětnovazebního systému.

B.6. Zapojení napájecího zdroje přípravku



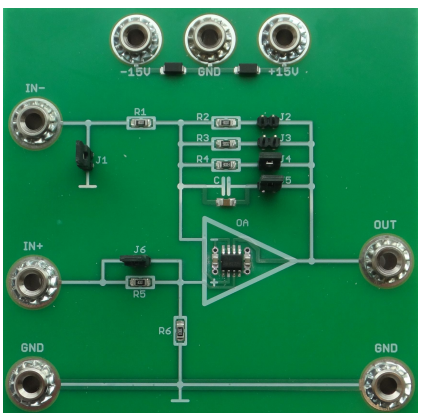
$V+$ GND $V-$

Obrázek B.4: Zapojení laboratorního zdroje pro získání symetrického napájecího napětí pro přípravek.

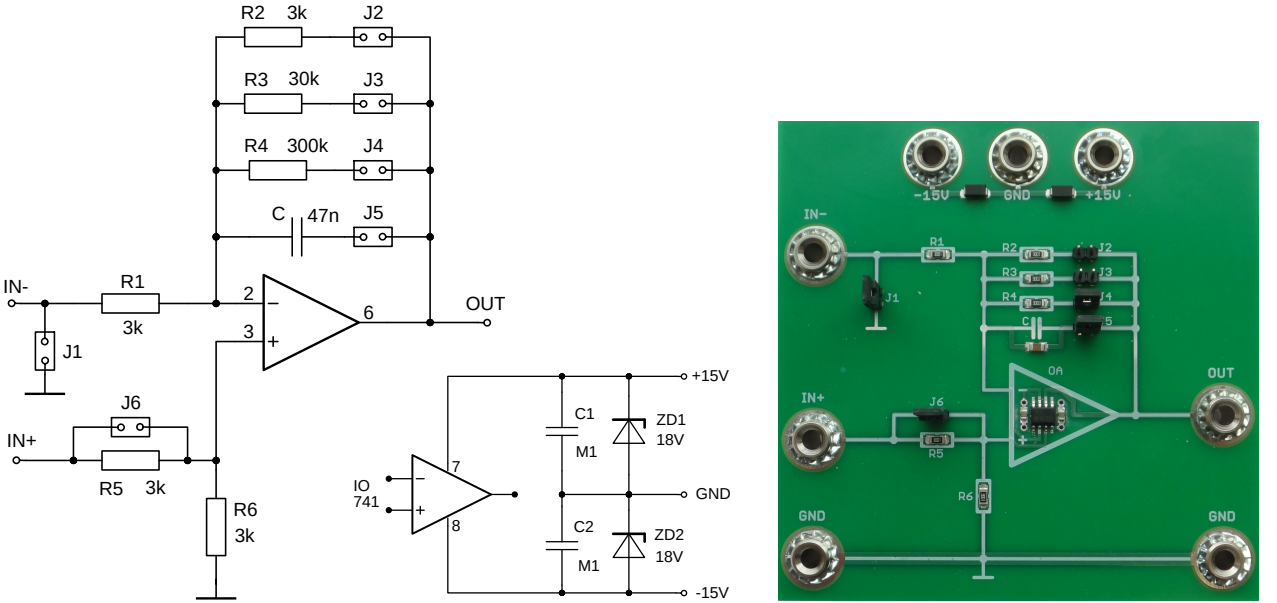
Dodatek C

Měření základních zapojení s operačním zesilovačem

V této části je uveden komentář k měření na laboratorním přípravku operačního zesilovače. Komentář je uveden v této videoukázce a experiment kmiotočtové závislosti zesílení zde. Podrobný návod na měření zde a odpovídající analýza obvodu. Přípravek s operačním zesilovačem LM741 umožňuje realizovat zapojení základních operačních sítí: invertující a neinvertující zesilovač, ztrátový integrátor i rozdílový zesilovač, přičemž zisk je možné měnit volbou odporu ve zpětnovazební větvi, viz celkové zapojení na obrázku C.1 a jednotlivé varianty zapojení na obrázku C.2. Zde je pak odkaz na analýzu uvedeného zapojení.



© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL



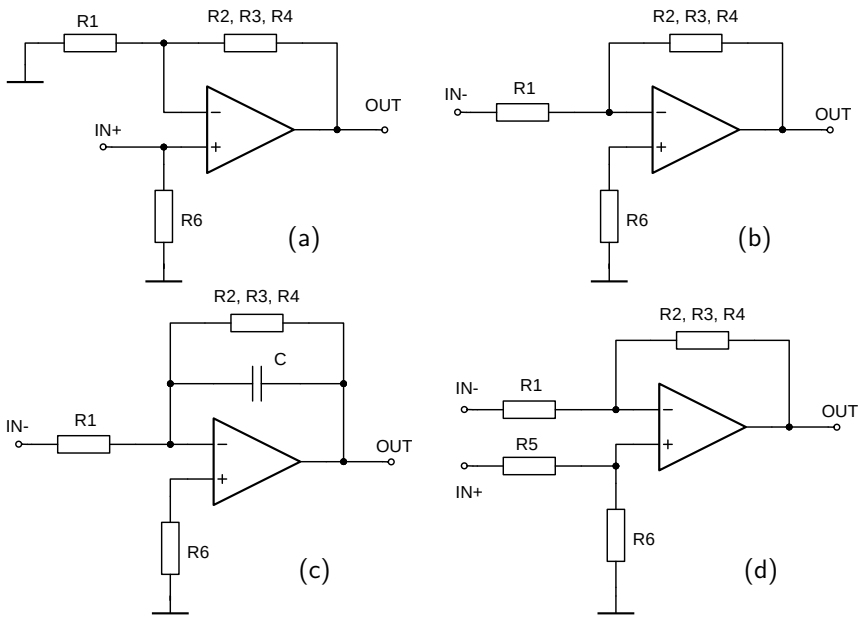
Obrázek C.1: Kompletní zapojení a rozmístění součástek na laboratorním přípravku operačního zesilovače.

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

C.1. Cíle měření

Cílem je seznámit se základním chováním operačního zesilovače pomocí statického měření na elementárních zapojeních invertujícího a neinvertujícího zapojení pro různé velikosti zesílení změnou zpětnovazebního odporu – obrázek (a) a (b) , případně i rozdílového zesilovače (d). Teorie i analýzy jsou uvedeny v kapitole 11.3 a 11.9.4.

Dále přípravek umožňuje měření s kmitočtových vlastností ztrátového integrátoru (c), opět pro různé hodnoty zpětnovazebního odporu, tj. různý DC zisk a různé časové konstanty, viz kapitolu 11.10.



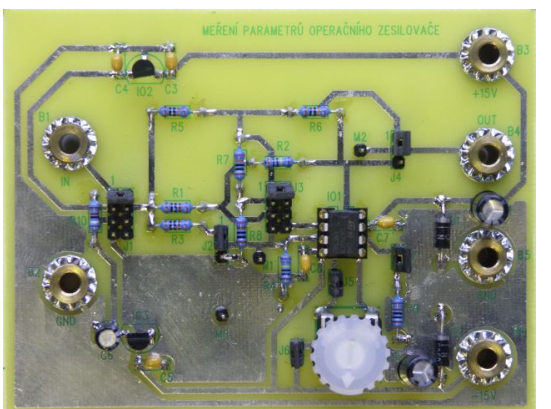
Obrázek C.2: Zapojení jednotlivých variant obvodů s OZ pro měření.

Dodatek D

Měření parametrů operačního zesilovače

V této části je uveden komentář k měření základních vlastností operačního zesilovače. Jedná se o měření založená na elementárních měřicích metodách využívajících vlastního operačního zesilovače. Tyto metody jsou vysvětleny ve videoukázce a jsou podloženy analýzou jednotlivých zapojení v simulátoru GEEC. Na všechny analýzy je uveden odkaz (kliknutím na příslušný obrázek). Vlastní měřicí přípravek a podrobný návod na měření je uveden zde.

Existuje řada dalších, složitějších a propracovanějších zapojení pro měření parametrů OZ, viz např. V. Tecl, Diplomová práce FEL ČVUT, 2025

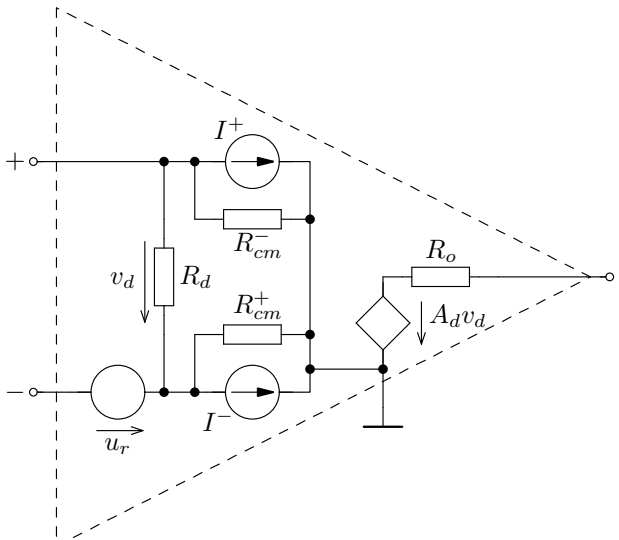


© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

D.1. Cíl měření

Cílem měření je seznámit se s měřením základních parametrů reálného operačního zesilovače LM741, a to jak statických, tak dynamických. Hlavními úkoly laboratorního měření jsou:

1. měření chybových parametrů:
   - vstupního klidového proudu I_b,
   - vstupního napěťového ofsetu (napěťové nesymetrie vstupu),
   - činitele potlačení souhlasného signálu,
2. měření statických parametrů:
   - stejnosměrného zesílení A_0,
   - výstupního odporu R_o,
3. měření dynamických parametrů:
   - kmitočtové závislosti zesílení $A(\omega)$ a
   - rychlosti přeběhu S.



Obrázek D.1: Základní lineární model reálného OZ.

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

Electrical Characteristics (Note 5)

Parameter	Conditions	LM741A			LM741			LM741C			Units
		Min	Typ	Max	Min	Typ	Max	Min	Typ	Max	
Input Offset Voltage	$T_A = 25^\circ C$										
	$R_S \le 10\ k\Omega$					1.0	5.0		2.0	6.0	mV
	$R_S \le 50\Omega$		0.8	3.0							mV
	$T_{AMIN} \le T_A \le T_{AMAX}$										
	$R_S \le 50\Omega$			4.0							mV
	$R_S \le 10\ k\Omega$						6.0			7.5	mV
Average Input Offset Voltage Drift				15							$\mu V/^\circ C$
Input Offset Current	$T_A = 25^\circ C$		3.0	30		20	200		20	200	nA
	$T_{AMIN} \le T_A \le T_{AMAX}$			70		85	500			300	nA
Input Bias Current	$T_A = 25^\circ C$		30	80		80	500		80	500	nA
	$T_{AMIN} \le T_A \le T_{AMAX}$			0.210			1.5			0.8	μA
Input Resistance	$T_A = 25^\circ C$, $V_S = \pm 20V$	1.0	6.0		0.3	2.0		0.3	2.0		$M\Omega$
	$T_{AMIN} \le T_A \le T_{AMAX}$, $V_S = \pm 20V$	0.5									$M\Omega$
Input Voltage Range	$T_A = 25^\circ C$							±12	±13		V
	$T_{AMIN} \le T_A \le T_{AMAX}$				±12	±13					V

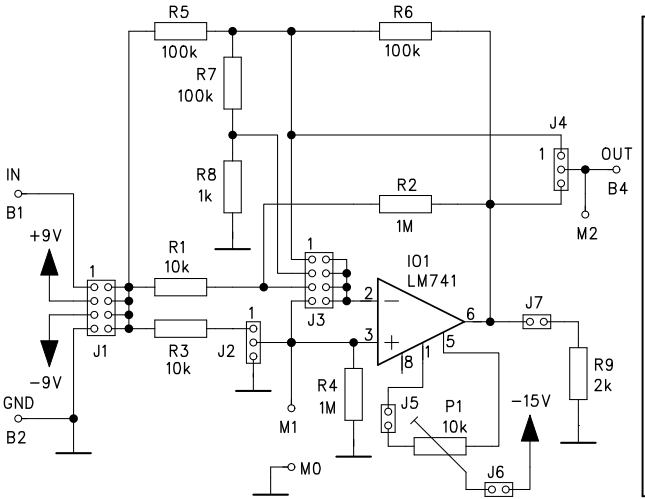
Obrázek D.2: Část katalogového listu s výpisem parametrů OZ LM741.

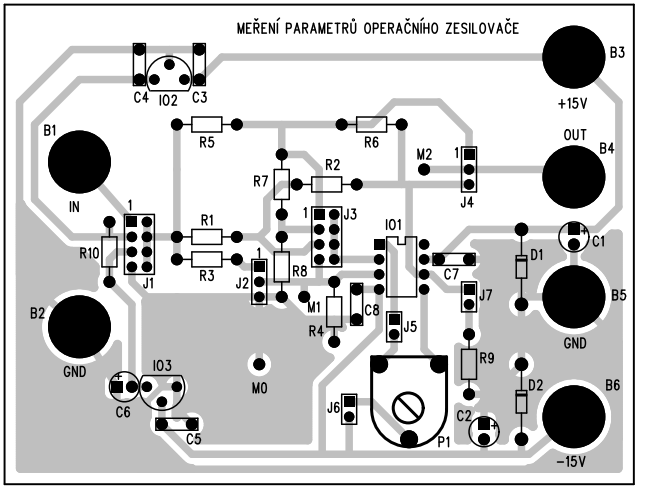
Parameter	Conditions	LM741A			LM741			LM741C			Units
		Min	Typ	Max	Min	Typ	Max	Min	Typ	Max	
Large Signal Voltage Gain	T_A = 25˚C, $R_L \geq 2$ kΩ										
	V_S = ±20V, V_O = ±15V	50									V/mV
	V_S = ±15V, V_O = ±10V				50	200		20	200		V/mV
Output Short Circuit	T_A = 25˚C	10	25	35		25			25		mA
Current	$T_{AMIN} \leq T_A \leq T_{AMAX}$	10		40							mA
Common-Mode	$T_{AMIN} \leq T_A \leq T_{AMAX}$										
Rejection Ratio	$R_S \leq 10$ kΩ, V_{CM} = ±12V				70	90		70	90		dB
	$R_S \leq 50\Omega$, V_{CM} = ±12V	80	95								dB
Supply Voltage Rejection	$T_{AMIN} \leq T_A \leq T_{AMAX}$,										
Ratio	V_S = ±20V to V_S = ±5V										
	$R_S \leq 50\Omega$	86	96								dB
	$R_S \leq 10$ kΩ				77	96		77	96		dB
Bandwidth (Note 6)	T_A = 25˚C	0.437	1.5								MHz
Slew Rate	T_A = 25˚C, Unity Gain	0.3	0.7			0.5			0.5		V/μs
Supply Current	T_A = 25˚C					1.7	2.8		1.7	2.8	mA

Obrázek D.3: Část katalogového listu s výpisem parametrů OZ LM741. Kompletní katalogový list.

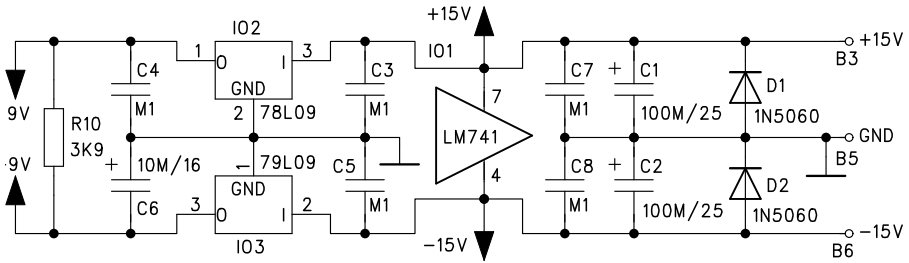
© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

D.1.1. Měřicí přípravek pro měření parametrů OZ LM741





Obrázek D.4: Celkové schéma zapojení a rozložení součástek na plošném spoji přípravku.



Obrázek D.5: Zapojení obvodů napájení přípravku.

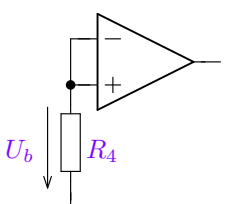
Přípravek je třeba napájet z laboratorního symetrického zdroje $\pm 15\,\mathrm{V}$. Konfigurace jednotlivých měřicích zapojení se nastavují pomocí přepínačů J1 až J3. Více viz přednáška.

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

D.1.2. Měření chybových parametrů

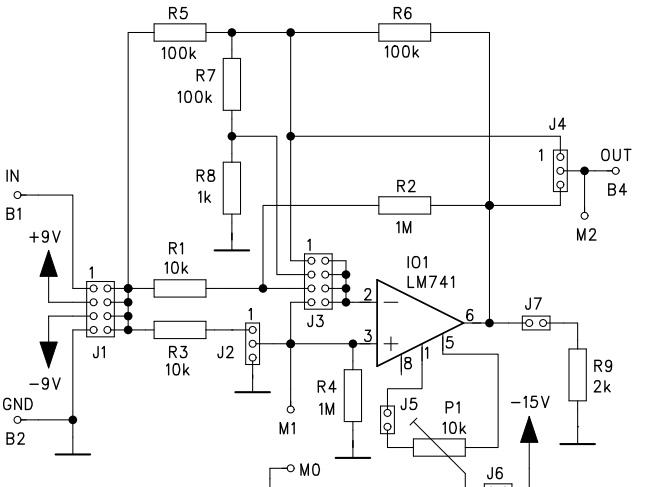
Měření vstupního klidového proudu I_b

Předpokládejme, že vstupní proudy tečou dovnitř OZ a jejich nesymetrie (rozdíl velikostí) je zanedbatelná. Průměrný vstupní proud je dán napětím na U_b snímacím rezistoru R_4.



$$I_b = \frac{I_b^+ + I_b^-}{2} = \frac{U_b}{2R_4} \qquad \text{(D.1)}$$

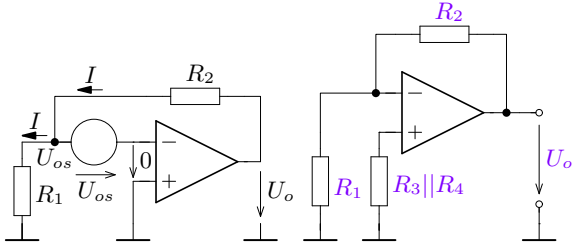
Obrázek D.6: Zapojení pro měření vstupního klidového proudu I_b.



Obrázek D.7: Celkové zapojení přípravku pro realizaci měření. Katalogový údaj pro LM741: $I_b \approx 80\,\mathrm{nA}$.

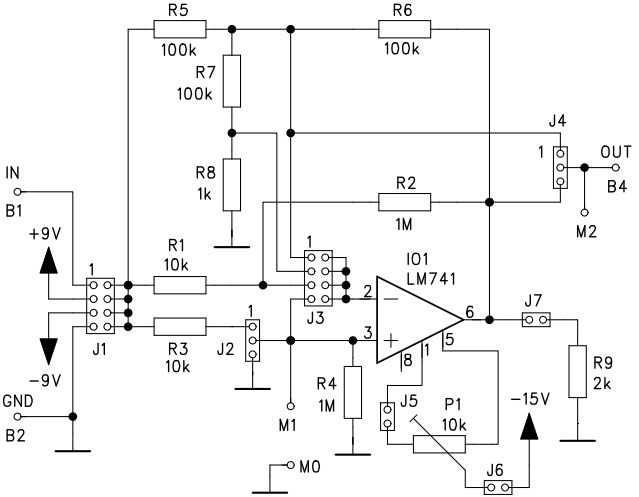
Měření vstupního napěťového ofsetu (napěťové nesymetrie) U_{os}

Pro měření napěťové nesymetrie lze využít zapojení zesilovače a měřit tak malé napětí U_{os} zesílené dle (12.1). V měřicím je pak U_{os} měřeno se ziskem cca 100 na výstupu OZ (U_o), jelikož $R_2/R_1 = 100$.



$$U_o = U_{os}\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \Rightarrow U_{os} \doteq \frac{U_o}{100} \qquad \text{(D.2)}$$

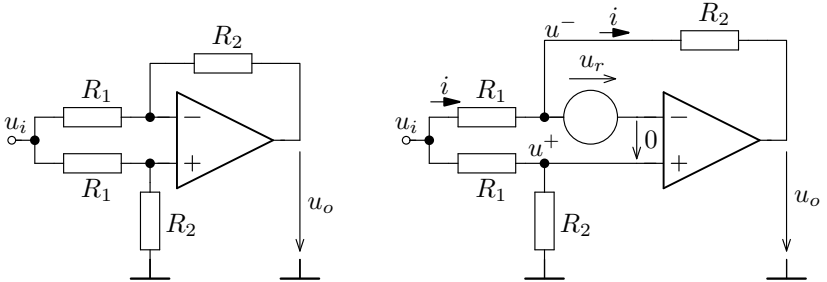
Obrázek D.8: Náhradní schéma pro odvození vztahu pro výpočet vstupní napěťové nesymetrie U_{os} a měřicí zapojení s kompenzací vstupních proudů dle 12.9.



Obrázek D.9: Celkové zapojení přípravku pro realizaci měření. Katalogový údaj pro LM741: $U_{os} \approx 2\,\mathrm{mV}$ bez kompenzace: J5, J6 – **použít následně** po měření U_{os}.

Měření potlačení souhlasné složky signálu (CMRR)

CMRR lze modelovat dle obrázku 12.13. Pokud je $u_r = \frac{u_s}{X}$, $X = \frac{A_d}{A_s}$, a $u_d = 0$, je $v_d = \frac{u_s}{X} = \frac{u_s A_s}{A_d} \Rightarrow u_o = A_d u_d = A_s u_s$, tj. výstupní napětí je úměrné souhlasnému zesílení A_s. Zapojení pro měření CMRR pak vychází z níže uvedených schémat. A_d zde představuje rozdílové zesílení pro stejnosměrné signály $A_d \equiv A_0$.



$$u^+ = u_i \frac{R_2}{R_1 + R_2} \doteq u_s,$$

$$i = \frac{u_i - u^-}{R_1} = \frac{u^- - u_o}{R_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_o = -u_i \frac{R_2}{R_1} + u^- \frac{R_2}{R_1} + u^-$$

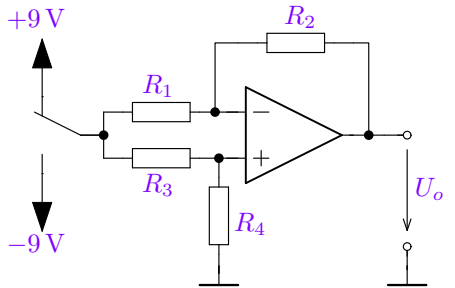
Obrázek D.10: Měřicí a náhradní schéma pro odvození vztahu pro výpočet činitele potlačení souhlasného signálu.

$$u^- = u^+ + u_r = u^+ + \frac{u_s}{X} = u_s \left(1 + \frac{1}{X}\right) \doteq u_i \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(1 + \frac{1}{X}\right) \quad \text{pro} \quad X = \frac{A_d}{A_s},$$

$$u_o = -\frac{R_2}{R_1} u_i + u^- \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \doteq -\frac{R_2}{R_1} u_i + \frac{R_2}{R_1} u_i \left(1 + \frac{1}{X}\right) = u_i \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{X} \Rightarrow X = \boxed{\frac{A_d}{A_s} \doteq \frac{R_2}{R_1} \frac{u_i}{u_o}}. \qquad \text{(D.3)}$$

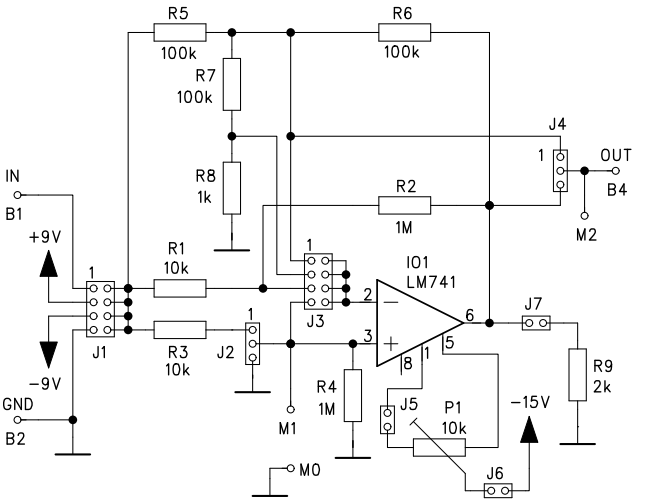
Dle (D.3) je CMRR pro daný obvod úměrné podílu výstupního a vstupního napětí. To však platí pouze pro $u_r = us/X$ a pro obecné $u_r = U_{os} - \frac{U_s}{X}$ je pro měření CMRR nutné využít střídavých resp. rozdílových signálů.

Pokud tedy $\Delta U_i = \pm U_i, \ldots,$ dostaneme pro CMRR: $X \doteq \frac{R_2}{R_1}\frac{\Delta U_i}{\Delta U_o}$, tj. **bez vlivu napěťové nesymetrie**. Dále opět využijeme vlastního OZ pro zesílení měřeného napětí ($R_2/R_1 = R_4/R_3 = 100$).



$$\text{CMRR} \doteq 20\log\left|\frac{U_i^+ - U_i^-}{U_o^+ - U_o^-}\right| + 40\,\text{dB} \qquad \text{(D.4)}$$

Obrázek D.11: Zapojení pro měření činitele potlačení souhlasného signálu, kde $U_i^+ - U_i^- = \Delta U_i = 18\,\text{V}$.

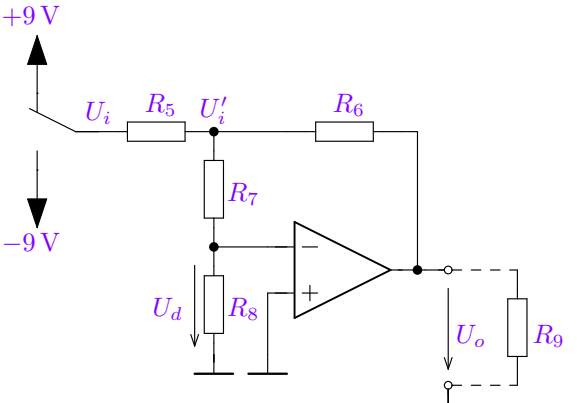


Obrázek D.12: Celkové zapojení přípravku pro realizaci měření. Katalogový údaj pro LM741: CMRR $\approx 90\,\text{dB}$.

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

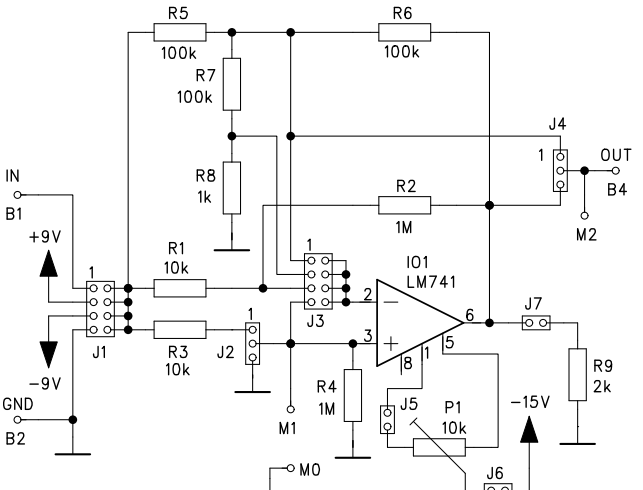
D.1.3. Měření statických parametrů

Měření stejnosměrného zesílení A_0



$$A_0 = \frac{\Delta U_o}{\Delta U_d} \doteq 100\frac{\Delta U_o}{\Delta U_i'} \qquad \text{(D.5)}$$

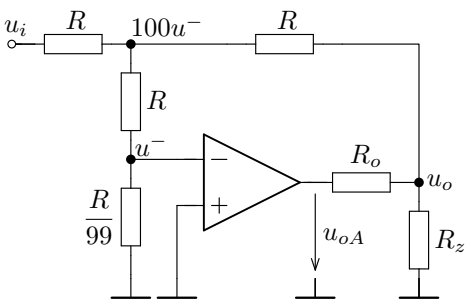
Obrázek D.13: Zapojení pro měření stejnosměrného zesílení A_0.



Obrázek D.14: Celkové zapojení přípravku pro realizaci měření. Katalogový údaj pro LM741: $A_0 \approx 200\,000$.

Pro měření zesílení vlastního OZ je **nutné použít ZZV**, aby zesilovač pracoval v lineární oblasti a dále bylo použito opět rozdílových signálů pro odstranění vlivu U_{os} i vlastního OZ pro zesílení měřeného napětí vzhledem k $R_7/R_8 \doteq 100$. To platí i o výstupním odporu, kde však místo rozdílového stejnosměrného měření využijeme měření střídavé (na nízkém kmitočtu $f \approx 100\,\mathrm{Hz}$, aby zesílení $|A_d(j\omega)|$ bylo dostatečně vysoké a platilo $u_o = u_{oz}$).

Měření výstupního odporu R_o



Obrázek D.15: Náhradní schéma pro odvození vztahu pro výpočet výstupního odporu.

Rozlišme jednotlivá napětí dle zatížení a označme:
u^-, u_o a u_{oA} napětí pro $R_z \to \infty$ a
u_z^-, u_{oz} a u_{oAz} napětí při zatížení R_z.

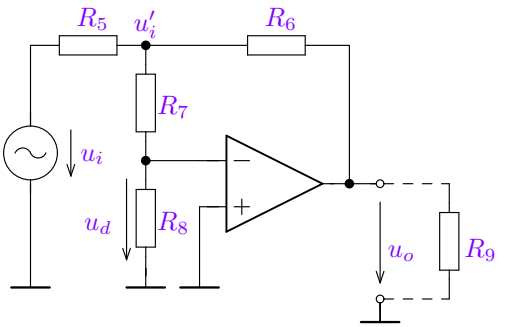
Vlivem silné ZZV ($|A_d(j\omega)|$ vysoké) bude $u_o \doteq u_{oz}$ (R_o se z hlediska výstupu jeví jako R_o/F)a pak platí:

$$u_{oz} = \frac{R_z}{R_o + R_z} u_{oAz}\bigg|_{R \gg R_z} = \frac{R_z}{R_o + R_z} u_z^- |A_d(j\omega)| \doteq u_o$$

$$u_o = u^- |A_d(j\omega)| \Rightarrow \frac{u_z^-}{u^-} \doteq \frac{R_o + R_z}{R_z} \Rightarrow R_o \doteq R_z \left(\frac{u_z^-}{u^-} - 1 \right) \tag{D.6}$$

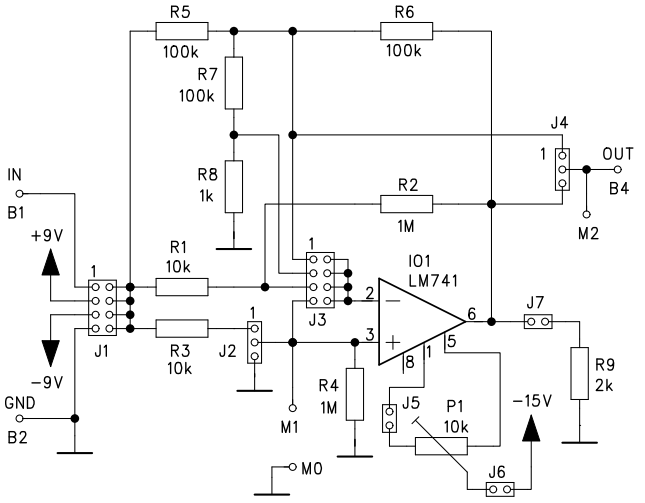
Pro měření opět využijeme zesíleného napětí $100u^-$, resp. $100u_z^-$, viz následující měřicí zapojení.

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL



$$R_o \doteq R_9 \left(\frac{u'_{iz}}{u'_i} - 1 \right) \qquad \text{(D.7)}$$

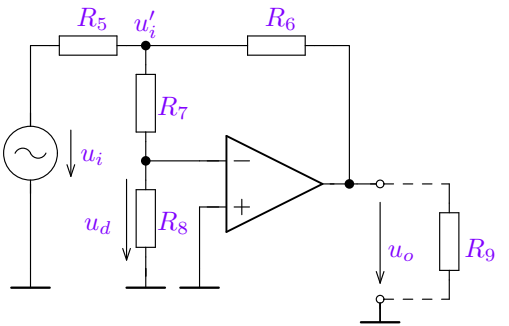
Obrázek D.16: Zapojení pro měření výstupního odporu R_o.



Obrázek D.17: Celkové zapojení přípravku pro realizaci měření. Katalogový údaj pro LM741 (Fig. 1): $R_o \approx 75\,\Omega$.

D.1.4. Měření dynamických parametrů

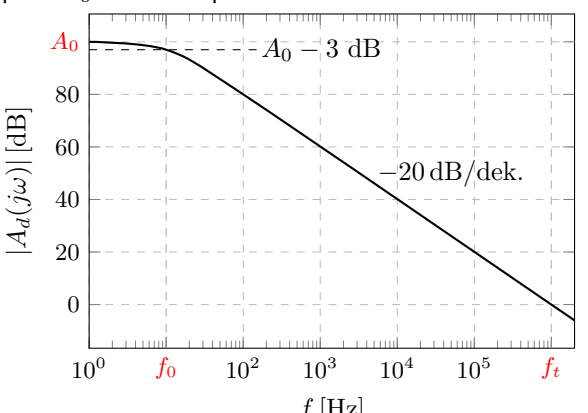
Měření kmitočtové závislosti zesílení $A_d(j\omega)$



$$A_d(j\omega) = \frac{U_o(j\omega)}{U_i'(j\omega)} \cdot 100 \qquad \text{(D.8)}$$

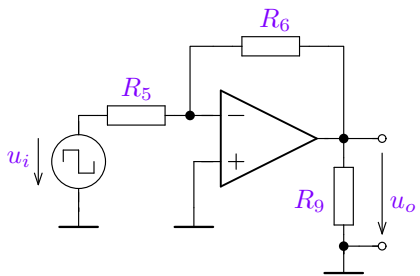
Obrázek D.18: Zapojení pro měření kmitočtové závislosti zesílení $A_d(\omega)$ operačního zesilovače.

Amplitudovou charakteristiku lze zkonstruovat jednoduše měřením $|A_d(j\omega)|$ pouze ve 2 bodech (např. pro $f = 100\,\text{Hz}$ a $1\,\text{kHz}$ a ze znalosti A_0, viz. (D.5). Zapojení přípravku je schodné jako v případě měření výstupního odporu R_o. Více viz. přednáška.



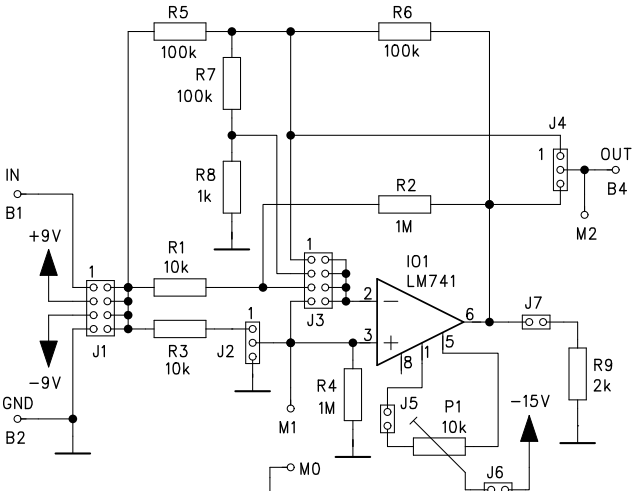
© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

Měření rychlosti přeběhu S



Obrázek D.19: Zapojení pro měření rychlosti přeběhu.

Měření je prováděno při buzení obdélníkovým signálem o kmitočtu $10\,\mathrm{kHz}$ a amplitudě cca $5\,\mathrm{V}$. Výsledek je možné ověřit pro harmonické buzení nad mezním výkonovým kmitočtem (12.19), viz také obrázek 12.20 pro různé kmitočty, případně i amplitudy.

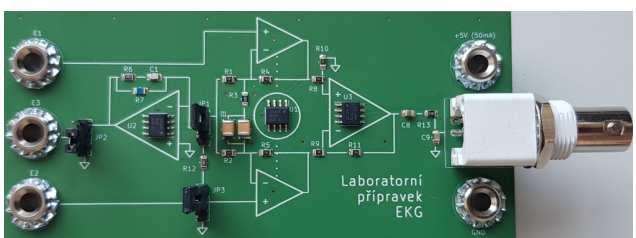


Obrázek D.20: Celkové zapojení přípravku pro realizaci měření. Katalogový údaj pro LM741: $S \approx 0{,}5\,\mathrm{V/\mu s}$.

Dodatek E

Měření biologických signálů EKG

V této části je uveden komentář k měření biologických signálů, konkrétně signálů EKG. Jedná se o měření založená na základních měřicích metodách využívajících elementárního zapojení s rozdílovým zesilovačem, tak metody využívající aktivní potlačení ručení pomocí zpětné vazby, viz např. Clinical Neurophysiology. Jedná se o demonstrativní přípravek, který umožňuje jednoduché snímání EKG signálu a jeho zobrazení pomocí osciloskopu. Elektrody se připojují do klasických zdířek a lze použít jak gelové, tak suché elektrody. Uživatel si přitom může vyzkoušet několik měřicích zapojení, které jsou níže stručně popsány.



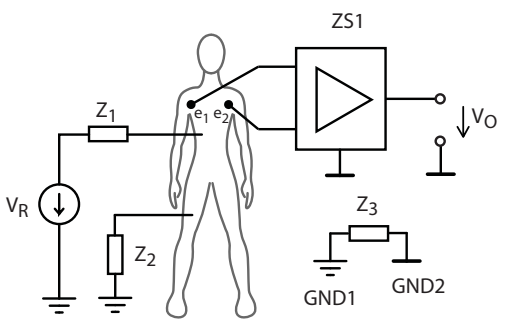
E.1. Cíl měření

Cílem měření je seznámit se s měřicími metodami a obvody pro snímání biologických signálů, konkrétně signálů EKG. Celkové zapojení laboratorního přípravku je uvedeno na obrázku E.6. To umožňuje aplikaci několika měřicích zapojení, které jsou níže krátce představeny.

E.2. Měřicí metody biologických signálů

Podstatou je snímání rozdílových potenciálů povrchového napětí mezi dvěma místy blízko vzniku signálu (EKG blízko srdce, EEG na hlavě). Význam jednotlivých prvků je následující:

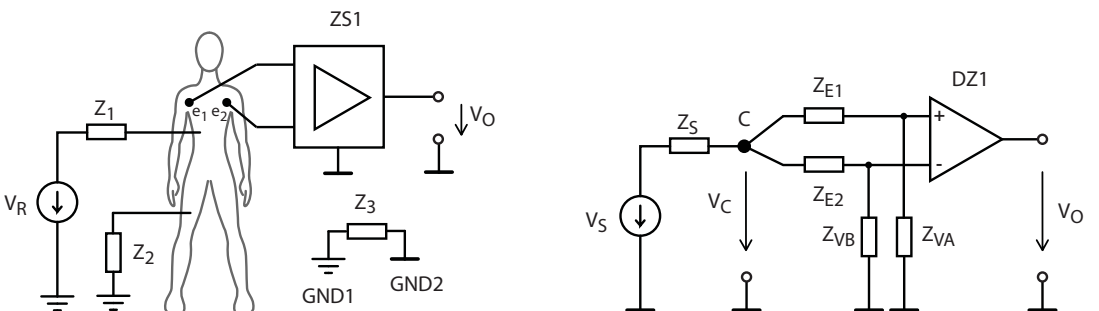
- e_1, e_2 jsou snímací elektrody
- ZS_1 je rozdílový zesilovač,
- V_R zdroj rušivého signálu (nejčastěji rozvodná síť),
- Z_1, Z_2 parazitní impedance (kapacity) mezi měřeným objektem a rušivými signály.
- Z_3 parazitní impedance tvořící oddělení (kapacity) mezi referenčními (nulovými) potenciály zdrojů.



Obrázek E.1: Princip snímání biosignálů.

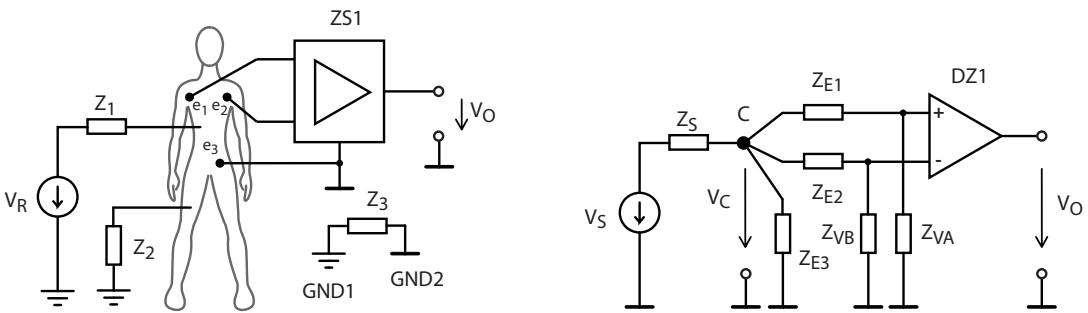
Uvedené zapojení je pouze principiální a v podstatě takto nemůže správně fungovat. Není zajištěn DC potenciál elektrod v rámci napájecího napětí a většinou ani galvanická vazba pro vstupní proudy zesilovače. Pokud bude zesilovač fungovat, tak ve výstupním napětí V_O bude převažovat zesílené rušivé napětí. To lze ilustrovat náhradním schématu pro rušivé složky vpravo, kde tělo je reprezentováno pouze bodem C a prvky V_S a Z_S tvoří náhradní Theveninovo schéma obvodu V_R, Z_1 a Z_2. Z_{E1} a Z_{E2} jsou vnitřní impedance elektrod e_1 a e_2 a vstupní impedance rozdílového zesilovače DZ1 jsou vyjádřeny pomocí Z_{VA} a Z_{VB}.

Reálně jsou hodnoty Z_{E1} a Z_{E2} značně rozdílné, což povede k nenulovému rozdílovému napětí na vstupu DZ1, které se bude zesilovat, pokud bude zesilovač vůbec fungovat (zesilovač s FET většinou ano).



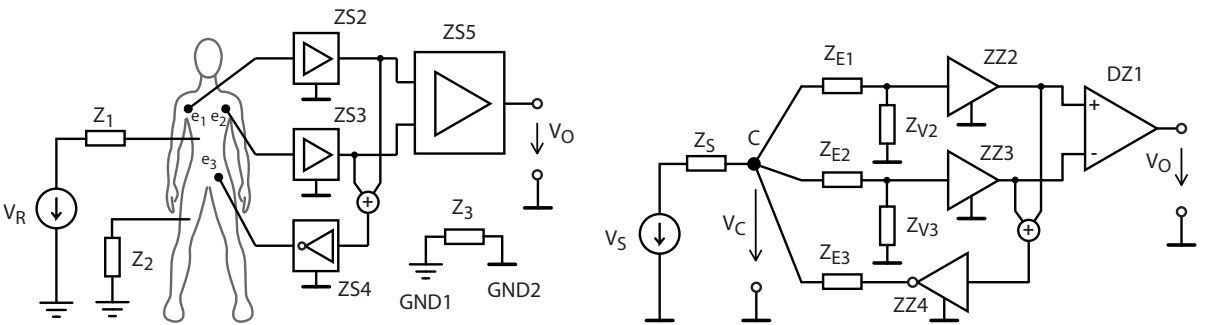
Obrázek E.2: Prinicipiální zapojení pro měření biosignálů a jeho zjednodušené náhradní schéma pro rušivý signál.

Předchozí zapojení vede na výstupní signál zahlcený rušením (50 Hz), pokud bude zesilovač vůbec pracovat v lineární oblasti. Tuto nevýhodu se snaší odstranit následující zapojení, které zavádí další elektrodu e_3, která je připoje na zemní potenciál zesilovače. Tím se značně sníží velikost rušení ve snímacím bodě V_C, zejména pro gelové elektrody, u kterých je velmi dobrý elektrický kontakt s pokožkou a tím k relativně malé hodnotě náhradní impedance Z_{E3} (oproti Z_S).



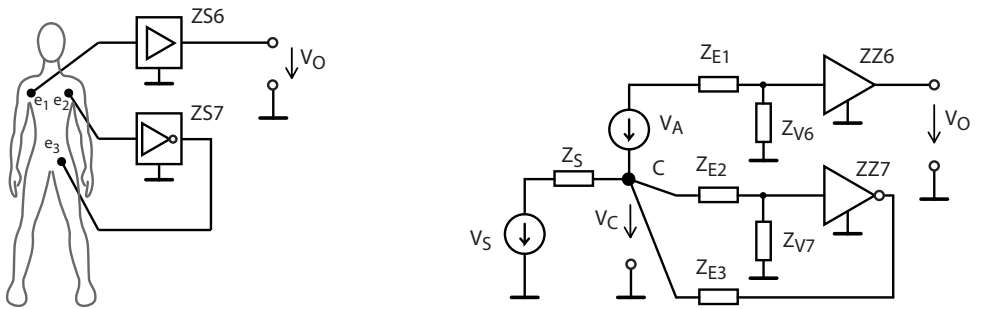
Obrázek E.3: Zapojení pro měření biosignálů se zemní svorkou a jeho zjednodušené náhradní schéma pro rušivý signál.

V mnoha případech je však potlačení rušivého signálu v předchozím zapojení nedostatečné. Z tohoto důvodu se zavádí tzv. aktivní potlačení rušení, jak je ukázáno na následujícím obrázku. Řešení spočívá v zavedení ZZV, přičemž se snímá souhlasné napětí elektrod e_1 a e_2, které se přivádí s obrácenou fází zpět na měřený objekt elektrodou e_3 prostřednictvím zesilovače ZZ4. Pokud je jeho zesílení dostatečně vysoké, potlačuje minimalizuje se souhlasné napětí a tím i tušivé napětí V_C. Pro obvodové řešení se využívá zapojení s přístrojovým zesilovačem, viz např. AD620 (Fig. 39) a následně schéma přípravku s komentářem.



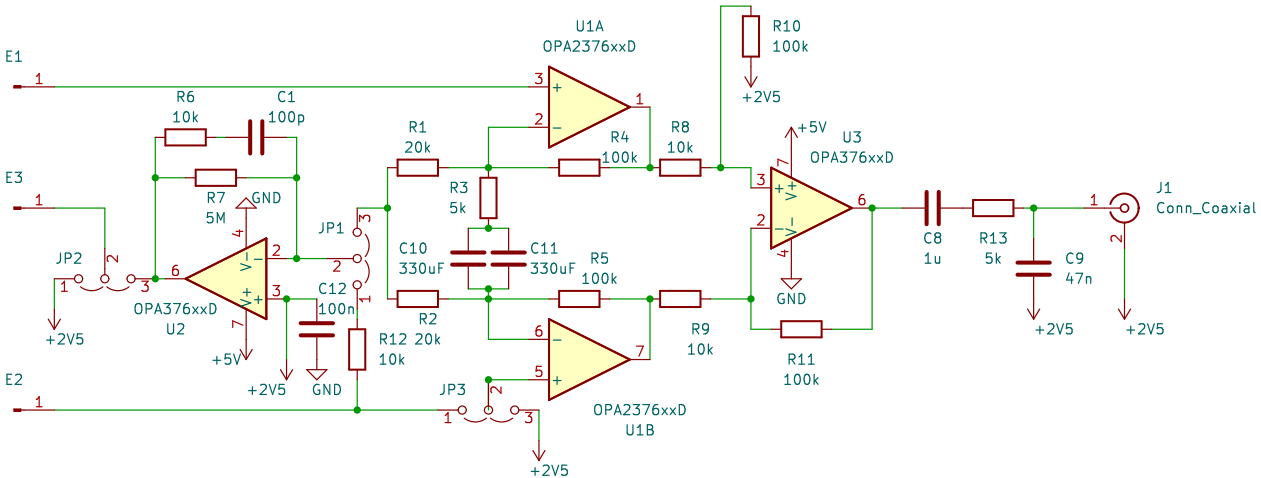
Obrázek E.4: Zapojení pro měření biosignálů s aktivním potlačením rušivého signálu pomocí ZZV buzené souhlasnou složkou signálu a jeho zjednodušené náhradní schéma pro rušivý signál, tzv. *Driven Right Leg Circuit*.

I následující zapojení využívá aktivní potlačení pomocí ZZV. Na rozdíl od předchozího zapojení však není třeba použít přístrojového rozdílového zesilovače, ale pouze dva „klasické“ OZ. V tomto případě provádí aktivní potlačení rušení zesilovač ZZ7, který při velkém zesílení minimalizuje napětí V_C, podobně jako v předchozím případě zesilovač ZZ4. Na náhradním schématu je zakreslen i užitečný signál V_A, který je následně zesílen zesilovačem ZZ6. Pokud je $V_C \to 0$, je pak $V_O \doteq A_{u6} V_A$, kde A_{u6} je napěťový zisk zesilovače ZZ6.



Obrázek E.5: Zapojení pro měření biosignálů s aktivním potlačením rušivého signálu bez použití rozdílového zesilovače a jeho zjednodušené náhradní schéma pro rušivý (V_S) i užitečný (V_A) signál.

E.2.1. Měřicí přípravek pro měření signálů EKG



Obrázek E.6: Schéma zapojení přípravku.

Popis zapojení

Zapojení přípravku na obrázku E.6 umožňuje realizovat všechny výše uvedené metody měření EKG signálů. Napájecí část na obrázku E.6 vytvoří referenční potenciál 2,5 V (signálovou zem), ke kterému jsou vztažena vnitřní napětí.

Zesilovače U1 tvoří první stupeň zesílení a spolu s U3 realizují přístrojový zesilovač pro zapojení E.2 až E.4. Kapacitory C10, C11 zabraňují zesílení případných stejnosměrných složek vstupních signálů a jejich hodnota je volena tak, aby se zesilovaly signály s $f > 0{,}05\,\mathrm{Hz}$. Zesilovač U2 plní funkci aktivního buzení elektrody E3 pro zapojení E.4 a E.5, přičemž pro zapojení E.5 zesiluje U1A napětí elektrody E1 vůči E2, tj. cca referenci díky U2. U1B zesiluje také napětí E1, ale v invertujícím zapojení. Napětí na výstupu U3 je filtrováno RC pásmovou propustí, přičemž se využívá vstupního odporu $1\,\mathrm{M\Omega}$ osciloskopu připojeného na výstup J1. Více viz přednášku a analýzu.

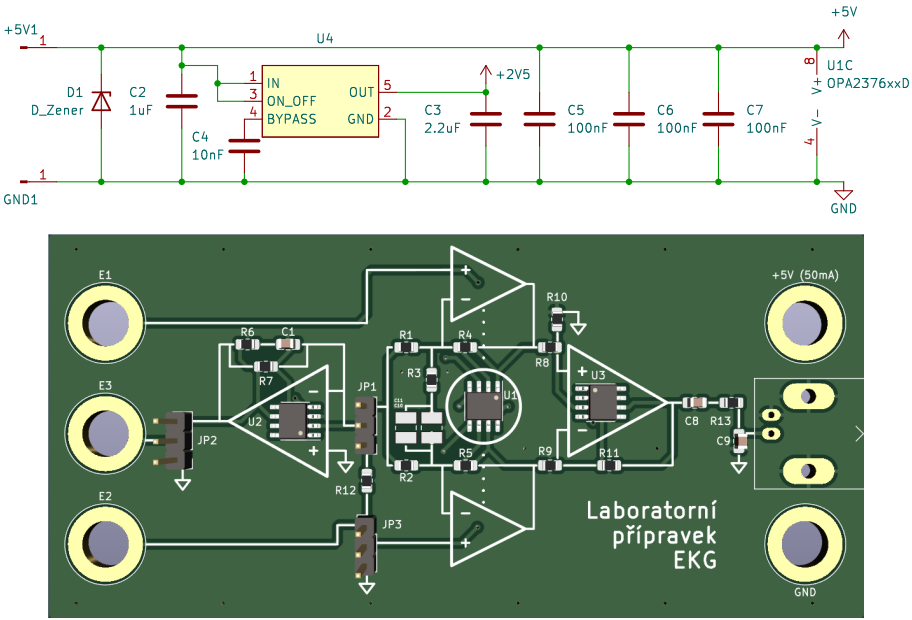
Postup měření

Přípravek je třeba napájet z laboratorního zdroje napětím $5\,\mathrm{V}$ s proudovým omezením cca $50\,\mathrm{mA}$. Výstup odebírejte z BNC konektoru J1, který propojte kabelem přímo na vstup osciloskopu se vstupním odporem $1\,\mathrm{M\Omega}$. Konfigurace jednotlivých měřicích zapojení se nastavují pomocí přepínačů JP1 až JP3 takto:

1. Pro zapojení E.2 zkratujte piny 1-2 přepínače JP3, ostatní nechte rozpojené.
2. Pro zapojení E.3 zkratujte piny 1-2 přepínače JP3 i JP2, přepínač JP1 ponechte rozpojen.
3. Pro zapojení E.4 zkratujte piny 1-2 přepínače JP3 a piny 2-3 přepínače JP2 iJP1.
4. Pro zapojení E.5 zkratujte piny 2-3 přepínače JP3 i JP2 a piny 1-2 přepínače JP1.

Nakonfigurujte požadované zapojení, připojte elektrody a výstupní napětí zobrazte osciloskopem připojeným k J1.

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

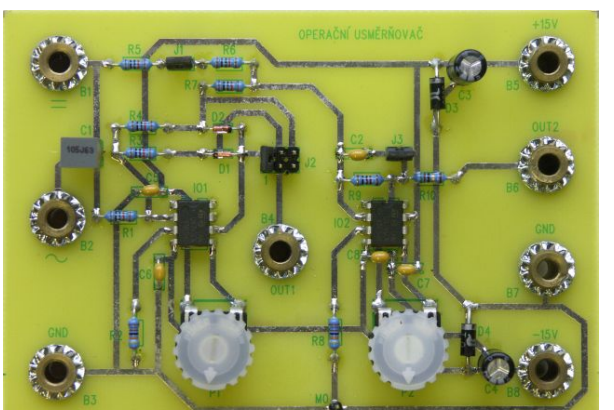


Obrázek E.7: Schéma zapojení napájecí části přípravku a osazení jeho horní strany.

Dodatek F

Měření základních parametrů operačního usměrňovače

V této části je uveden komentář k měření na laboratorním přípravku operačního usměrňovače. Návod na měření je uveden zde. Přípravek s operačními zesilovači LM741 umožňuje měření základních vlastností jednocestného i dvoucestného operační usměrňovače (zesilovače absolutní hodnoty), viz celkové zapojení přípravku na obrázku F.1 a rozložení součástek plošného spoje na obrázku F.2.



F.1. Úkoly měření

Hlavními úkoly laboratorního měření jsou zejména:

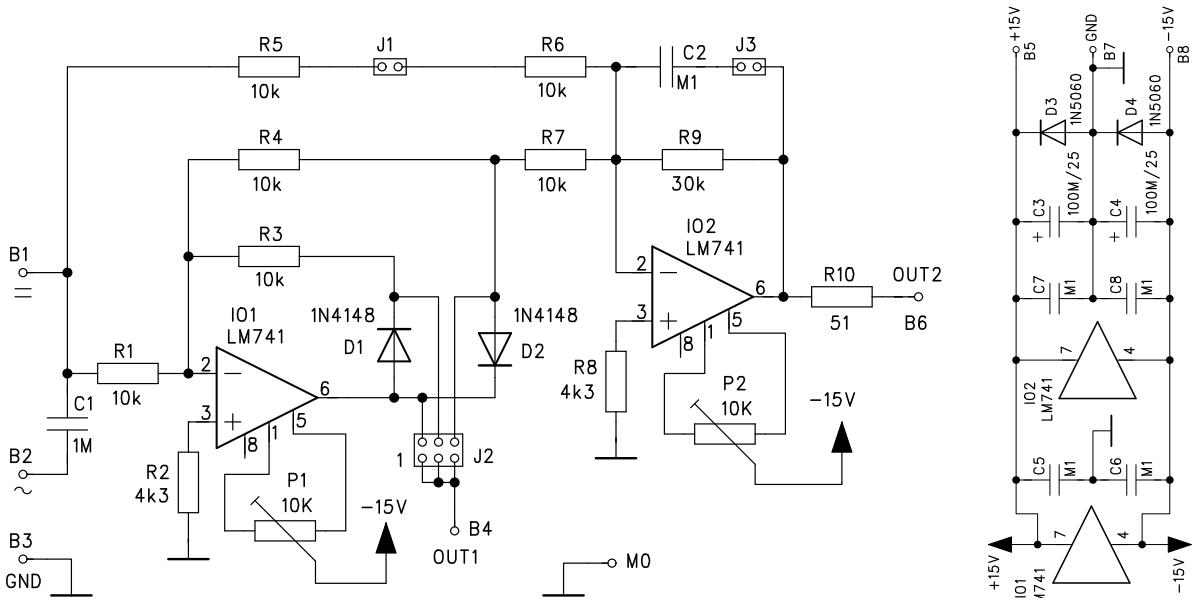
1. Měření převodních charakteristik:
   - pro oba výstupy jednocestného invertujícího usměrňovače,
   - pro vlastní výstup operačního zesilovače invertujícího usměrňovače,
   - dvoucestného usměrňovače,

   při buzení trojúhelníkovým signálem s nízkým kmitočtem ($50\,\mathrm{Hz}$).
2. Měření časových průběhů:
   - obou výstupů jednocestného invertujícího usměrňovače,
   - vlastního výstupu operačního zesilovače invertujícího usměrňovače,
   - výstupu dvoucestného usměrňovače,

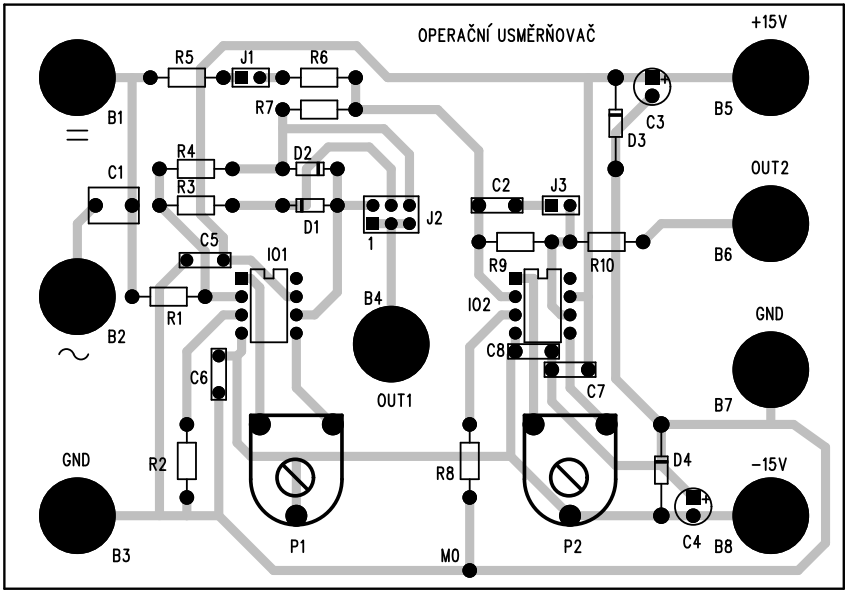
   při buzení harmonickým signálem o kmitočtu ($50\,\mathrm{Hz}$) a s amplitudou $50\,\mathrm{mV}$ a $1\,\mathrm{V}$.
3. Měření kmitočtových závislosti velikosti výstupního napětí dvoucestného usměrňovače pro střední hodnoty vstupního napětí $50\,\mathrm{mV}$ a $1\,\mathrm{V}$. Pro měření výstupního napětí použijte stejnosměrný voltmetr.

Teorie včetně odkazů na analýzy je uvedena v kapitole 12.5.1.

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

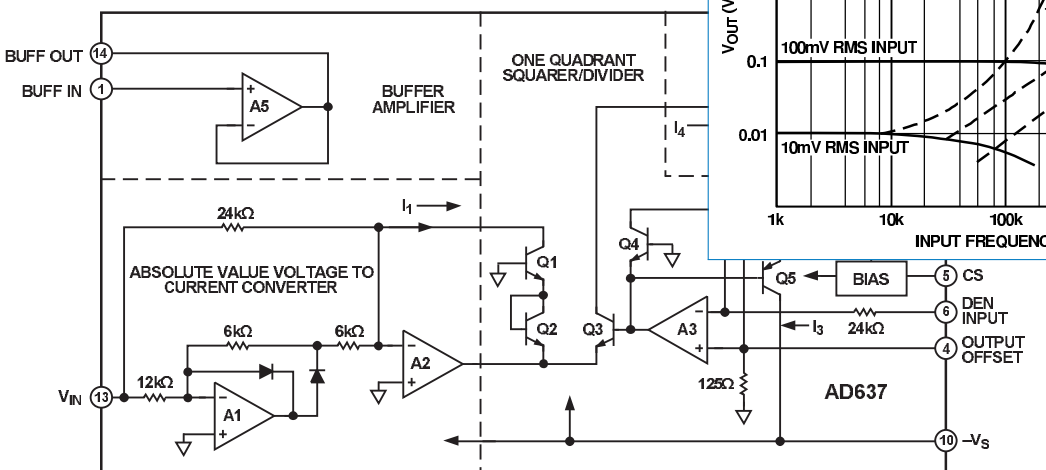


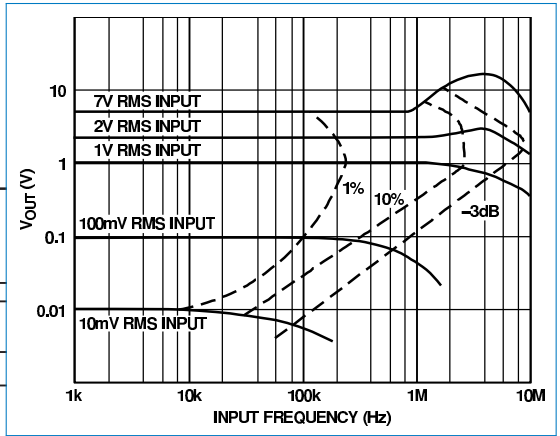
Obrázek F.1: Celkové schéma zapojení přípravku operačního usměrňovače včetně ochranných obvodů napájení.



Obrázek F.2: Rozložení součástek na plošném spoji přípravku operačního usměrňovače.

Zapojení zesilovače absolutní hodnoty se používá např. v integrovaných obvodech určených pro převod efektivní hodnoty signálů na stejnosměrnou hodnotu. Níže je uvedeno blokové schéma obvodu AD637 a jeho kmitočtové vlastnosti, více viz datasheet.

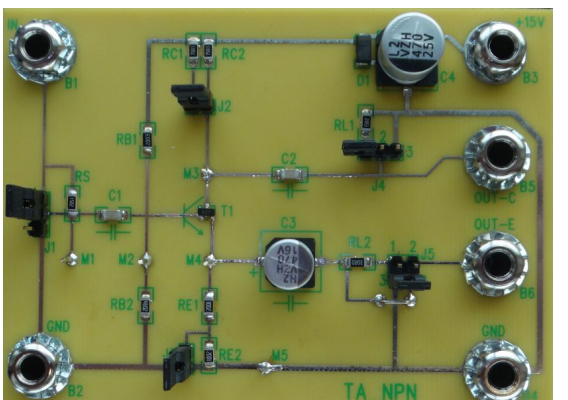




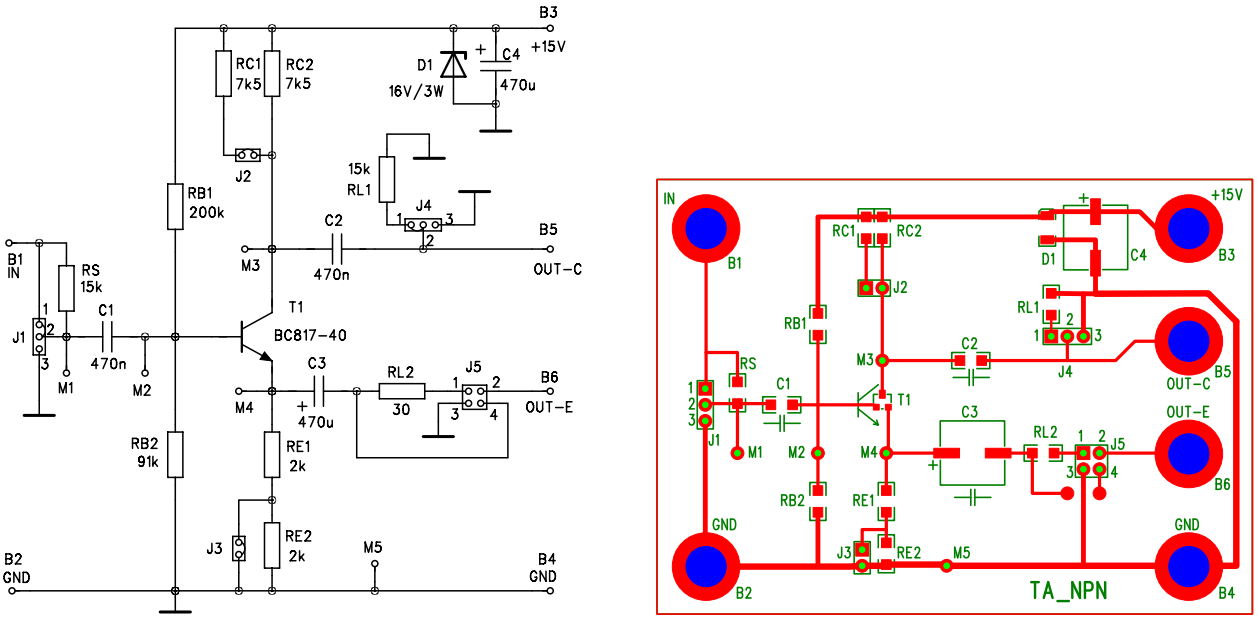
Dodatek G

Měření vlastností jednostupňového zesilovače s bipolárním tranzistorem

V této části jsou uvedeny základní informace k měření na laboratorním přípravku jednostupňového zesilovače s NPN tranzistorem. Přípravek umožňuje realizovat všechna základní zapojení, tj. zapojení SE, SB i SC, viz celkové schéma přípravku na obrázku G.1. Pracovní bod lze měnit přepínačem J3 (odporem emitorového rezistoru) a kolektorovou zátěž přepínačem J2 (odporem kolektorového rezistoru). Podrobný návod na měření je zde, analýza zapojení přípravku zde.



© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL



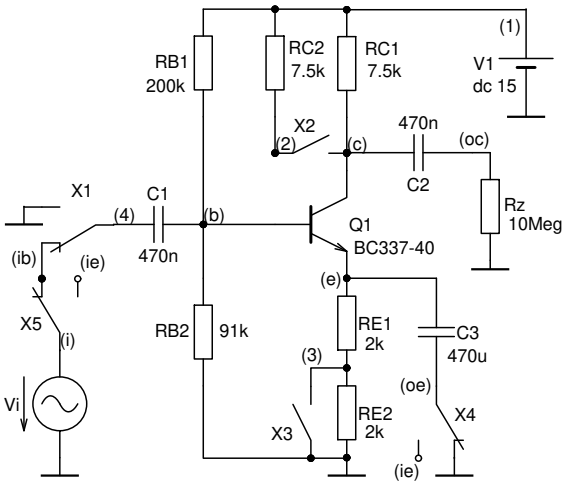
Obrázek G.1: Kompletní zapojení a rozmístění součástek na laboratorním přípravku tranzistorového zesilovače.

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

G.1. Cíle a postup měření

Cílem je seznámit se s funkcí a parametry základních zapojení jednostupňových zesilovačů. Teorie i analýzy jsou uvedeny v kapitole 15. Měření lze rozdělit do těchto bodů:

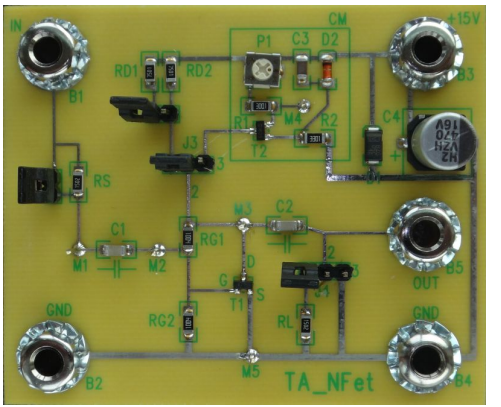
1. Statická měření: Ověření polohy pracovního bodu (zapojení dle obrázku 15.21 a příklad 15.5), tj. proudu I_C a určení operačního režimu tranzistoru (aktivní nebo saturační) pro jednotlivé variace kolektorových a emitorových rezistorů (RC1, RC2 a RE1,RE2).
2. Dynamická měření:
   Zjištění základních parametrů zesilovače ve SKP, tj. A_u, A_i, R_i a R_o, případně i f_d pro vybrané variace kolektorových a emitorových rezistorů pro všechna základní zapojení (SE, SB i SC) dle návodu na měření.
3. Výsledky porovnejte s výpočtem i simulací.



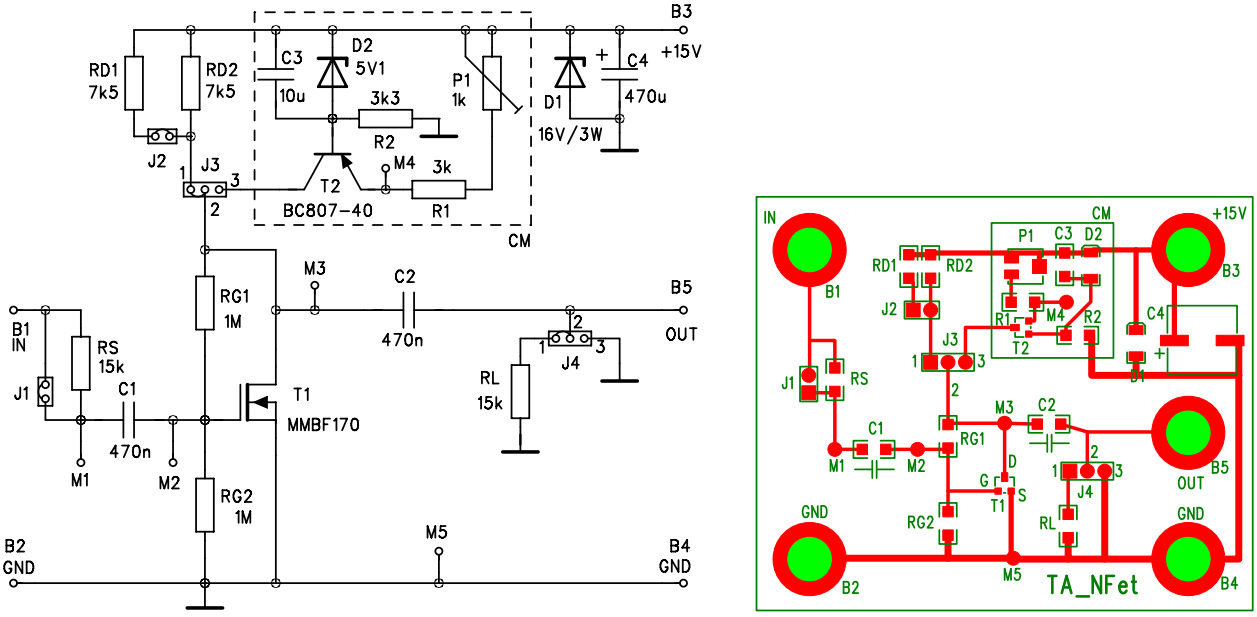
Dodatek H

Měření vlastností jednostupňového zesilovače s unipolárním tranzistorem

V této části jsou uvedeny základní informace k měření na laboratorním přípravku jednostupňového zesilovače s unipolárním tranzistorem. Přípravek je realizací upraveného zapojení 15.13, viz celkové schéma přípravku na obrázku H.1. Pracovní bod i AC parametry lze měnit přepínačem J2 (odporem drainového rezistoru) a přepínačem J3 lze připojit i dynamickou zátěž (proudový zdroj realizovaný tranzistorem T2), což lze využít v pokročilejším kurzu. Podrobný návod na měření je zde, analýza zapojení přípravku zde.



© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

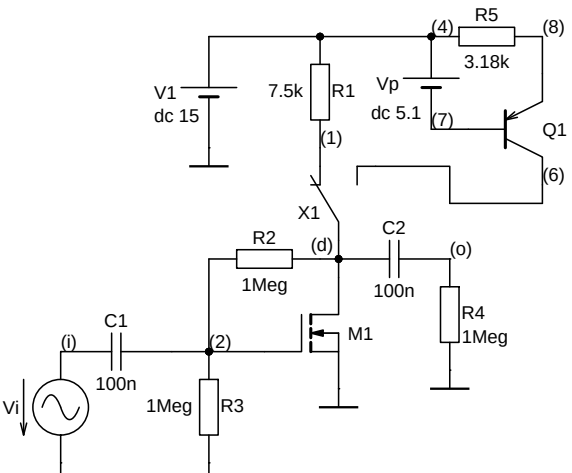


Obrázek H.1: Kompletní zapojení a rozmístění součástek na laboratorním přípravku tranzistorového zesilovače.

H.1. Cíle a postup měření

Cílem je seznámit se s funkcí a parametry jednostupňového zesilovače v zapojení SS. Teorie i analýzy jsou uvedeny v kapitole 15. Měření lze rozdělit do těchto bodů:

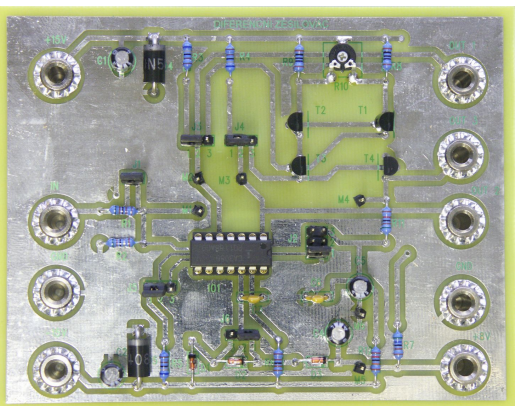
1. Statická měření: Ověření polohy pracovního bodu (podobně jako zapojení dle obrázku 15.25 a příklad 15.8), tj. proudu I_D pro jednotlivé variace drainových rezistorů (RD1, a RD1||RD2).
2. Dynamická měření: Zjištění základních parametrů zesilovače ve SKP, tj. A_u, A_i, R_i a R_o, případně i f_d pro obě hodnoty drainového rezistoru dle návodu na měření. Viz také analýzu zapojení z příkladu 15.13.
3. Při využití dynamické zátěže (přepínač J3 v poloze 2-3) je možné ověřit jednak pracovní bod daný proudovým zdrojem, jednak parametry A_u, R_i i R_o, viz kapitolu 16.2 a příklad 16.1.
4. Výsledky porovnejte s výpočtem i simulací.



Dodatek I

Měření na tranzistorovém rozdílovém zesilovači

V této části je uveden komentář k měření na tranzistorovém rozdílovém zesilovači. Postup měření a měřicí metody jsou vysvětleny ve videoukázce. Analýzy odpovídajícího zapojení zesilovače přípravku byly uvedeny v podkapitolách 16.11 a 16.14, včetně analýzy analogického zesilovače s odporovou i aktivní dynamickou zátěží. Podrobný návod na měření je uveden zde.



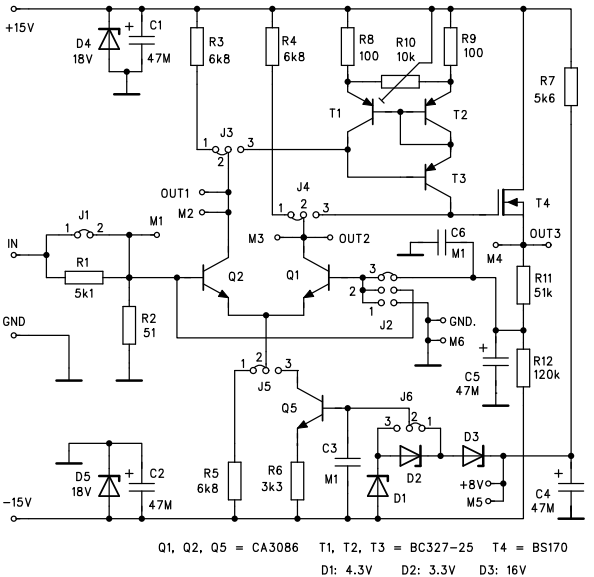
© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

I.1. Cíle měření

Cílem měření je ověření základních vlastností rozdílového zesilovače, pracujícího jak do odporové, tak do aktivní dynamické zátěže a s různými typy napájecích obvodů v emitorech. Hlavními úkoly jsou:

1. vykreslení převodní charakteristiky (charakteristik) a zjištění rozsahu linearity zesilovače pro různé typy napájecích obvodů,
2. zjištění velikosti rozdílového a souhlasného zesílení pro různé typy napájecích obvodů v emitorech a pro odporovou i aktivní dynamickou zátěž v kolektorech.

Kompletní schéma zapojení zesilovače odpovídá zapojení diskutovanému v kapitolách 16.11 a 16.14. Popis přípravku i kompletního postupu měření je uveden v podrobném návodu, komentář a ukázka měření ve videoukázce.

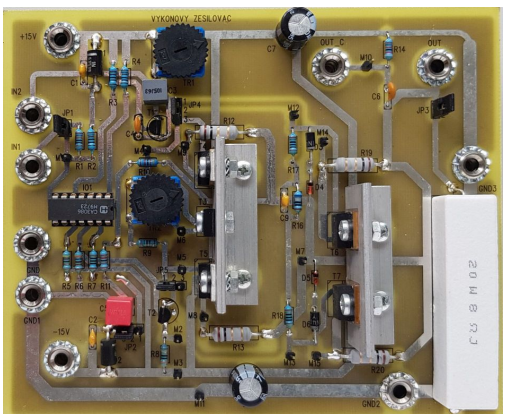


Obrázek I.1: Kompletní zapojení přípravku zesilovače.

Dodatek J

Měření na tranzistorovém výkonovém zesilovači

V této části je uveden komentář k měření na tranzistorovém výkonovém zesilovači. Postup měření a měřicí metody jsou vysvětleny ve videoukázce. Podrobný návod na měření je uveden zde.

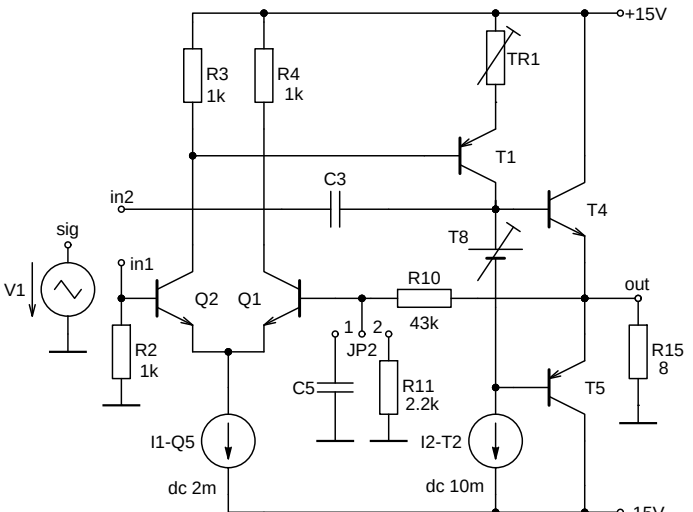


J.1. Cíle měření

Cílem měření je seznámit se s funkcí výkonového zesilovače, pracujícího ve třídě B, resp. AB. Hlavními úkoly laboratorního měření jsou:

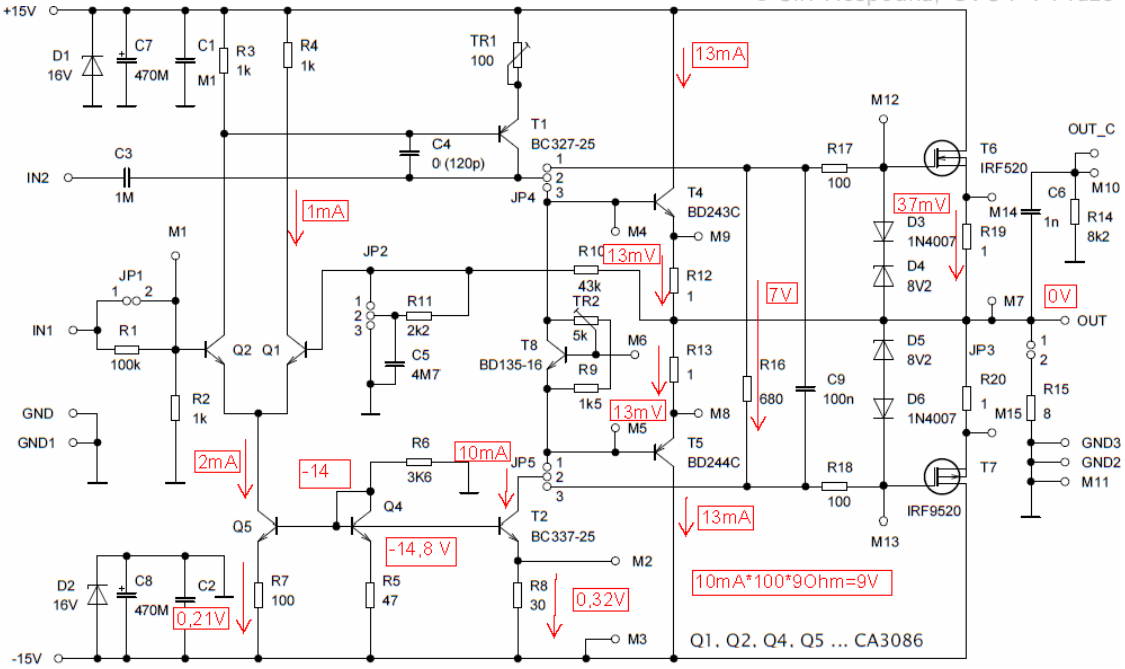
1. nastavení správných stejnosměrných poměrů v zesilovači,
2. zkoumání vlivu stejnosměrného nastavení na přechodové zkreslení koncového stupně,
3. měření účinnosti zesilovače a
4. jeho teplotní stability,
5. určení vlivu zpětné vazby na některé parametry zesilovače a
6. měření dynamických vlastností zesilovače.

Schéma zapojení zesilovače odpovídá principiálnímu zapojení OZ u vedenému v kapitolách 16.18.1 a 16.18.2. Popis přípravku a postupu měření je uveden v podrobném návodu, komentář a ukázka měření ve videoukázce.



Obrázek J.1: Ilustrativní zjednodušené zapojení přípravku výkonového zesilovače.

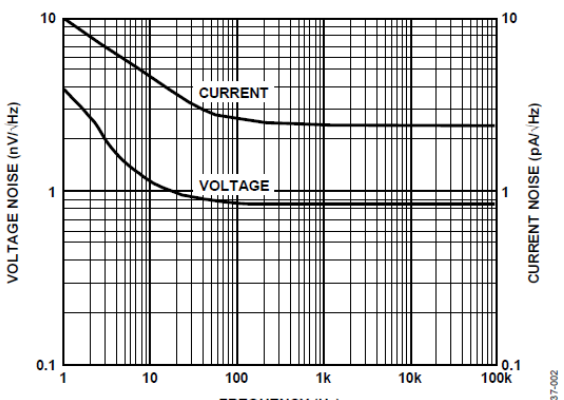
© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL



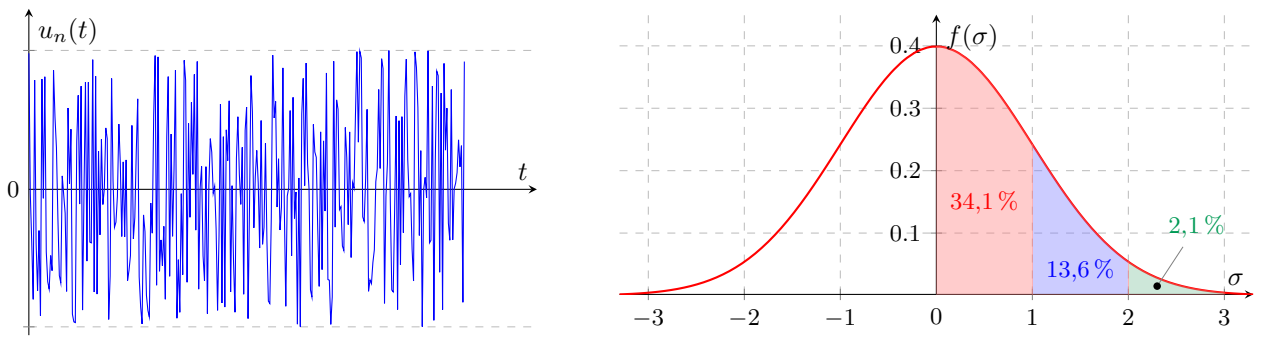
Obrázek J.2: Kompletní zapojení výkonového zesilovače s hodnotami pracovního bodu, komentář viz videoukázku.

Dodatek K
Šum elektronických obvodů

V této části je uveden stručný úvod do problematiky šumu v elektrotechnice, jeho zdrojích, vlastností a postupu výpočtu (analýze).



Šumem nazýváme náhodné časové změny signálu, jak ukazuje obrázek K.1 (a). Jejich vlastnosti se však dají statisticky vyhodnocovat, jak ukazuje obrázek (b). Ten popisuje rozložení hustoty pravděpodobnosti $f(\sigma)$ výskytu hodnot signálu v závislosti na parametru σ – tzv. směrodatné odchylce, která odpovídá efektivní hodnotě signálu. Rozložení $f(\sigma)$ pro bílý (zcela náhodný) šum je Gaussova křivka. Z ní vyplývá, že nejpravděpodobnější hodnotou signálu je 0. Plocha pod křivkou pak udává pravděpodobnost výskytu hodnot signálu v daném rozsahu. Např. pravděpodobnost, že okamžitá hodnota signálu bude mít úroveň pod $\pm 1\sigma$ je $2 \cdot 34{,}1 = 68{,}2\,\%$, pravděpodobnost že úroveň šumového signálu přesáhne hodnotu $\pm 2\sigma$ je $100 - 2 \cdot (34{,}1 + 13{,}6) < 5\,\%$, atd. $\int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma = 1 \equiv 100\,\%$.



(a) (b)

Obrázek K.1: Časové funkce náhodného signálu (a) a hustotou pravděpodobnosti výskytu jednotlivých hodnot.

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

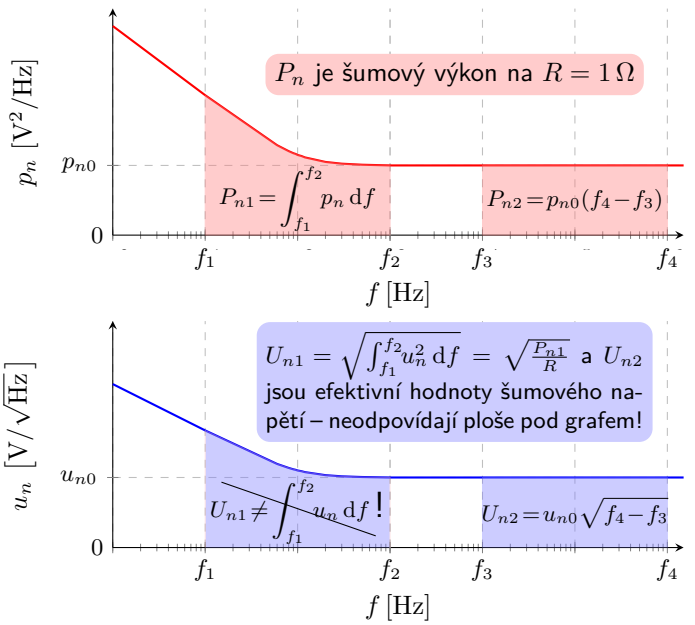
Statistická charakterizace šumových signálů je v čase poměrně stálá a je dobře měřitelné. Z tohoto důvodu se kvantifikují pomocí spektrální hustoty výkonu, viz obrázek K.2. Lze z nich vypočítat výkon šumu a efektivní (tj. i mezivrcholovou) hodnotu, pro určité kmitočtové pásmo.

Efektivní hodnota šumového napětí

Efektivní hodnotu šumového napětí lze přibližně určit i z časového průběhu signálu z mezivrcholového napětí U_{pp}.

$$U_{pp} \doteq 5U_{ef} \qquad \text{(K.1)}$$

Efektivní hodnota je však závislá na rozsahu kmitočtů a lze ji snadno určit ze spektrálních charakteristik. Výpočet šumového výkonu a efektivní hodnoty napětí je ilustrován na obrázku K.2. Pozor, efektivní hodnota napětí není přímo daná plochou pod křivkou!



Obrázek K.2: Spektrální charakteristiky šumového výkonu a napětí.

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

K.1. Vznik šumu a jeho druhy

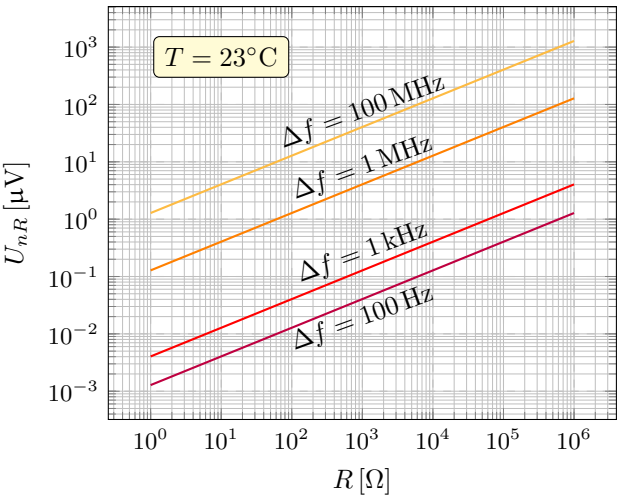
Tepelný šum

Tepelný (Johnsonův) resp. bílý šum je způsoben nahodilým pohybem elektronů. Jeho velikost závisí pouze na teplotě, nikoli na napětí, proudu. Významnou vlastností je to, že není kmitočtově závislý – má vyrovnané/konstantní kmitočtové spektrum. Tepelný šum vzniká typicky na rezistorech jako napětí (v sérii), resp. proud (paralelně s R), jehož efektivní hodnota je:

$$U_{nR}^2 = I_{nR}^2 R^2 \doteq 4k_B T R \Delta f, \qquad \text{(K.2)}$$

kde $k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,[\mathrm{J/K}]$ je Boltzmannova konstanta, $T\,[\mathrm{K}]$ je absolutní teplota rezistoru a $R\,[\Omega]$ je odpor rezistoru. Grafické vyjádření efektivní hodnoty U_{nR} je na obrázku K.3.

Tento typ šumu má v elektrických obvodech obvykle dominantní vliv (např. vstupní odpor $1\,\mathrm{M\Omega}$ při měření AC napětí osciloskopem). Další typy šumu vznikají v polovodičových součástkách.



Obrázek K.3: Závislost efektivní hodnoty šumového napětí rezistoru na jeho odporu pro různé šířky pásma.

Výstřelový šum

Výstřelový šum (Schottkyho nebo Poissonův, viz také zde) vzniká typicky na PN přechodech díky náhodným fluktuacím proudu (vznikem a rekombinacemi párů elektron/díra). Jeho spektrum je konstantní, podobně jako u bílého šumu a jeho výkonovou hustotu i_n, resp. efektivní hodnotu lze vyjádřit následovně:

$$i_n^2 = 2Iq, \qquad I_n^2 = i_n^2 \Delta f = 2Iq\Delta f \tag{K.3}$$

kde I je průměrný (DC) proud PN přechodu a $q = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,[\mathrm{C}]$ je náboj elektronu a Δf je šířka pásma, pro kterou hodnotu určujeme efektivní hodnotu.

Blikavý šum

Blikavý šum (Flicker noise) nebo též tzv. $1/f$ vzniká vlivem nečistot (poruchami v krystalové mříži) na PN přechodu protékaném proudem I. Jeho vliv roste na nízkých kmitočtech, jak vyplývá ze vztahu pro jeho proudovou hustotu:

$$i_n^2 = K_F \frac{I^{A_F}}{f}, \qquad I_n^2 = \int_{f_1}^{f_2} i_n^2 \,\mathrm{d}f \tag{K.4}$$

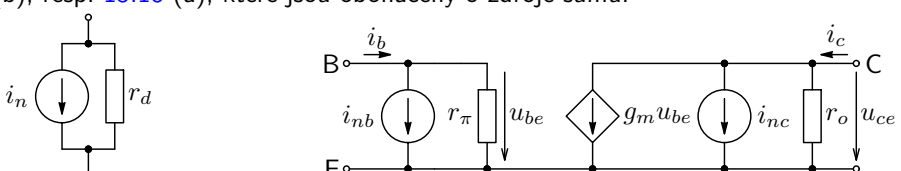
kde K_F je koeficient blikavého šumu (Flicker Noise Coefficient) a A_F je exponent blikavého šumu (Flicker Noise Exponent), viz např. wikipedia.org.[1]

Oba tyto druhy šumu (výstřelový i blikavý) jsou přítomny na PN přechodu, proto je pro polovodičové součástky s PN přechody typická spektrální charakteristika šumu dle obrázku K.2, viz např. graf z úvodní strany 109.

[1] Standardní nastavení default modelů programu Spice je `KF=0`, `AF=1`.

Šum rezistoru dle vztahu K.2 je jeho minimální úroveň, která je reálně vyšší - záleží na konstrukci, resp. materiálu odporové vrstvy, více viz např. 11 mýtů o analogovém šumu. Modeluje se nejčastěji proudovým zdrojem paralelně k danému rezistoru (nepřidávají se uzly), viz obvod na obrázku K.4 (a), kde $i_n = i_{nR}$. Na orientaci proudů nezávisí, jak bude ukázáno dále.

Stejně je pak realizován šumový model diody, přičemž šumový proud i_n je dán součtem vztahů (K.3) a (K.4). Analogicky lze vyjádřit i model bipolárního tranzistoru, jak ukazuje obrázek (b), kde i_{nb} a i_{nc} jsou šumové proudy jednotlivých přechodů. Jejich velikost je opět daná vztahy (K.3) a (K.4), tj. úměrná proudům I_B a I_C v pracovním bodě. Linearizované modely lze použít vzhledem k velmi malým amplitudám šumu. Ty pak vycházející z obrázků 15.5 (b), resp. 15.18 (a), které jsou obohaceny o zdroje šumu.

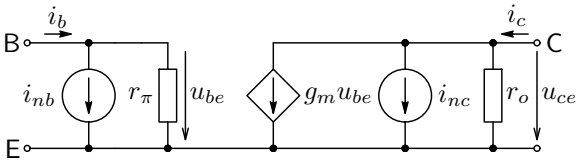


Obrázek K.4: Šumový model rezistoru, resp. polovodičové diody (a) a bipolárního tranzistoru (b).

Pozor, při analýze je nutné pracovat s kvadráty proudových hustot: jednak jejich velikost závisí na kmitočtu (obrázek K.2) a jednak uvažujeme šumové signály jako nekorelované. Jejich součet je nutné realizovat podobně jako v případě PNUS (kapitola 6, vztah (6.1)), tj. $i_n = \sqrt{i_{n1}^2 + i_{n2}^2 + \cdots} \Rightarrow$ **nezáleží na orientaci zrojů**.

K.2. Šumová analýza

Analýza šumových signálů je podobná AC analýze (HUS). Vzhledem k lineárním obvodům/modelům platí princip superpozice – je třeba pracovat se spektrálními hustotami šumu, jejíž kvadráty se pak sčítají, viz následující výpočet:



$$u_{be}^2 = i_{nb}^2 r_\pi^2, \quad u_{ce}^2 = (g_m^2 u_{be}^2 + i_{nc}^2) r_o^2, \tag{K.5}$$

$$U_{ce} = r_o \sqrt{\int_{f_1}^{f_2} \left((g_m i_{nb} r_\pi)^2 + i_{nc}^2 \right) \mathrm{d}f}, \tag{K.6}$$

kde U_{ce} je efektivní hodnota napětí. Pokud budeme uvažovat další prvky, např. R_B a R_C v zapojení 15.19, tak se výsledná hodnota změní na $u_{ce}^2 = \left((i_{nb}^2 + i_{nR_B}^2) r_{\pi B}^2 g_m^2 + i_{nc}^2 + i_{nR_C}^2 \right) r_{oC}^2$, kde $r_{\pi B} = r_\pi || R_B$, $r_{oC} = r_o || R_C$ a $i_{nR_B}^2$, resp. $i_{nR_C}^2$ jsou spektrální hustoty šumových proudů rezistoru R_B, resp. R_C.

Pokud obvod obsahuje akumulační prvky (je kmitočtově závislý) je třeba jednotlivé příspěvky spektrálních hustot násobit odpovídajícími přenosy. Výsledná hodnota spektrální hodnoty výstupního napětí je pak obecně dána vztahem:

$$u_{no}^2(f) = u_{ni_1}^2(f) |H_1(jf)|^2 + u_{ni_2}^2(f) |H_2(jf)|^2 + \cdots \tag{K.7}$$

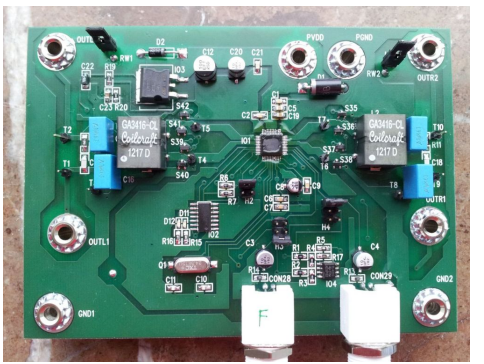
kde $u_{ni}^2(f)$ jsou spektrální hustoty jednotlivých šumových zdrojů (rezistorů a PN přechodů) a $H_i(jf)$ jsou kmitočtové charakteristiky přenosů těchto zdrojů na požadovaný výstup.

Více o analýze, včetně NOISE analýzy programů Spice např. zde.

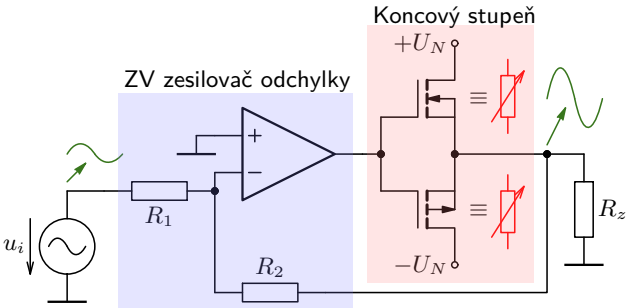
Dodatek L

Implementace zesilovače třídy D a jeho měření

Tato část obsahuje jednak úvod do implementace zesilovačů třídy D a možností jeho obvodové realizace a jednak komentář k měření na laboratorním přípravku výkonového zesilovače třídy D. Postup měření a měřicí metody jsou uvedeny v podrobném návodu na měření.

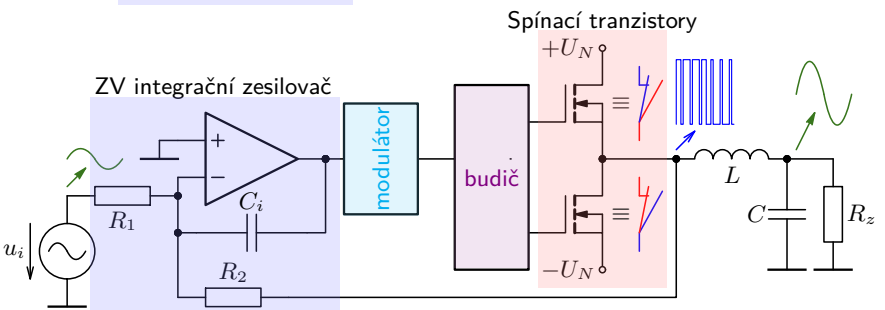


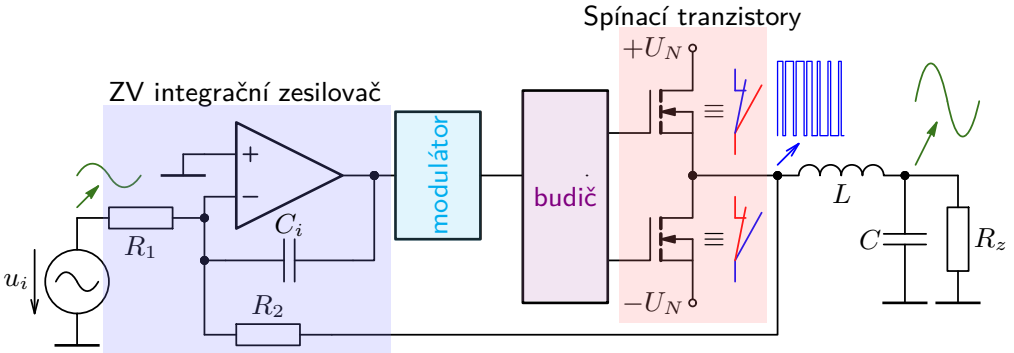
L.1. Obvodová řešení zesilovačů třídy D



Základní princip činnosti zesilovačů třídy D byl uveden v kapitole 16.17.6. Jeho využití je zřejmé z porovnání zesilovače s koncovým stupněm třídy B – obrázek vlevo, kde tranzistory pracují v lineárním režimu, tj. jako řízené zdroje proudu. Z výkonového hlediska se to rovná řízeným odporům, jejichž výkonové ztráty jsou pro ideální případ klasifikovány na straně XVI-94 až XVI-96.

Na rozdíl od této koncepce pracují koncové tranzistory zesilovačů třídy D ve spínacím režimu, přičemž jejich výkonová ztráta je v ideálním případě nulová, jak uvádí kapitola 16.17.6. Základní porovnání vlastností těchto tříd bylo ukázáno v kapitole 16.17.7. Obvodovou realizaci principu „digitálního“ zesilovače ukazuje rozšířené blokové schéma vlevo.





Obrázek L.1: Blokové schéma zesilovače pracujícího ve třídě D.

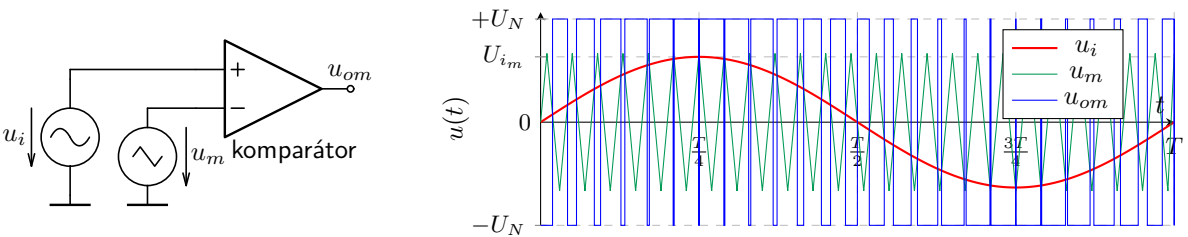
- Na rozdíl od principiálního zapojení na obrázku 16.78, jsou použity pouze N-kanálové tranzistory ⇒ stejné vlastnosti a lepší R_{on} i časy sepnutí a vypnutí (pohyblivost elektronů je větší než pohyblivost děr: $\mu_n > \mu_p$).
- Pro řízení spínacích tranzistorů je nutný speciální budič, viz dále.
- Zavádí se záporná zpětná vazba, která výrazně snižuje THD, tak zejména závislost na napájecím napětí U_N.
- ZZV je nutné zavádět přímo z výstupů spínacích tranzistorů nikoli z výstupu výstupního filtru (Butterworth LC LP), jehož fázový posuv by mohl způsobit nestabilitu (ZZV změnit na KZV pro určitý kmitočtový rozsah).

L.2. Modulátory zesilovačů třídy D

Modulátor je jedním z důležitých bloků zesilovače. Jeho úkolem je převést analogový vstupní signál na „digitální“ sled pulzů, jejichž střída („střední hodnota“) bude odpovídat vstupnímu signálu. Je zřejmé, že kmitočet pulzů (f_c) musí být podstatně větší než kmitočet vstupního signálu. Pro tento účel se používají následující typy modulátorů:

Pulzně šířkový modulátor (PWM)

Princip pulzně šířkového modulátoru byl již ukázán na obrázku 16.78, včetně analýzy.



(a) (b)

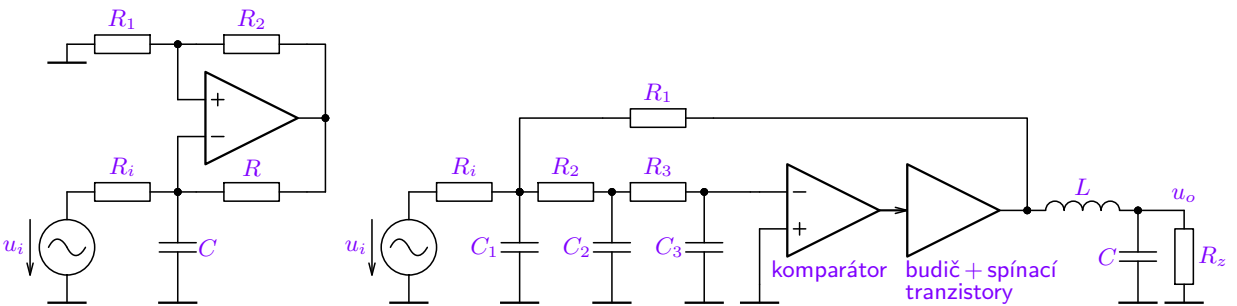
Obrázek L.2: Principiální zapojení pulzně šířkového modulátoru (a) a časové průběhy obvodových veličin (b).

- Výhodou tohoto typu modulátoru je jeho jednoduchá obvodová implementace, obvykle $f_c > 250\,\mathrm{kHz}$.
- Pro malé THD je ale nutné generovat trojúhelníkový průběh u_m s výbornou linearitou, $U_{i_m} \approx U_{m_m}$ je výhodné.
- Nevýhodou jsou velmi úzké pulzy při malých úrovních $u_i \Rightarrow$ problematické spínání výkonových tranzistorů.

Samooscilující (Self-oscillating) modulátory

Dalším modulátorem s velmi jednoduchou obvodovou implementací je princip tzv. samooscilujícího obvodu, jehož střída je modulována vstupním signálem. Nevýhodou je nelinearita převodu, jejíž vliv na THD je pak je pak nutný minimalizovat zpětnou vazbou.

Zapojení na obrázku L.3 (a) vychází z řízeného MKO, viz kapitolu 18.2.1, kde je vstupním signálem ovlivněno nabíjení kapacitoru C. Podobně pracuje i zapojení (b), kdy využito série tří RC článků. Pozor, nejedná se o modifikaci oscilátoru s posouvanou fází z podkapitoly 18.1.3. Princip funkce je obdobný zapojení (a), viz analýzy zapojení (a) i zapojení (b). Další možná implementace samooscilujícího modulátoru je pak ukázaná na obrázku L.17.

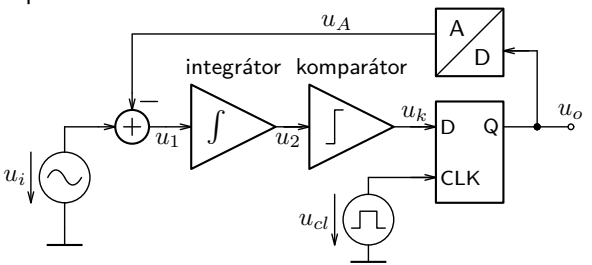


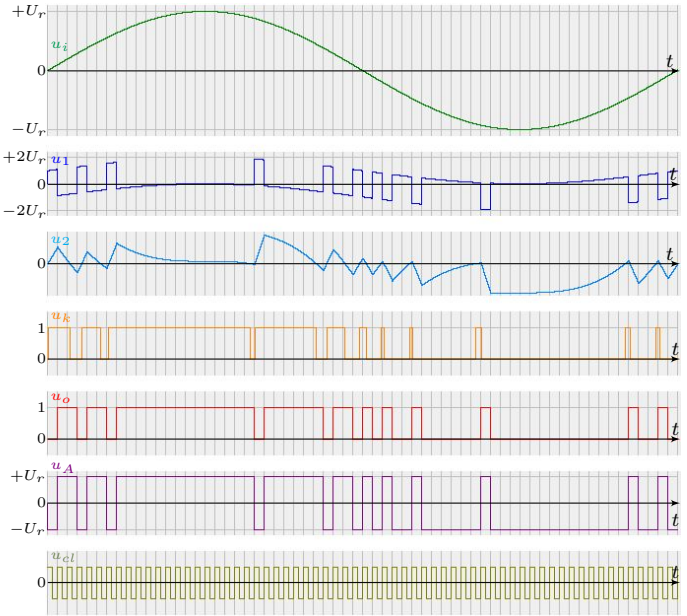
Obrázek L.3: Samooscilující modulátor s komparátorem s hysterezí (a), s posouvanou fází a výstupním filtrem (b).

Princip Sigma-Delta (Σ-Δ) modulátoru

Rozšířeným modulátorem (zejména pro AD převodníky je tzv. Sigma-Delta (Σ-Δ) modulátor, který se hojně využívá v analogově-číslicových převodnících. Principiální schéma je na obrázku níže.

Princip je podobný samooscilujícím modulátorům. Rozdíl je však v nabíjení kapacitoru, které je „lineární“ (integrátor) a ve výstupním obvodu, který je tvořen klopným obvodem typu D, zajišťujícím synchronizaci výstupních pulzů, viz časové průběhy vpravo.



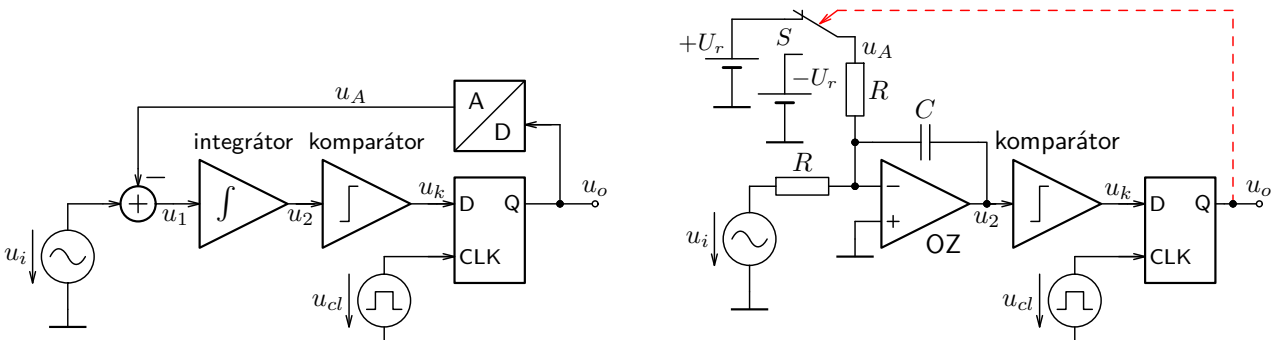


Obrázek L.4: Základní blokové uspořádání Σ-Δ modulátoru a časové průběhy obvodových veličin (převzaty).

Princip Sigma-Delta (Σ-Δ) modulátoru

Z výše uvedených průběhů je zřejmé, že v toto uspořádání je použit jednobitový převodník. Jeho obvodová implementace spolu s integrátorem je pak ukázána na obrázku (b) níže.

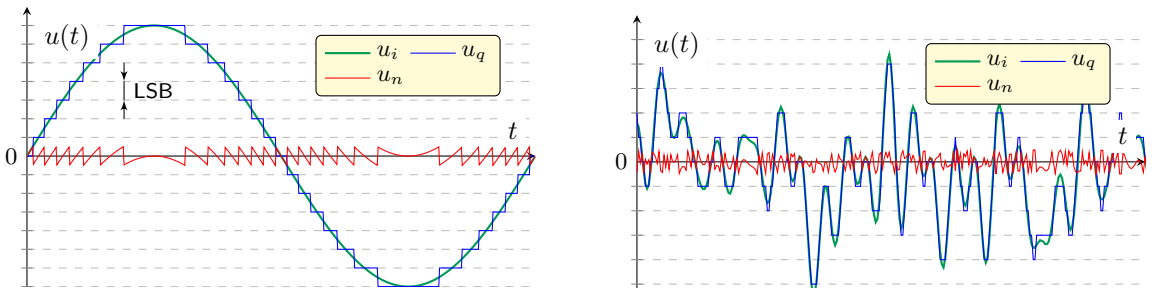
Jednou z výhod tohoto modulátoru jsou synchronní výstupní pulzy, jejichž minimální šířka je pevně daná kmitočtem f_c hodinového signálu u_{cl}. To je velmi důležité při konstrukci budiče a koncového stupně, jelikož spínací tranzistory mají nenulový čas sepnutí a rozepnutí. Rozbor vlastností a modifikací Σ-Δ modulátoru viz dále.



Obrázek L.5: Blokové schéma Σ-Δ modulátoru (a) a ukázka obvodové realizace integrátoru a jednobitového D/A převodníku (b).

L.2.1. Kvantizační šum a SNR a analogově-číslicového (AD) převodu

Z principu funkce (AD) převodu/modulace je zřejmé,že výstupní data (signál) nebude přesně odpovídat velikosti vstupního signálu. Jejich rozdíl je označován jako tzv. kvantizační šum, viz obrázek níže.



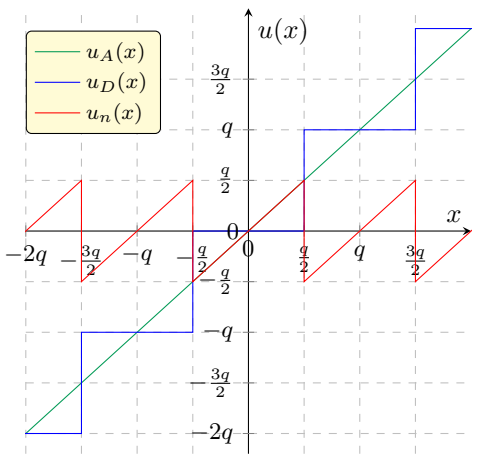
(a) (b)

Obrázek L.6: Vzorkování signálu u_i 4 bitovým převodníkem (u_q) a kvantizační šum $u_n = u_i - u_q$ pro harmonický signál (a) a audio signál (b).

Podobně je tomu i u Σ-Δ modulátoru, kde pro zapojení L.5 platí $T_1 \frac{u_i+U_r}{R} + T_2 \frac{u_i-U_r}{R} = 0 \Rightarrow u_i = U_r \frac{T_2-T_1}{T_2+T_1}$, kde T_1, resp. T_2 je čas nabíjení, resp. vybíjení kapacitoru C. Vzhledem k tomu, že T_1 i T_2 jsou násobkem $T_c = \frac{1}{f_c}$, tak přesnost evidentně závisí na délce času převodu (počtu T_c na čas převodu) a převod není bez chyby.

L.2.2. Kvantizační šum ideálního N-bitového AD převodníku

Na obrázku níže je demonstrován převod analogového signálu $u_A(x) = x$ ideálním převodníkem na digitální signál $u_D(x)$ s kvantizačním krokem $\mathrm{LSB} = q$ a chybový signál, tzv. kvantizační šumem $u_n(x) = u_A(x) - u_D(x)$.



Obrázek L.7: Analogový signál $u_A(x)$, jeho digitalizace $u_D(x)$ a kvantizační šume $u_n(x)$.

Efektivní hodnotu kvanizačního šumu ideálního N bitového převodníku s kvantizační úrovní $q \equiv \mathrm{LSB} = \frac{2U_r}{2^N}$ lze vyjádřit

$$u_n(x) = x \text{ pro } -\frac{q}{2} < x < \frac{q}{2} \Rightarrow \boxed{U_n} = \sqrt{\frac{1}{q}\int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} u_n^2 \,\mathrm{d}x} \boxed{= \frac{q}{\sqrt{12}}}. \tag{L.1}$$

Pro sinusový signál s amplitudou $A_m = \frac{q2^N}{2}$, ($U_{ef} = \frac{A_m}{\sqrt{2}}$) je odstup signál-šum dle (6.20) a z něho tzv. efektivní počet bitů (ENOB):

$$\mathrm{SNR_{dB}} = 10\log\left(\frac{U_{ef}^2}{U_n^2}\right) = 10\log\left(\frac{2^{2N}\cdot 12}{4\cdot 2}\right) \doteq$$

$$\doteq 20\log\left(2^N\right) + 10\log\left(\frac{3}{2}\right) \doteq 6{,}02N + 1{,}76\,[\mathrm{dB}] \tag{L.2}$$

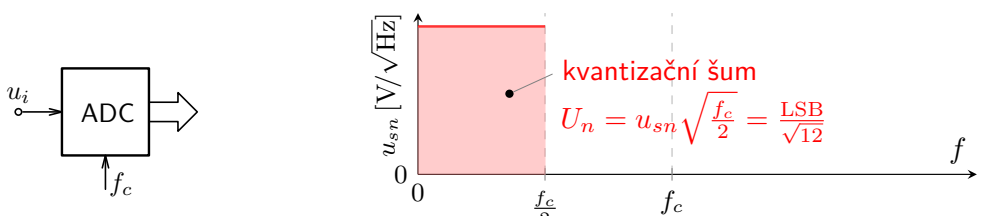
$$N \doteq \frac{\mathrm{SNR_{dB}} - 1{,}76\,[\mathrm{dB}]}{6{,}02\,[\mathrm{dB}]} \tag{L.3}$$

Spektrální hustota kvantizačního šumu

Je zřejmé, že snížení kvantizačního šumu analogově-číslicového převodníku (Analog-Digital Converter – ADC) dosáhneme zvýšením počtu bitů N a tím zmenšením kvantizační úrovně q nepřímo úměrné 2^N. Tím se samozřejmě zvýší i odstup signál-šum. Kvantizační šum je rozložen v pásmu do poloviny vzorkovacího kmitočtu $f \in \left(0, \frac{f_c}{2}\right)$ a má konstantní spektrální hustotu $u_{sn}\,[\mathrm{V}/\sqrt{\mathrm{Hz}}]$ úměrnou efektivní hodnotě kvantizačního šumu:

$$u_{sn} = \frac{U_n}{\sqrt{f_c/2}} = \frac{\mathrm{LSB}}{\sqrt{12}\sqrt{f_c/2}}. \tag{L.4}$$

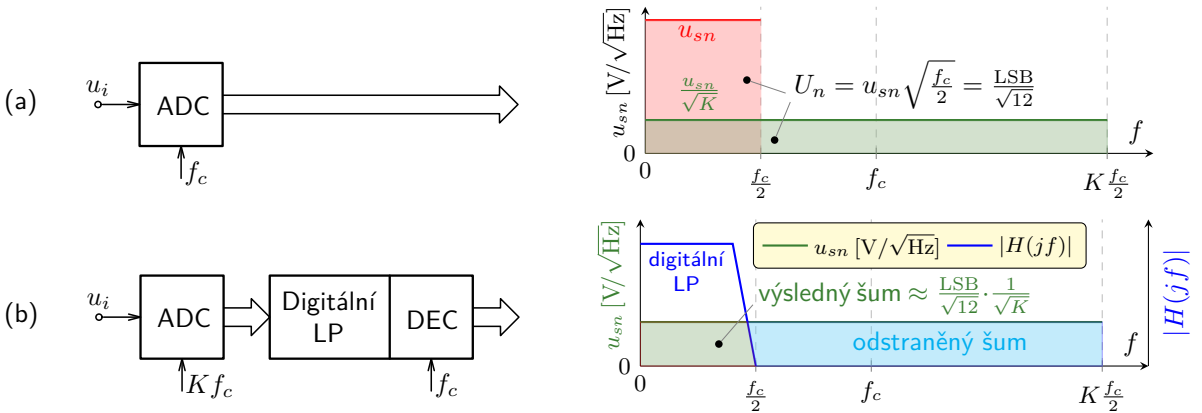
Grafické znázornění spektrální hustoty kvantizačního šumu v závislosti na kmitočtu je ukázána na následujícím obrázku, přičemž plocha pod čarou je úměrná efektivní hodnotě šumu (viz matematické vyjádření v grafu).



Obrázek L.8: Spektrální hustoty kvantizačního šumu $u_{sn}\,[\mathrm{V}/\sqrt{\mathrm{Hz}}]$ pro vzorkovací kmitočet f_c.

Pokud zvýšíme vzorkovací kmitočet na Kf_c (tzv. převzorkování), sníží se spektrální hustota šumu. Pokud následně použijeme digitální filtr typu LP ($|H(jf)|$) pro odstranění spektra nad $f_c/2$ a decimátor, sníží se i výsledná efektivní hodnota šumu, viz obrázek níže. SNR pak lze vyjádřit vztahem (viz data-conversion-handbook, resp. Chapter2, případně Calculating Delta-Sigma SNRs):

$$\mathrm{SNR_{dB}} \doteq 10\log\left(2^{2N-1}\frac{3}{2}K\right) \doteq 6{,}02N + 1{,}76 + 10\log(K)\,[\mathrm{dB}] \tag{L.5}$$

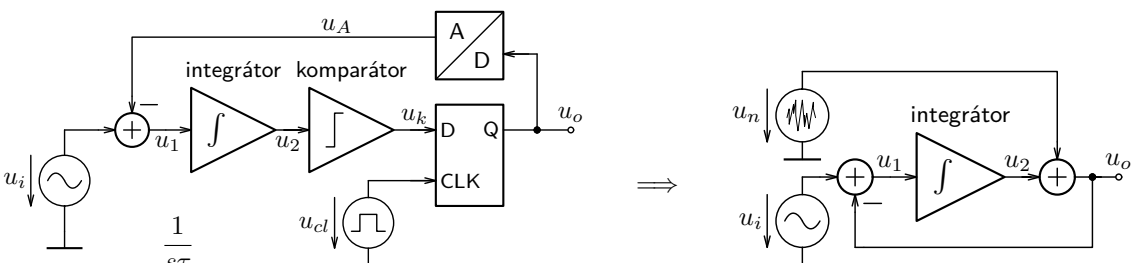


Obrázek L.9: Kvantizační šum AD převodníku pro vzorkování f_c a Kf_c (a) a s použitím digitálního filtru (b).

Modifikace a vlastnosti Sigma-Delta (Σ-Δ) modulátoru

Princip tzv. převzorkování se samozřejmě používá i v Σ-Δ modulátorech. Nicméně výrazné zvyšování koeficientu převzorkování K je neefektivní, vzhledem k tomu, že SNR je úměrné $\log(K)$, viz vztah (L.5). V případě Σ-Δ převodníků/modulátorů je však možné výhodně využít jeho kmitočtové závislosti pro kvantizační šum.

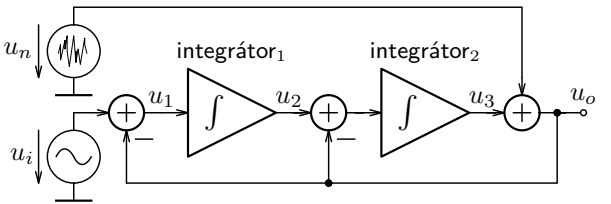
Pokud vyjdeme ze schématického blokového schématu Σ-Δ modulátoru na následujícím obrázku vpravo, lze odvodit jak přenos H_{1s} pro vstupní signál u_i, tak H_{1n} pro kvantizační šum u_n, přičemž přenos integrátoru předpokládáme ve tvaru $H_i(s) = \frac{1}{s\tau}$.



$$U_o = (U_i - U_o)H_i(s) + U_n(s) \;\Rightarrow\; H_{1s}(s) = \left.\frac{U_o(s)}{U_i(s)}\right|_{u_i=0} = \frac{1}{s\tau + 1}, \quad H_{1n}(s) = \left.\frac{U_o(s)}{U_n(s)}\right|_{u_n=0} = \frac{s}{s + \omega_0} \qquad \text{(L.6)}$$

Obrázek L.10: Struktura Σ-Δ modulátoru 1. řádu a jeho přenos pro signál a kvantizační šum.

Jak je zřejmé z (L.6), je přenos pro signál typu LP, kdežto pro kvantizační šum představuje modulátor filtr typu horní propust. Toho se využívá spolu s metodou převzorkování pro redukci kvantizačního šumu, jak je dále ukázáno. Níže je uveden modulátor 2. řádu s odpovídajícími přenosy.

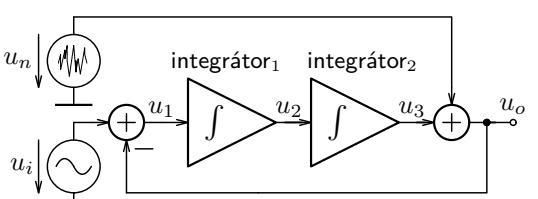


$$H_{2s}(s) = \left.\frac{U_o(s)}{U_i(s)}\right|_{u_n=0} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + s\omega_0 + \omega_0^2} \qquad \text{(L.7)}$$

$$H_{2n}(s) = \left.\frac{U_o(s)}{U_i(s)}\right|_{u_i=0} = \frac{s^2}{s^2 + s\omega_0 + \omega_0^2} \qquad \text{(L.8)}$$

Obrázek L.11: Struktura Σ-Δ modulátoru druhého řádu a jeho přenos pro signál a kvantizační šum.

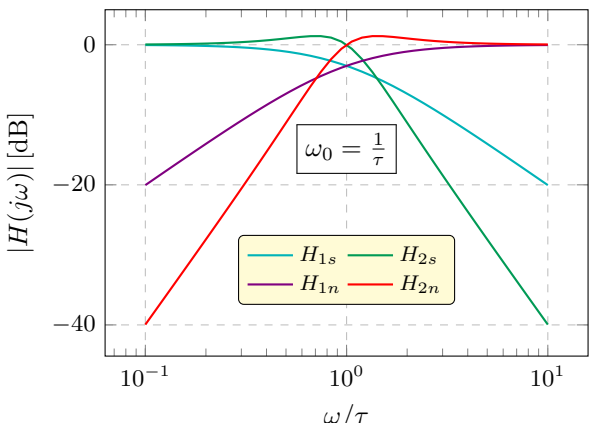
Je zřejmé, že vyšší řád modulátoru vede i na vyšší řád přenosových funkcí, což dále zlepšuje vlastnosti, ale může vést k nestabilitě. Nelze např. použít strukturu níže, pro kterou leží póly přenosové funkce na imaginární ose!



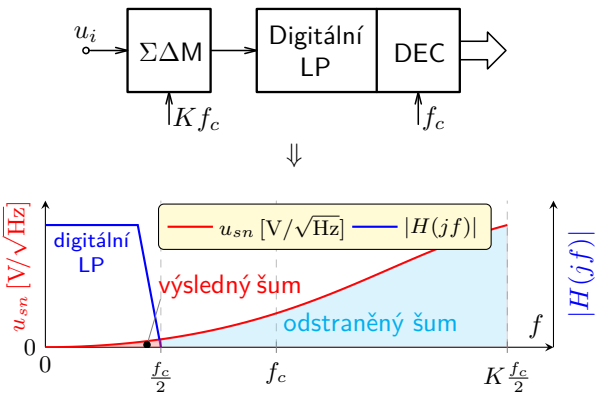
$$U_o = (U_i - U_o)H_i(s)^2|_{u_n=0} \Rightarrow H_s(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{s^2\tau^2 + 1} \qquad \text{(L.9)}$$

Obrázek L.12: Struktura nestabilního Σ-Δ modulátoru druhého řádu a jeho přenos pro signál u_i.

Amplitudové charakteristiky a výše uvedených přenosů pro první i druhý řád a pro signál i kvanizační šum jsou ukázány níže, na obrázku vlevo. Obrázek vpravo pak ukazuje vliv kmitočtové závislosti modulátoru na kvantizační šum na jeho redukci vlivem digitálního filtru převzorkování. Vliv kmitočtové závislosti modulátoru (LP) na signál je při správně nastavených parametrech minimální.



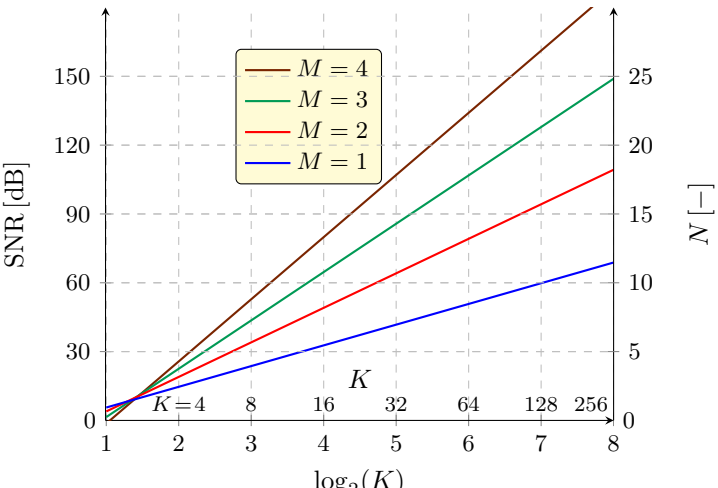
Obrázek L.13: Amplitudové charakteristiky Σ-Δ modulátoru 1. a 2. řádu a pro signál a kvantizační šum.



Obrázek L.14: Redukce kvantizačního šumu Σ-Δ modulátoru 2. řádu při převzorkování Kf_c a následném použití digitálního filtru a decimátoru.

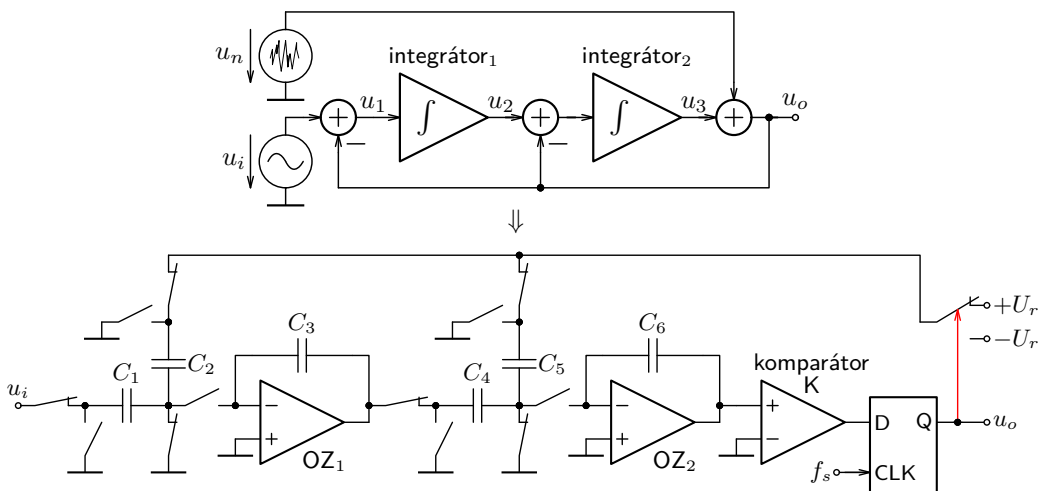
Použitím dalších integrátorů lze realizovat i vyšší řád modulátoru a tím více „přesunout“ kvantizační šum do vyšších kmitočtů spektra k Kf_c, kde bude pak odstraněn digitálním filtrem. Touto technikou lze významně zvýšit přesnost modulátoru/převodníku, tj. efektivní počet bitů a tím odstup signál-šum. Ten lze vyjádřit vztahem (L.10), jehož grafické znázornění je na obrázku L.15.

$$\mathrm{SNR}_{\mathrm{dB}} = 10\log\frac{3(2M+1)K^{2M+1}}{2\pi^{2M}} \doteq$$
$$\doteq 10\log\left((2M+1)K^{2M+1}\right) +$$
$$+ 1{,}76 - 9{,}94M\ [\mathrm{dB}] \quad \text{(L.10)}$$



Obrázek L.15: Závislost SNR Σ-Δ modulátoru různého řádu (M) a velikosti převzorkování (Kf_c).

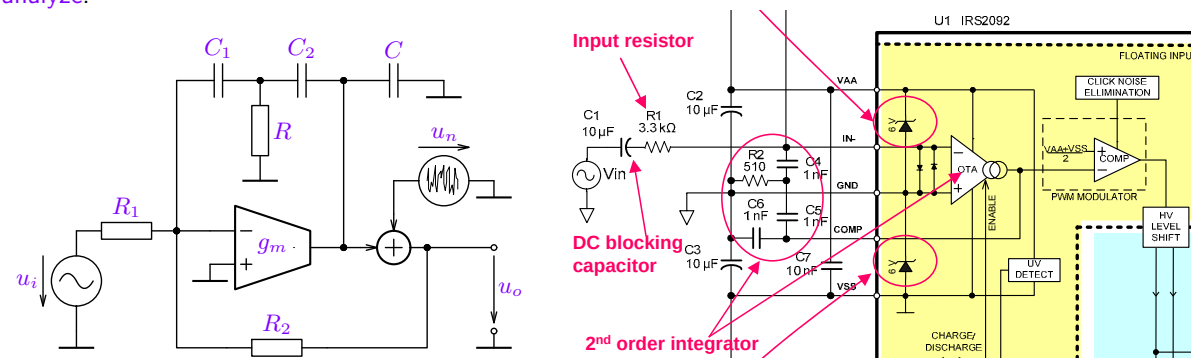
Pro realizaci Σ-Δ modulátorů se hojně využívá technika spínaných kapacitorů, jak je ukázáno na obrázku níže. Správným fázováním spínačů docílíme požadované funkce (sčítání, resp. odčítání signálu) a volbou poměrů kapacit C_1, C_2, $C3$, resp. C_1, C_2, $C3$ lze měnit jak ω_0 tak Q přenosu a tím požadovaný tvak kmitočtové charakteristiky.



Obrázek L.16: Implementace integrátorů Σ-Δ modulátoru 2. řádu pomocí techniky spínaných kapacitorů.

Podobný princip lze nalézt i v případě jiných typů modulátorů. Na obrázku níže je implementace samooscilujícího modulátoru s využitím transkonduktančního zesilovače (OTA), který využívá podobnou strukturu s jako Σ-Δ modulátor s integrátory. Tento typ modulátoru je použit v populárním obvodu IRSIRS2092 (viz datasheet), který je základem mnoha konstrukcí audio zesilovačů.

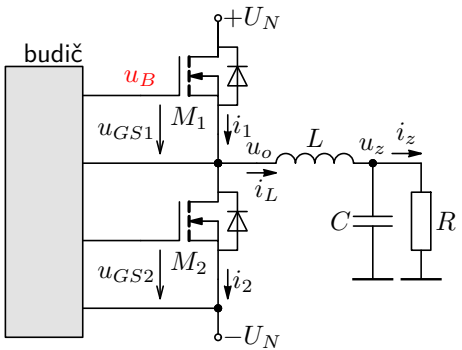
Vzhledem k rozsahu materiálu nejsou zde přenosy pro signál a kvantizační šum jsou uvedeny. Čtenář je však najde v analýze.



Obrázek L.17: Zjednodušená struktura samooscilujícího modulátoru s implenetací pomocí zesilovače OTA pro výpočet přenosu signálu a kvantizačního šumu a ukázka použití struktury s obvodem IRSIRS2092, obrázek převzat.

L.2.3. Budič koncových tranzistorů zesilovačů třídy D

Úkolem budiče je rychle sepnout koncové tranzistory na základě řídícího signálu. To znamená:



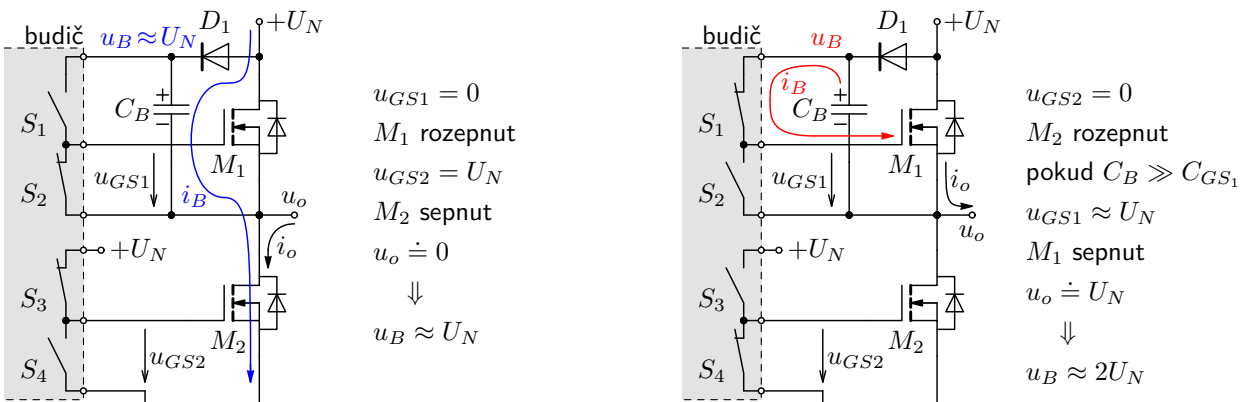
Obrázek L.18: Koncový stupeň zesilovače třídy D s budičem (schématicky).

- Vzhledem k nenulové kapacitě C_{GS} výkonových MOSFETů je třeba při spínání dodat dostatečně velký proud i_G do řídící elektrody pro velmi rychlé nabití (přebití) parazitní kapacity C_{GS}, tzn. $\Delta t_o i_G = C_{GS} \Delta u_{GS} \Rightarrow i_G$ pro $\Delta u_{GS} \gg U_{TO}$, viz obrázky 13.31 a 13.32.
- Pro sepnutí M_1 je třeba napětí $u_B > U_N$, jelikož při jeho sepnutí je $u_0 \to U_N$ a je třeba, aby opět $u_{GS1} \gg U_{TO}$.
- Vzhledem k reálným časům sepnutí a vypnutí MOSFET (t_{on} a t_{off}), je při přepínání tranzistorů nutné zařadit časovou prodlevu tzv. dead-time, aby nedošlo k sepnutí obou tranzistorů najednou.

Dále jsou ukázána řešení výše uvedených bodů.

Spínání kladného napájení N-MOSFETem

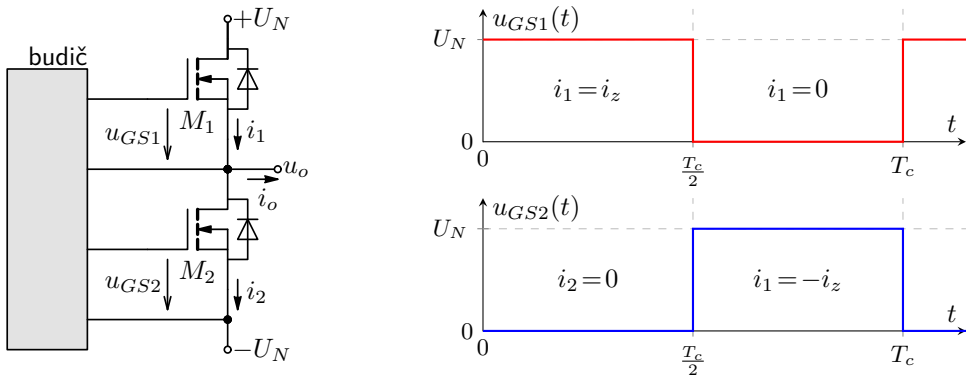
Pro vytvoření napětí $u_B > U_N$ se využívá tzv. „bootstrap“ kapacitoru, který se při sepnutí M_2 nabije na $u_B \approx U_N$, viz obrázek vlevo(a). Při spínání M_1 se pak toto napětí přičítá k u_o, viz obrázek (b). Kapacita se C_{GS} se nabijí z C_B, tj. $Q_B \doteq U_N C_B = (C_B + C_{GS1}) u_{GS1} \Rightarrow u_{GS1} = U_N \frac{C_B}{C_B + C_{GS1}}$, více viz přednáška.



Obrázek L.19: Využití tzv. „Boot Strap“ kapacitoru pro vytvoření spínacího napětí tranzistoru M_1.

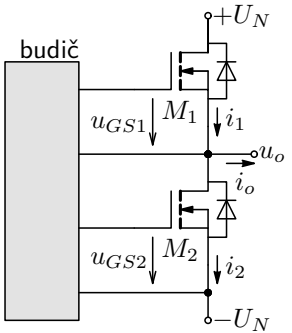
Časování spínacích signálů koncových tranzistorů zesilovačů třídy D

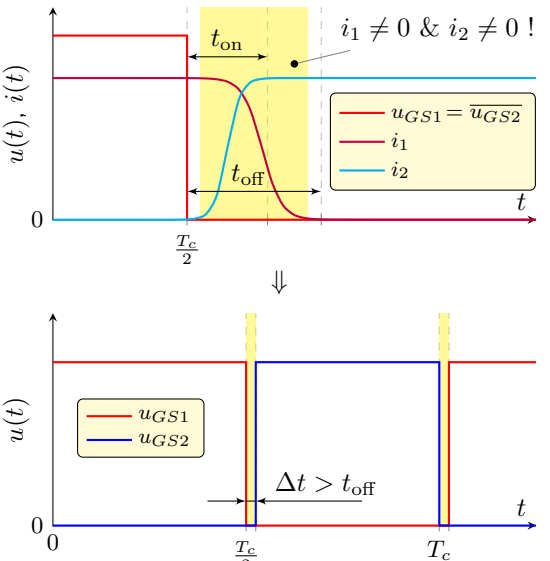
V ideálním případě by se časování tranzistorů řídilo podle signálů uvedených níže. V okamžiku vypnutí jednoho tranzistoru okamžitě spíná druhý. To však v reálném obvodu nelze uskutečnit vzhledem k dynamickým vlastnostem MOSFETu, viz dále.



Obrázek L.20: Řídící signály pro ideální spínací tranzistory koncového stupně zesilovače třídy D.

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL





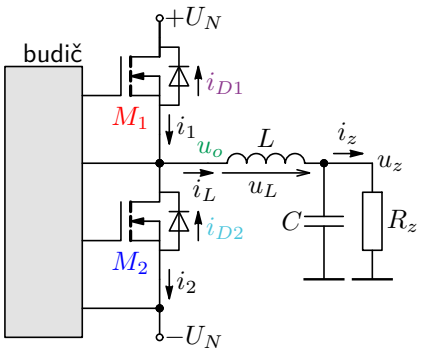
- Nenulové časy sepnutí a vypnutí spínacích tranzistorů MOS (t_{on} a t_{off}) mohou způsobit zkratový proud napájecího zdroje (oba tranzistory otevřené), viz horní graf. ↗
- Zařazením časové prodlevy tzv. Dead-time Δt (úkol budiče) se zabrání sepnutí obou tranzistorů najednou, viz graf vpravo. ↗

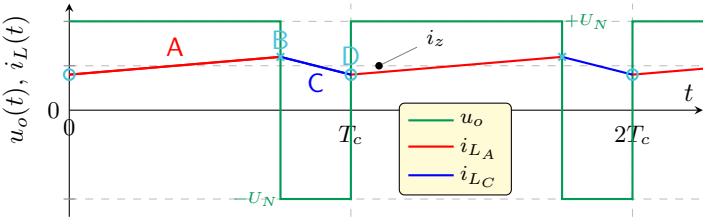
Obrázek L.21: Typické průběhy spínaní tranzistorů a řídící signály koncového stupně se zařazeným zpožděním, tzv. dead-time.

Při použití „vyhlazovacího“ výstupního LC filtru je značně ovlivněn tok jednotlivých proudů koncového stupně. Vysvětlení je rozděleno na tři případy: pro u_z, resp. $i_z > 0$, dále $i_z < 0$ a u_z, resp. $i_z \approx 0$.

Proudy koncového stupně pro $i_z > 0$

Předpokládejme vysoký spínací kmitočet f_c, tj. minimální změnu napětí u_z na zátěži za $T_c \Rightarrow$ lineární průběh proudu induktorem (viz také kapitolu 19.3.3). Pak lze poměry koncového stupně znázornit na následujícím grafu.





A M_1 je otevřen, M_2 uzavřen, $u_o \doteq U_N$, $u_L \doteq U_N - u_z \approx \text{konst.} > 0$ a $i_L = i_1 = i_{M1} > 0$ lineárně roste.

B Dead-time, tj. M_1 a M_2 uzavřeny, $i_L = i_{D2} > 0$ lineárně klesá, jelikož $u_o \approx -U_N \Rightarrow u_L = u_z - U_N \approx \text{konst.} < 0$.

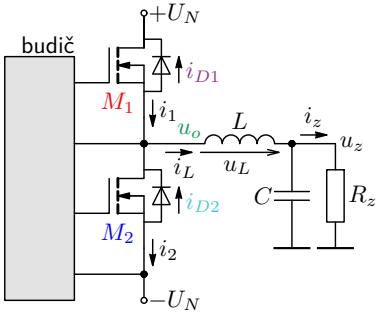
C M_2 se otevře a přebírá proud diody, tj. $i_L = -i_2 > 0$ dále lineárně klesá, vše ostatní jako v bodě B.

D nastává dead-time, tj. opět $i_L = i_{D2} > 0$ a lineárně klesá. Poté se sepne M_1, i_L začne růst a děj se opakuje.

Obrázek L.22: Časové průběhy obvodových veličin koncového stupně zesilovače třídy D se zařazeným LC filtrem.

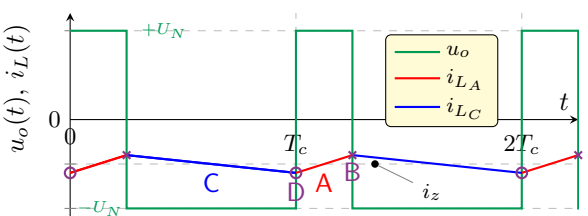
© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

Proudy koncového stupně pro $i_z < 0$ a $i_z \approx 0$

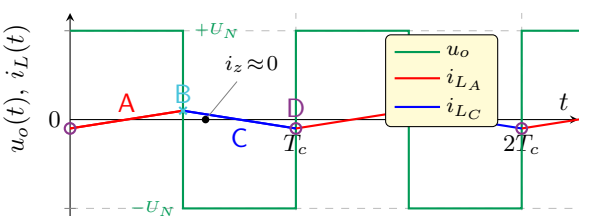


Analogická situace jako v předchozím případě je i pro $i_z < 0$, viz obrázek (a) níže. V případě C je M_2 otevřen a $i_L = -i_2 < 0$ lineárně klesá. Poté pro D nastává dead-time, tj. $i_L = -i_{D1} < 0$ lineárně stoupá (směrem k nule, $u_L > 0$). V případě A proud diody přebírá M_1 ($i_L = -i_1 < 0$), atd.

Pro $i_z \approx 0$ viz obrázek (b). V případě A $i_L = i_1$ lineárně stoupá, uprostřed intervalu změní znaménko, ale jinak se nemění nic. V bodě B nastává dead-time a $i_L = i_{D2} > 0$ lineárně klesá ($u_L > 0$). Pro C M_2 přebírá proud diody, tj. $i_L = -i_2 > 0$, uprostřed intervalu změní znaménko a dále lineárně klesá. Pro D nastává opět dead-time, $i_L = -i_{D1} < 0$ lineárně stoupá a děj se opakuje.



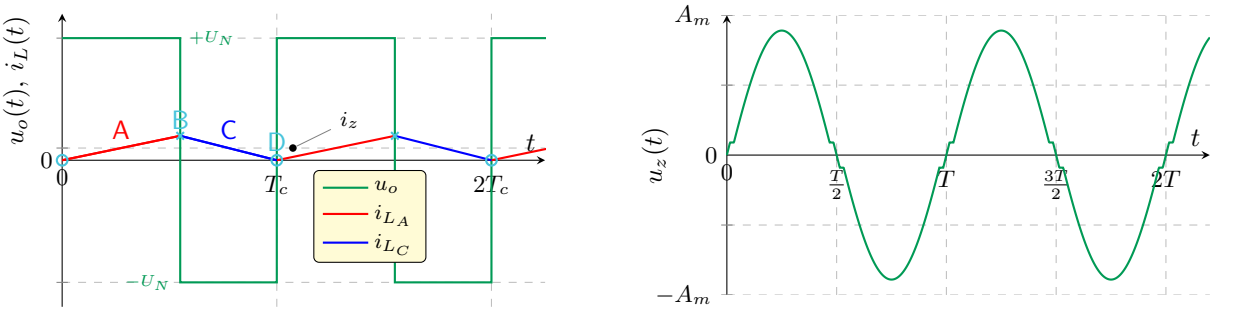
(a): $i_z < 0$



(b): $i_z \approx 0$

Obrázek L.23: Časové průběhy obvodových veličin koncového stupně D zesilovače třídy pro $i_L < 0$ a $i_z \approx 0$.

V žádném z výše uvedených případů nedojde ke stavu, kdy v průběhu dead-time je $i_L = 0$, tj. $i_L = 0$ pouze na nulový okamžik, kdy mění znaménko ($i_z \approx 0$). V těchto případech přidání dead-time nemá negativní důsledky. Nicméně v případě ilustrovaném na obrázku (a) níže dojde v bodě D k situaci, kdy $i_L = 0$ právě s příchodem dead-time. Obdobně je tomu i v bodě B pro $i_z < 0$ (není zobrazeno). Přidání zpoždění (dead-time) v těchto případech, tj. pro malé amplitudy výstupního napětí u_z vede na zpožděný náběh proudu i_L a tím k přechodovému zkreslení signálu, jak ilustruje obrázek (b). Toto zkreslení lze zmenšit minimalizováním dead-time (pro rychlé MOSFETy), ale ne zcela potlačit. Dále ho pak snižuje zavedení záporné ZV.

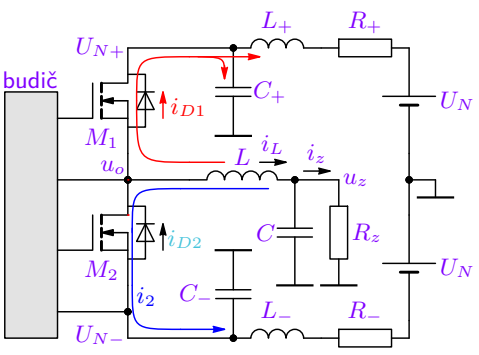


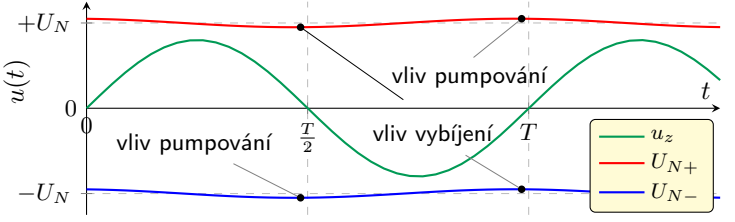
(a) (b)

Obrázek L.24: Časové průběhy obvodových veličin koncového stupně D zesilovače třídy pro $i_L \geq 0$ a zkreslení signálu vlivem mrtvých časů (dead-times).

L.2.4. „Pumpování“ napájecího napětí (Power Supply Pumping)

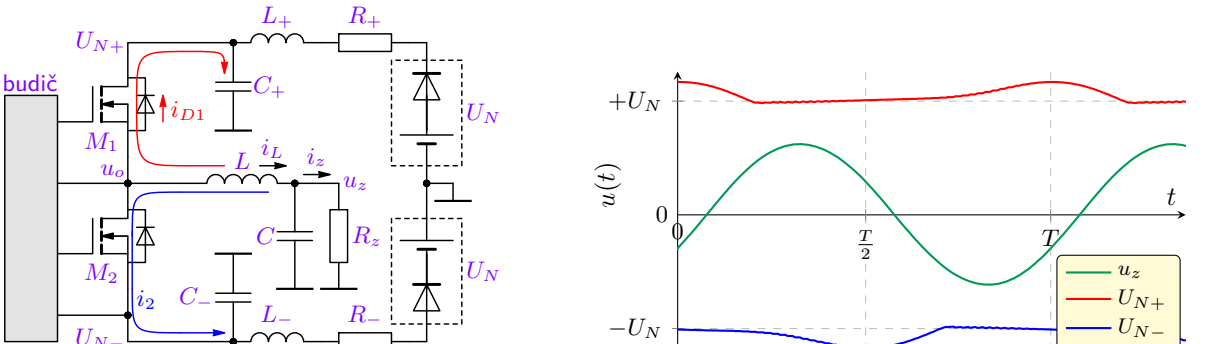
Při odpojování indukčnosti LC filtru vznikají komutační proudy. Na obrázku níže je ukázán tok tohoto proudu po rozepnutí tranzistoru M_2. Proud i_2, který procházel indukčností bude po rozpojení procházet ochrannou diodou i_{D1} v době dead-time a poté sepnutým tranzistorem M_1, pokud je $i_L < 0$, viz obrázek L.23 (a), případ D. Pokud tento stav ($u_z < 0$) trvá déle, tj. pro nízké kmitočty u_i , tak příspěvky komutačních proudů zapříčiní nárůst napětí U_{N+} na filtračním kapacitoru C_+, který je oddělen od napájecího napětí U_N parazitní odpory R_+ a indukčnostmi spojů L_+, jak ukazuje následující obrázek. Analogicky pak dochází k pumpování i při $i_L > 0$ (obrázek L.22, případ B). Vlivem odběrových proudů dochází k i vybíjení $C_\pm$, nicméně efekt pumpování je při reálném zdroji podstatně větší, viz dále i analýzu.





Obrázek L.25: Znázornění proudu i_2 při sepnutém tranzistoru M_2 a komutačního proudu při jeho rozpojení a časové změny napětí $U_{N\pm}$ koncového stupně D zesilovače třídy s ideálními napájecími zdroji.

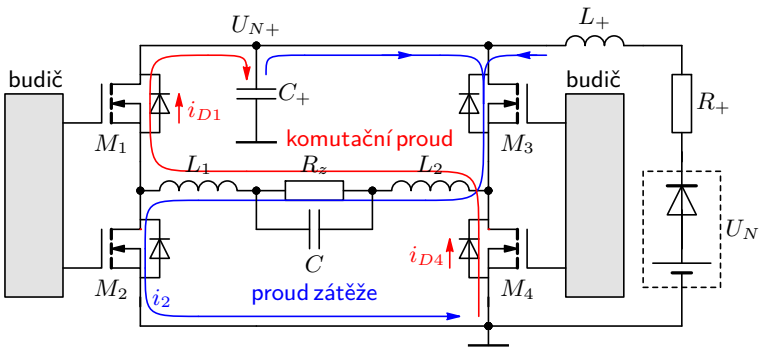
V uvedené konfiguraci je „pumpování“ málo znatelné. To však neplatí pro většinu napájecích zdrojů – ty totiž pracují pouze v 1. kvadrantu a nedovolují protékání proudu opačné (spotřebičové) polarity. Takový zdroj můžeme modelovat s ideální diodou v sérii, jak uvádí následující obrázek. Tato skutečnost radikálně mění poměry v obvodu komutačního proudu. Ten pak protéká pouze kapacitorem C_+, resp. C_-, který je pouze nabíjen a nikoli vybíjen do U_N. Změna napájecího napětí U_{N+}, resp. U_{N-} je pak podstatně markantnější, jak uvádí obrázek níže. Vliv „pumpování“ bude větší pro nízké kmitočty u_i, resp. u_z, malé blokovací kapacity $C_\pm$, velké U_N a zároveň malé R_z (velké I_z).



Obrázek L.26: Vliv komutačního proudu na pumpování napájecího napětí U_{N+} koncového stupně zesilovače třídy D s napájecími zdroji pracujícími v 1. kvadrantu.

Popsaná situace odpovídá „pumpvání“ napájecího napětí je podobná principu spínaného zvyšujícího měniče, viz kapitolu 19.3.4.

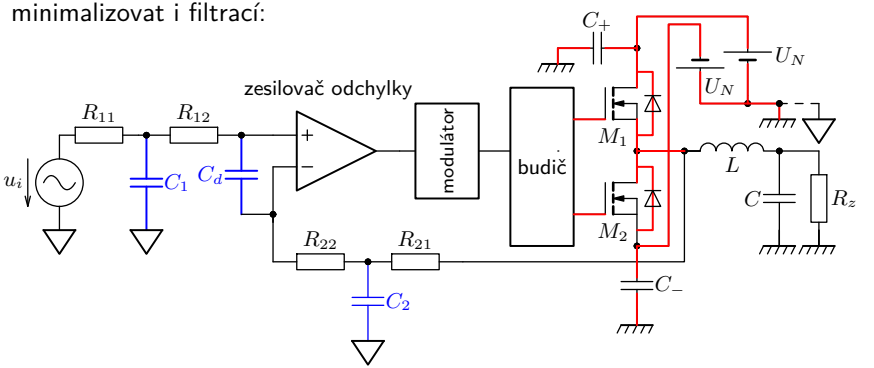
V případě můstkového zapojení koncového stupně (viz sekci 16.78, obrázek 16.79) vzniká také komutační proud, který v jedné části spínací periody T_c nabíjí filtrační kapacitor C_+. V druhé části se však po opětovném sepnutí tranzistoru M_2 napájí zátěž jak z jednoho napájecího zdroje, tak toho samého kapacitoru C_+ a ke zmíněnému efektu zvyšování (pumpování) napájecího napětí U_+ v případě můstkového zapojení koncového stupně nedochází.



Obrázek L.27: Znázornění proudu zátěže i_2 při sepnutém tranzistoru M_2 a komutačního proudu při jeho rozpojení v případě můstkového zapojení koncového stupně zesilovače třídy D.

L.2.5. Vznik rušení a jeho minimalizace a potlačení jeho vlivu

Vzhledem ke spínacímu režimu, produkuje zesilovač vf rušení. Vzniká zejména ve výkonové části proudovými špičkami při rychlé změně napětí na kapacitách, ochranných diodách – tzv. recovery time (při přepólování po ukončení dead-time), v napájecích i dalších vodičích. Jejich vliv lze minimalizovat krátkými cestami s minimálními plochami smyček na DPS. Nelinearity obvodu generují rušení z vf do nf (princip AM demodulace). Vliv rušení lze minimalizovat i filtrací:



C_1 tvoří LP filtr na vstupu a
C_2 ve ZV cestě zesilovače,
C_d redukuje diferenční složku rušení,
oddělení signálové a výkonové (napájecí) „země“, prostorové oddělení spojů i obvodových prvků na DPS (minimalizace kapacitních vazeb).

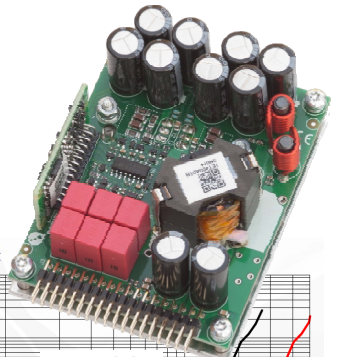
Obrázek L.28: Ilustrace zdrojů rušení a minimalizace jejich vniku v zesilovači třídy D.

Více viz např. Class D Audio Amplifier Design: http://www.irf.com, Lukáš Buryánec: Bakalářská práce ČVUT FEL, https://www.analog.com a další. Porovnání vlastností pracovních tříd B a D viz sekci 16.17.7.

Příklad sériově vyráběných D-zesilovačů: 1ET400A, klíčové vlastnosti

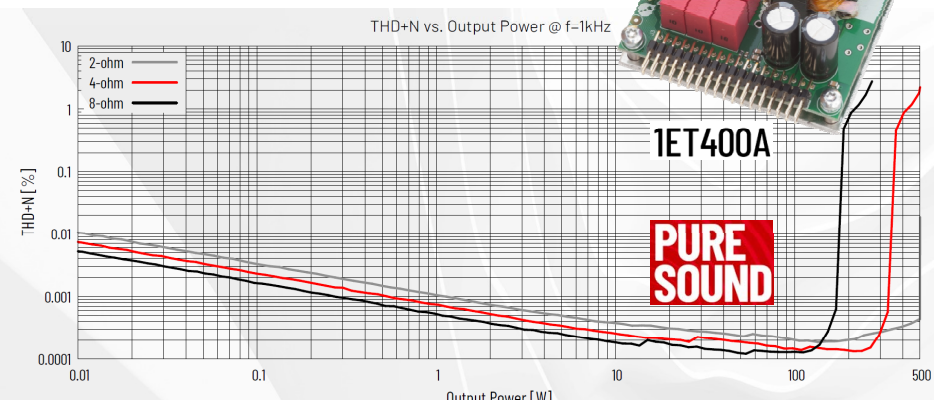
Výstupní výkon	$425\,\mathrm{W}$ @ $1\,\%$ THD, $4\,\Omega$	Dynamický rozsah	$131\,\mathrm{dB}$
Napájecí napětí	$\pm 25\,\mathrm{V}$ až $\pm 65\,\mathrm{V}$	Výstupní šum	$11{,}5\,\mu\mathrm{V}$
Výstupní proud	$25\,\mathrm{A}$	Výstupní odpor	$< 65\,\mu\Omega$ @ $1\,\mathrm{kHz}$
THD+N	$< 0{,}00017\,\%$ @ $100\,\mathrm{W}$	Účinnost	$> 94\,\%$

Více viz https://purifi-audio.com



JBL A6000gti výkonný automobilový zesilovač až $6\,\mathrm{kW}$ @ $0{,}1\,\%$ THD, $4\,\Omega$ při $U_N = 12\,\mathrm{V}$.
Více viz zde a video.





L.3. Měření na výkonovém zesilovači třídy D

Přípravek je založen na integrovaném obvodu stereo zesilovače ve třídě D typového označení ADAU1592. Ten je doplněný o výstupní filtry, napájecí a logické obvody nezbytné pro jeho funkci. Přípravek obsahuje také LED diody k indikaci přetížení a vnitřního stavu IO. Schéma zapojení přípravku zesilovače je na obrázku L.31. Vyobrazení je uvedeno na titulní straně 116 dodatku.

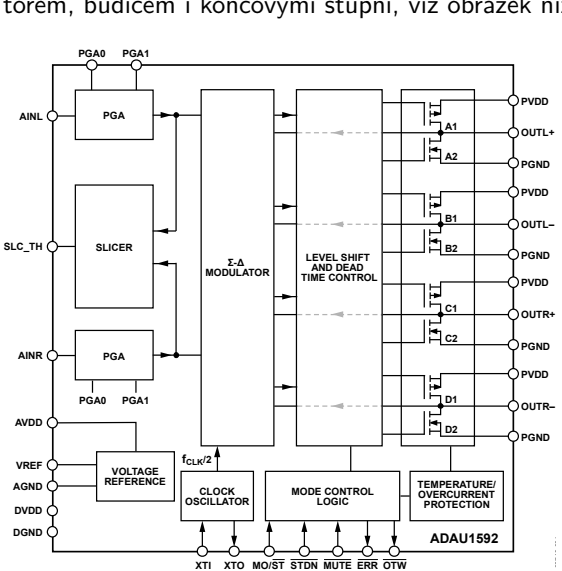
L.3.1. Cíle měření

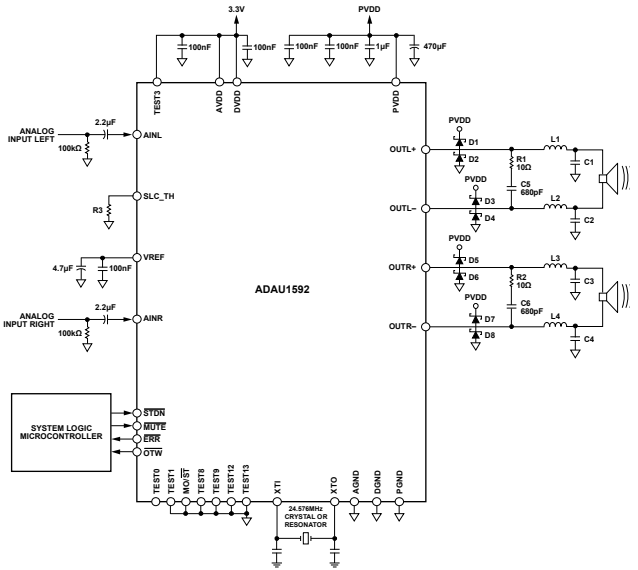
Cílem měření je seznámit se s vlastnostmi a parametry výkonového zesilovače, pracujícího ve třídě D. Hlavními úkoly laboratorního měření jsou:

1. měření kmitočtové charakteristiky,
2. měření účinnosti zesilovače v závislosti na velikosti vstupního signálů,
3. zjištění harmonického zkreslení pro různé úrovně buzení a pro vybrané kmitočty,
4. ověření změny střídy výstupních pulzů zesilovače při změnách stejnosměrného buzení a
5. měření rychlosti zesilovače.

Popis přípravku a postup měření je uveden v podrobném návodu na měření. Krátký komentář a k měření na laboratorním přípravku je v této videoukázce.

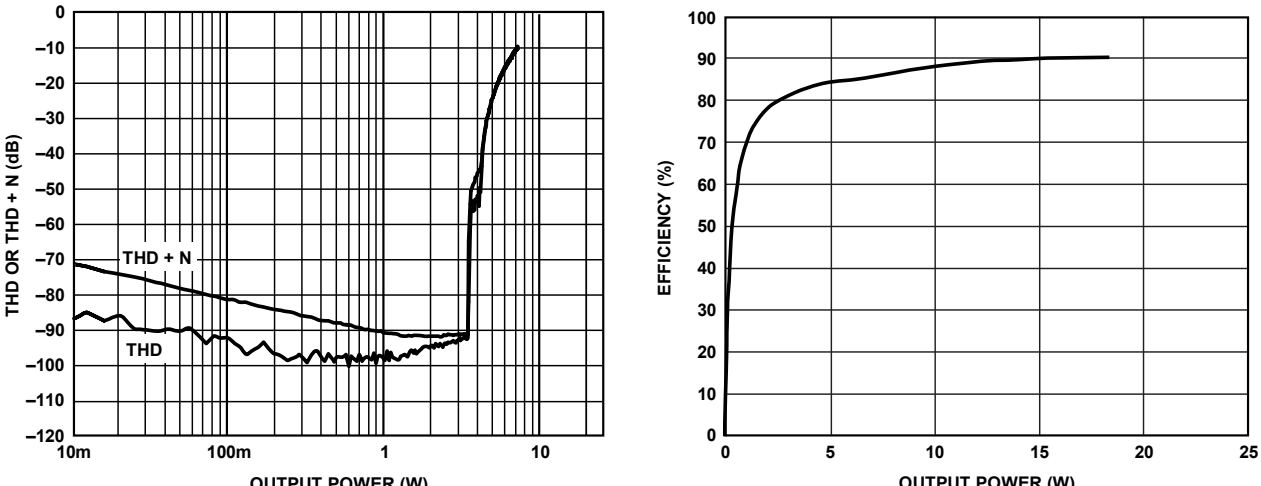
Přípravek je založen na obvodu ADAU1592 s integrovaným kompletním dvoukanálovým můstkem, Σ-Δ modulátorem, budičem i koncovými stupni, viz obrázek níže.





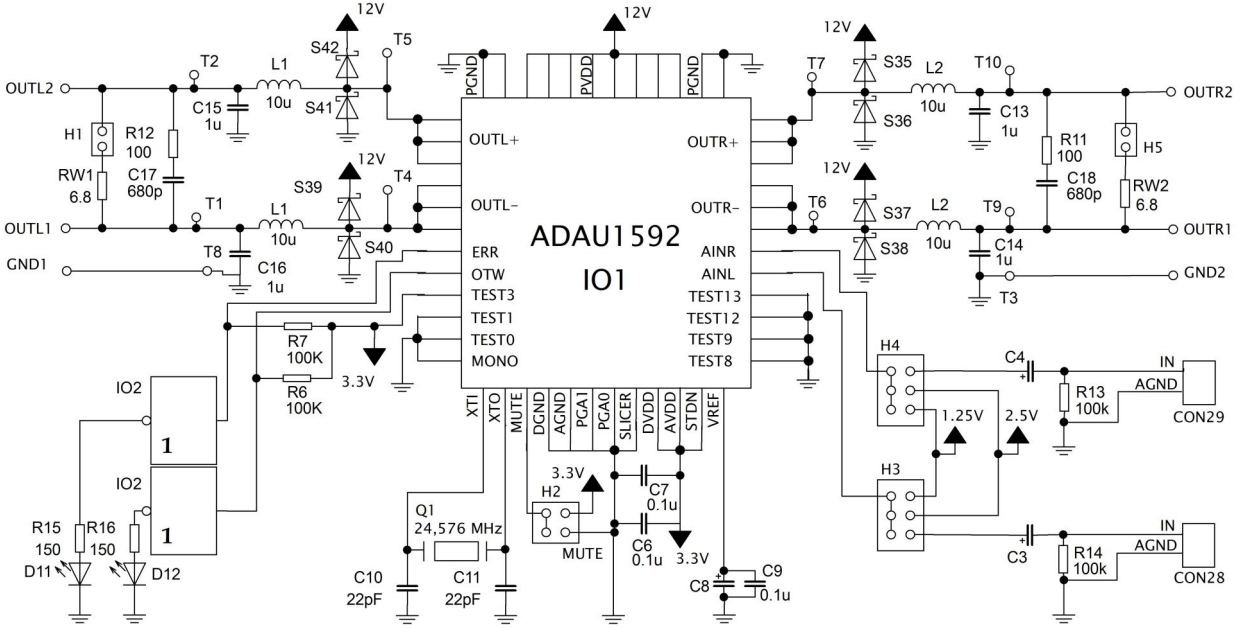
Obrázek L.29: Blokové schéma integrovaného zesilovače třídy D ADAU1592 a jeho typické zapojení.

Integrovaný zesilovač ADAU1592 vykazuje následující parametry: výstupní výkon $2 \times 10\,\mathrm{W}\,@\,12\,\mathrm{V}$, $4\,\Omega$, Napájecí napětí $\pm 7\,\mathrm{V}$ až $\pm 18\,\mathrm{V}$, THD+N $< 0{,}005\,\%$, SNR $> 98\,\mathrm{dB}$, PSRR $> 65\,\mathrm{dB}$, Účinnost $> 94\,\%$, $R_{DS} < 0.3\,\Omega$, více viz datasheet.



Obrázek L.30: Parametr THD, resp. THD+N a účinnosti v závislosti na výstupním výkonu obvodu ADAU1592.

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL



Obrázek L.31: Zapojení výkonového zesilovače bez napájecí části.

Dodatek M

Chlazení elektronických prvků

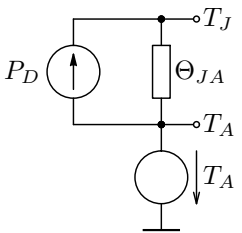
V této části je uveden stručný úvod do problematiky chlazení elektronických součástek a výpočtu potřebného chladiče pro odvod tepla.



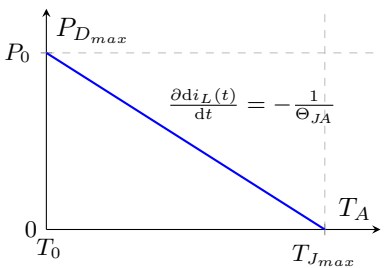
M.1. Teplotní poměry pro základní model čip-okolí

Výkonové ztráty na rezistorech nebo tranzistorech (viz např. energetická bilance koncového stupně třídy B 16.8) se mění v teplo, které je třeba odvést. Situaci lze modelovat analogií s elektrickým obvodem, viz obrázek M.1 (a). Jedná se o elementární model samotného čipu (součástky) chlazeného okolním vzduchem. Výkonová ztráta je modelována zdrojem proudu P_D, tepelný odpor (1/tepelná vodivost) elektrickým odporem Θ_{JA} a teplotu udává elektrické napětí T. Teplota čipu T_J je pak dána „Ohmovým zákonem“ při dané teplotě okolního vzduchu T_A:

$$T_J = P_D\Theta_{JA} + T_A \quad \Rightarrow \quad P_{D_{max}} = \frac{T_{J_{max}} - T_A}{\Theta_{JA}} \tag{M.1}$$



(a)



(b)

T_J	teplota přechodu (junction) [°C],
$T_{J_{max}}$	maximální teplota přechodu [°C],
T_A	teplota okolí (air) [°C],
T_0	pokojová teplota [°C],
$P_{D_{max}}$	maximální výkonová ztráta prvku [W],
P_0	$P_{D_{max}}(T_0)$, tj. pro $T_A = T_0$ [W],
Θ_{JA}	tepelný odpor čip-okolí [°C/W]

Obrázek M.1: Ekvivalentní elektrické schéma teplotních poměrů čip-okolí (a) a maximální možná výkonová ztráta na čipu v závislosti na teplotě okolí (b).

Příklad M.1 *Chlazení čipu bez pouzdra*

Zadání: Určete maximální ztrátový výkon čipu $P_{D_{max}}$ pro teplotu okolí $T_A = 50°\mathrm{C}$. Dále určete teplotu čipu T_J pro teplotu okolí $T_A = 25°\mathrm{C}$ a při ztrátovém výkonu na čipu $P_D = 1\,\mathrm{W}$ a teplotě okolí $T_A = T_0 = 25°\mathrm{C}$, pokud je specifikován maximální ztrátový výkon čipu $P_0 = 5\,\mathrm{W}$ pro maximální teplotu čipu $T_{J_{max}} = 150°\mathrm{C}$.

Řešení: Nejprve určíme tepelný odpor čip-okolí:

$$\Theta_{JA} = \frac{T_{J_{max}} - T_0}{P_0} = 25°\mathrm{C/W}$$

Na jeho základě můžeme určit maximální ztrátový výkon čipu $P_{D_{max}}$ pro teplotu okolí $T_A = 50°\mathrm{C}$:

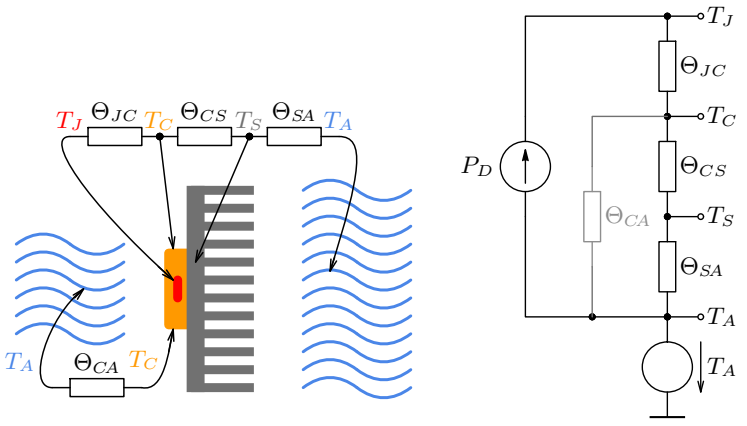
$$P_{D_{max}} = \frac{T_{J_{max}} - T_A}{\Theta_{JA}} = 2{,}2\,\mathrm{W}$$

a dále teplotu čipu T_J pro teplotu okolí $T_A = 25°\mathrm{C}$ při ztrátovém výkonu na čipu $P_D = 1\,\mathrm{W}$:

$$T_J = T_A + \Theta_{JA} P_D = 50°\mathrm{C}$$

M.2. Teplotní poměry pro případ čip-pouzdro-chladič-okolí

Ve skutečnosti je čip zapouzdřen a při větších ztrátových výkonech je pouzdro uzpůsobeno pro připevnění na chladič. Náhradní obvod pak vykazuje další odpory, jak je ukázáno na následujícím obrázku.



Při zanedbání vlivu Θ_{CA} pak pro teplotní poměry platí:

$$T_J - T_A = P_D(\Theta_{JC} + \Theta_{CS} + \Theta_{SA}), \tag{M.2}$$

přičemž význam značení je následující:

- T_J teplota přechodu (junction) [°C],
- T_C teplota pouzdra (case) [°C],
- T_S teplota chladiče (heat sink) [°C],
- T_A teplota okolí (air) [°C],
- P_D výkonová ztráta prvku [W],
- Θ_{JC} tepelný odpor čip-pouzdro [°C/W],
- Θ_{CS} tepelný odpor pouzdro-chladič,
- Θ_{CA} tepelný odpor pouzdro-okolí,
- Θ_{SA} tepelný odpor chladič-okolí.

Obrázek M.2: Ilustrativní schéma teplotních poměrů čip-pouzdro-chladič-okolí (a) a jeho ekvivalentní elektrické zapojení (b).

Příklad M.2 *Chlazení součástky s chladičem*

Zadání: Je specifikován maximální ztrátový výkon čipu $P_0 = 50\,\mathrm{W}$ při maximální teplotě čipu $T_{J_{max}} = 150°\mathrm{C}$ a teplotě pouzdra $T_{C0} = 25°\mathrm{C}$. Určete maximální ztrátový výkon čipu $P_{D_{max}}$, pokud bude na pouzdro umístěno na chladiči s tepelným odporem $\Theta_{SA} = 2°\mathrm{C/W}$ a při $\Theta_{CS} = 0{,}5°\mathrm{C/W}$ při teplotě okolí $T_{A1} = 70°\mathrm{C}$ (pasivní chlazení) a $T_{A2} = 30°\mathrm{C}$ (aktivní chlazení).

Řešení: Nejprve určíme tepelný odpor čip-pouzdro:

$$\Theta_{JC} = \frac{T_{J_{max}} - T_{C0}}{P_0} = 2{,}5°\mathrm{C/W}$$

Následně lze určit maximální ztrátový výkon čipu $P_{D_{max}}$ pro teplotu okolí $T_{A1} = 70°\mathrm{C}$ a $T_{A2} = 30°\mathrm{C}$:

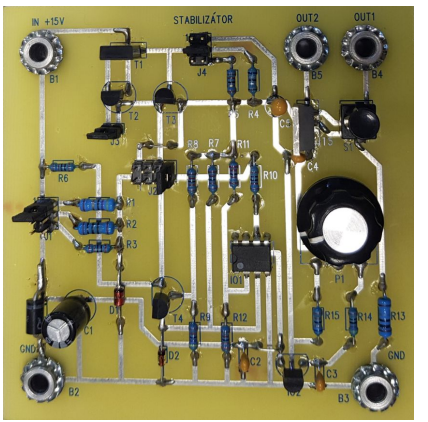
$$P_{D_{max1}} = \frac{T_{J_{max}} - T_{A1}}{\Theta_{JC} + \Theta_{CS} + \Theta_{SA}} = 16\,\mathrm{W}, \qquad P_{D_{max2}} = \frac{T_{J_{max}} - T_{A2}}{\Theta_{JC} + \Theta_{CS} + \Theta_{SA}} = 24\,\mathrm{W}.$$

Tepelný odpor Θ_{SA} je dán konstrukcí a velikostí chladiče (někdy se udává jeho měrná vodivost vztažená na jednotku plochy). U komerčně vyráběných chladičů udává tepelný odpor výrobce. Lze ho snížit aktivním zvýšením proudění (ventilátorem). Zvýší se tak vedení tepla prouděním (konvekcí). Vedení tepla sáláním většinou zanedbáváme (zejména pro neupravený lesklý povrch hliníkového chladiče, kdy je koeficient sálavosti $c < 0{,}1$). Tepelný odpor lze zjistit jednoduše měřením, jak je patrné z příkladů. Viz také tento odkaz a další zdroje.

Dodatek N

Měření parametrů nespínaných stabilizátů

V této části je uveden komentář k měření parametrů spojitě pracujících stabilizátorů. Postup měření a měřicí metody jsou uvedeny v podrobném návodu na měření zde.



N.1. Cíle měření

Cílem měření je seznámit se se základními statickými vlastnostmi lineárních stabilizátorů a jejich měřením. Hlavními úkoly laboratorního měření jsou zejména:

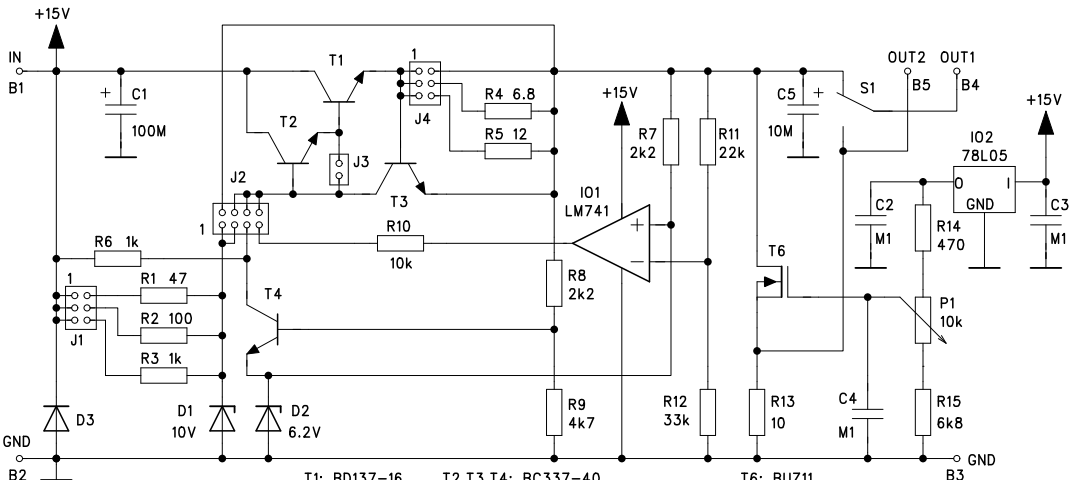
1. měření parametrů stabilizace:
   - měření převodní charakteristiky a z něho
   - určení činitele stabilizace $S = \frac{\Delta U_i}{\Delta U_o}$,
2. měření výstupních charakteristik:
   - měření zatěžovací charakteristiky,
   - určení výstupního odporu R_{ou} v napěťovém režimu a
   - R_{oi} v proudovém režimu.

Je možné měřit vlastnosti následujících typů stabilizátorů, které jsou na přípravku realizovány:

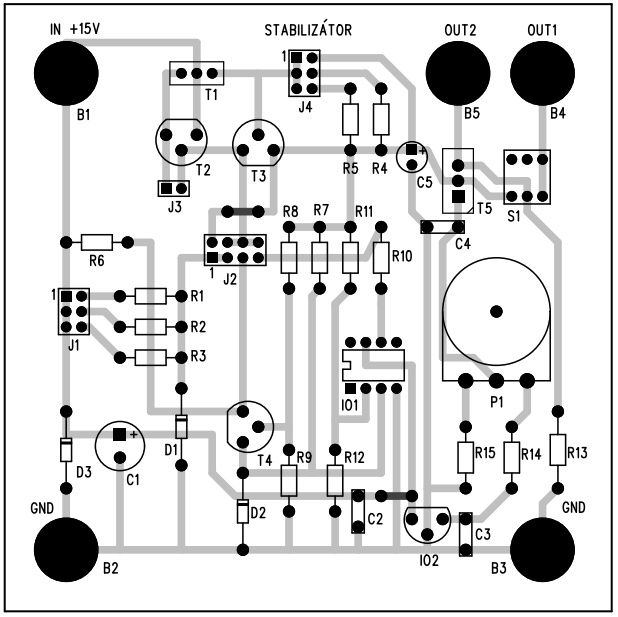
1. základní stabilizátor se Zenerovou diodou (obrázek 19.12),
2. stabilizátor se Zenerovou diodou a proudovým zesilovačem i proudovým omezením (obrázek 19.12),
3. zpětnovazební stabilizátor s tranzistory a
4. s operačním zesilovačem (obrázek19.15).

N.1.1. Popis přípravku

Schéma zapojení je na následujícím obrázku, kde se jednotlivé stabilizátory volí Přepínačem J2. Přípravek obsahuje i zátěž (T6) regulovatelnou pomocí P1. Kompletní popis přípravku a postupu měření je uveden v podrobném návodu.



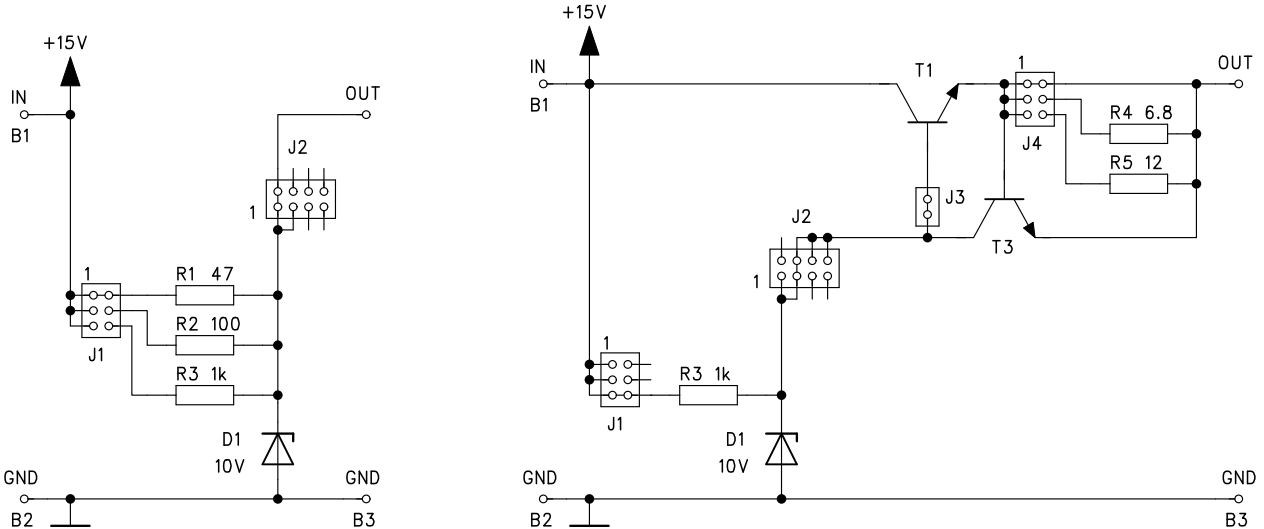
Obrázek N.1: Celkové zapojení přípravku spojitě pracujících stabilizátorů



Obrázek N.2: Celkový pohled na plošný spoj a rozložení součástek přípravku.

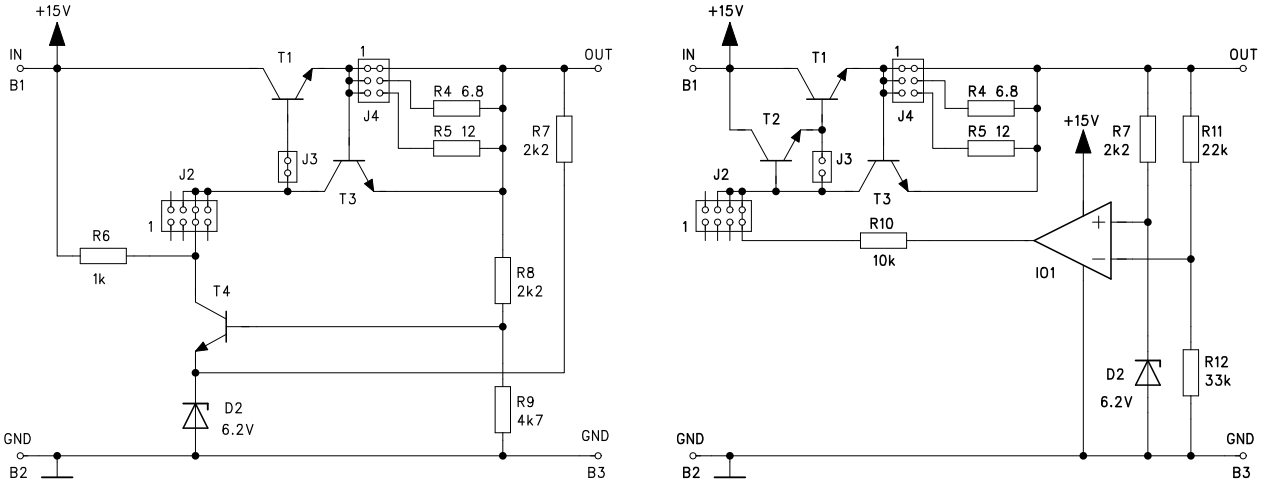
© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

Konfigurace přípravku pro měření



Obrázek N.3: Konfigurace přípravku pro měření stabilizátoru se Zenerovou diodou – základní a rozšířené zapojení.

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

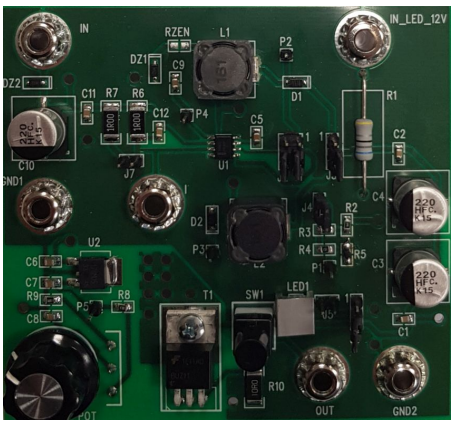


Obrázek N.4: Konfigurace přípravku pro měření zpětnovazebních stabilizátorů – zapojení s tranzistorovým a operačním zesilovačem.

Více viz návod na měření a komentář.

Dodatek O
Měření parametrů spínaných DC-DC měničů

V této části je uveden komentář k měření parametrů spínaných měničů. Postup měření a měřicí metody jsou uvedeny v podrobném návodu na měření zde.



O.1. Cíle měření

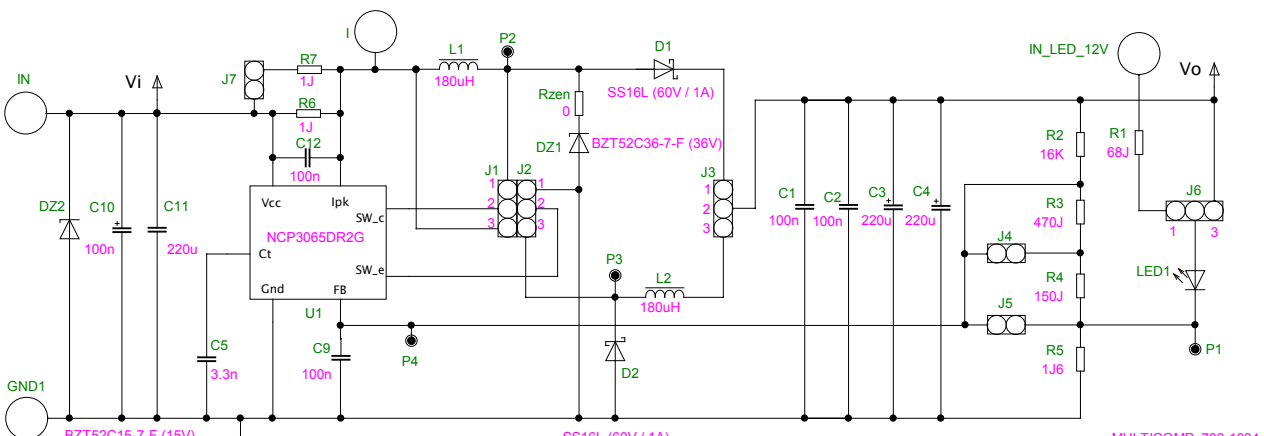
Cílem měření je seznámit se se základními principy činnosti a vlastnostmi spínaných měničů. Hlavními úkoly laboratorního měření jsou zejména:

1. měření parametrů stabilizace:
   - měření převodní charakteristiky,
   - určení činitele stabilizace $S = \frac{\Delta U_i}{\Delta U_o}$ a ,
   - činitele zvlnění výstupního napětí $\varphi = \frac{\Delta U_o}{U_o} \cdot 100\,[\%]$.
2. měření výstupních charakteristik:
   - měření zatěžovací charakteristiky,
   - určení výstupního odporu R_{out_u} v napěťovém režimu a
   - stanovení účinnosti zdroje $\eta = \frac{\Delta P_o}{P_1} \cdot 100\,[\%]$.

Měření se provádí na konfiguraci zvyšujícího a snižujícího měniče (všechny úkoly) a dále pro konfiguraci proudového spínaného zdroje LED, u kterého se porovnává účinnost při buzení LED spínaným měničem a lineárním (sériovým rezistorem).

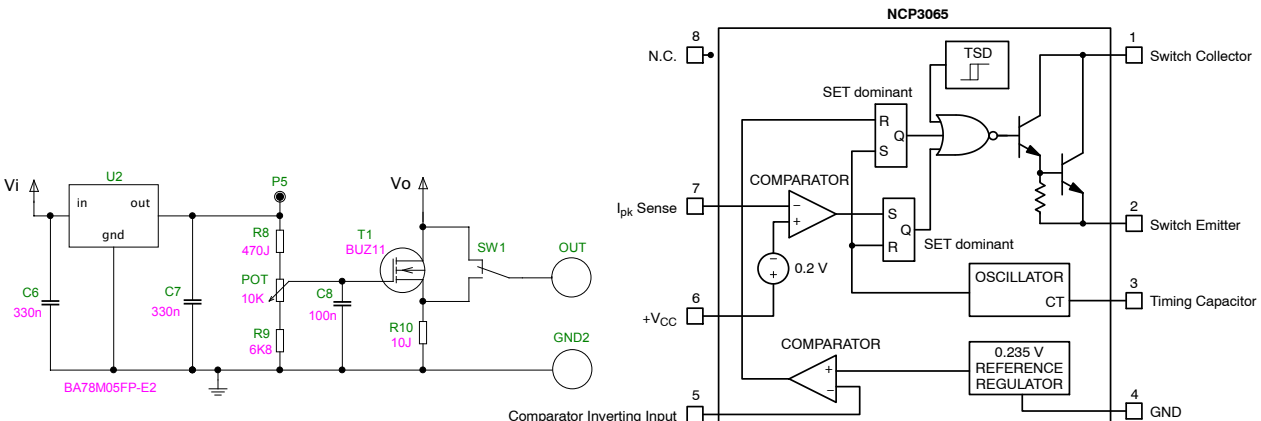
O.1.1. Popis přípravku

Schéma zapojení vlastního měniče je na následujícím obrázku, kde se jednotlivé stabilizátory volí přepínači J1-J6. Přípravek obsahuje i zátěž (T1) regulovatelnou pomocí potenciometru POT. Schéma zapojení zátěže je uvedeno na obrázku O.2 (a).



Obrázek O.1: Celkové schéma zapojení DC-DC měniče přípravku

Základem přípravku je obvod NCP3065 pro spínané proudové zdroje LED, jehož blokové schéma je uvedeno na obrázku O.2 (b). Ten umožňuje na přípravku realizovat jak zvyšující, tak snižující měnič, tak i zdroj konstantního proudu. Kompletní popis přípravku a postupu měření je uveden v podrobném návodu.

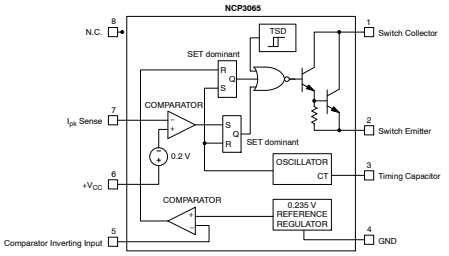


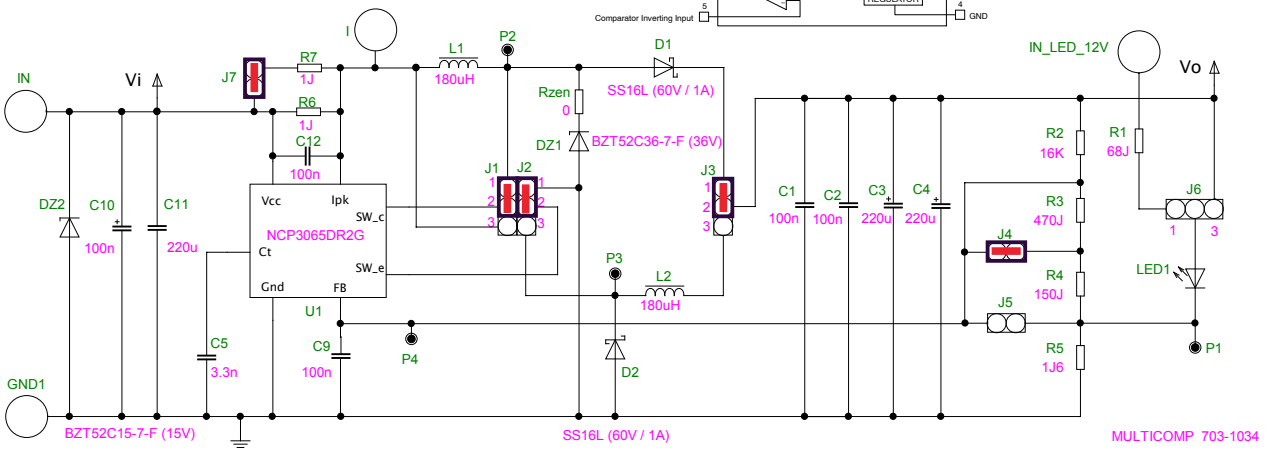
(a) (b)

Obrázek O.2: Zapojení regulovatelné zátěže DC-DC měniče přípravku (a) a blokové schéma řídícího obvodu (b).

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

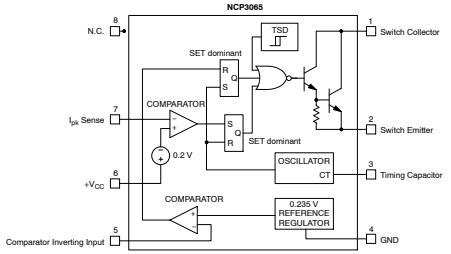
Konfigurace přípravku – zvyšující měnič (Boost)

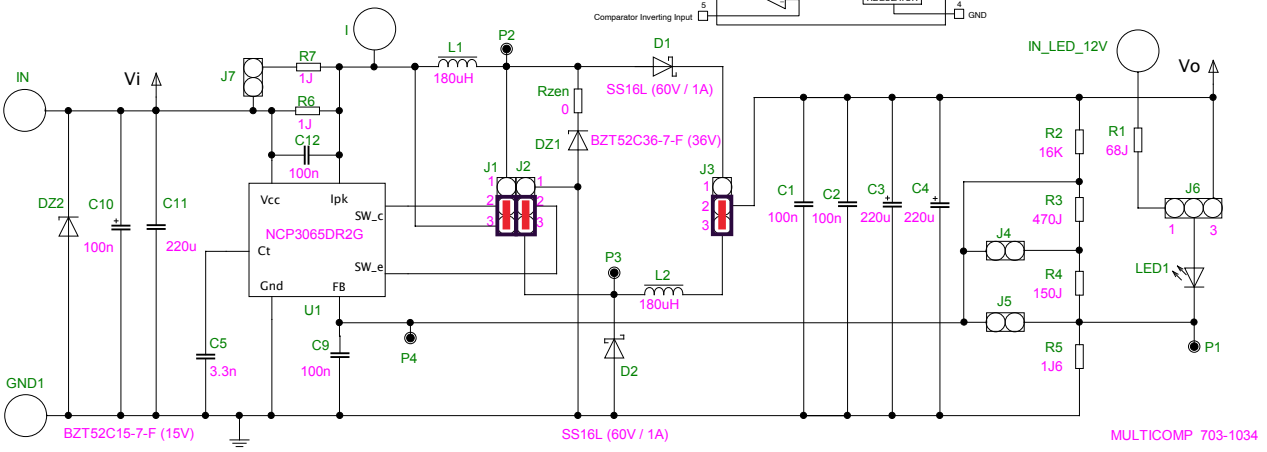




© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

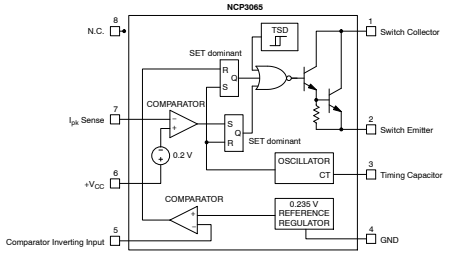
Konfigurace přípravku – snižující měnič (Buck)

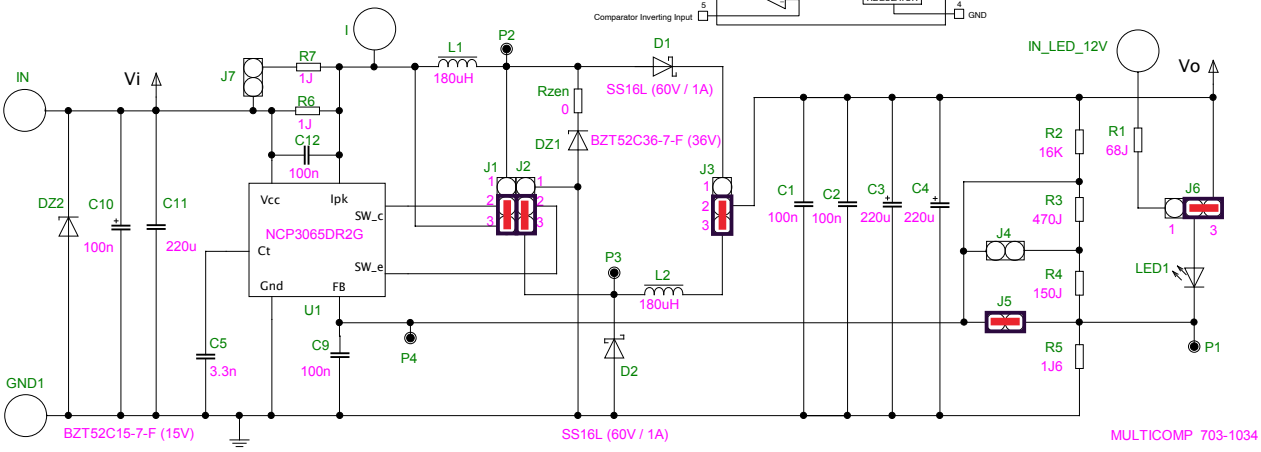




© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

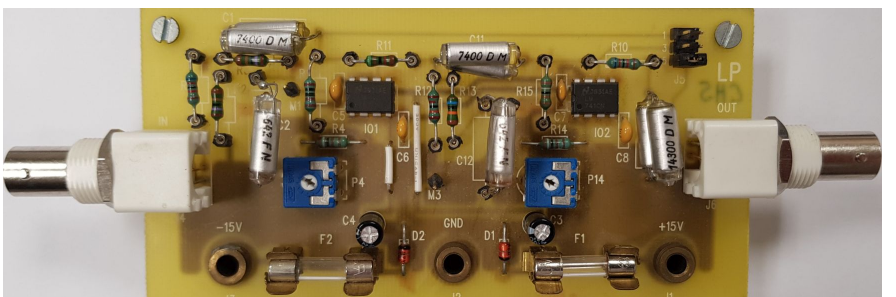
Konfigurace přípravku – proudový zdroj



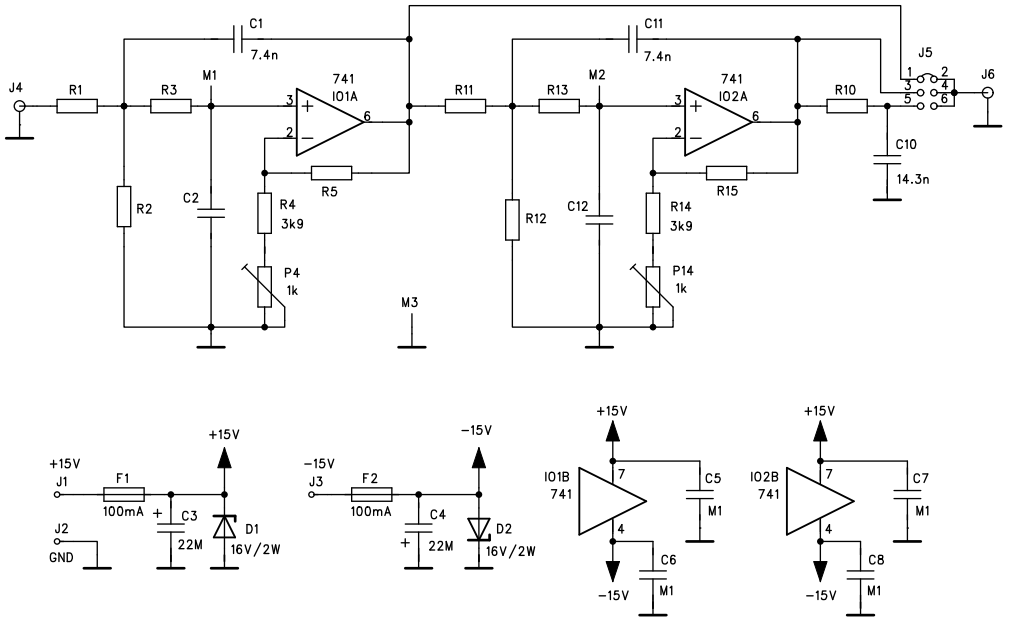


Dodatek P
Měření ARC filtrů typu dolní propust

V této části jsou uvedeny základní informace k měření na laboratorním přípravku analogové dolní propusti s operačním i zesilovači. Podrobný návod na měření zde. Přípravek umožňuje realizovat filtr dolní propusti až do pátého řádu, přičemž jednotlivé rezistory i kapacitory lze měnit, viz celkové zapojení na obrázku P.1.

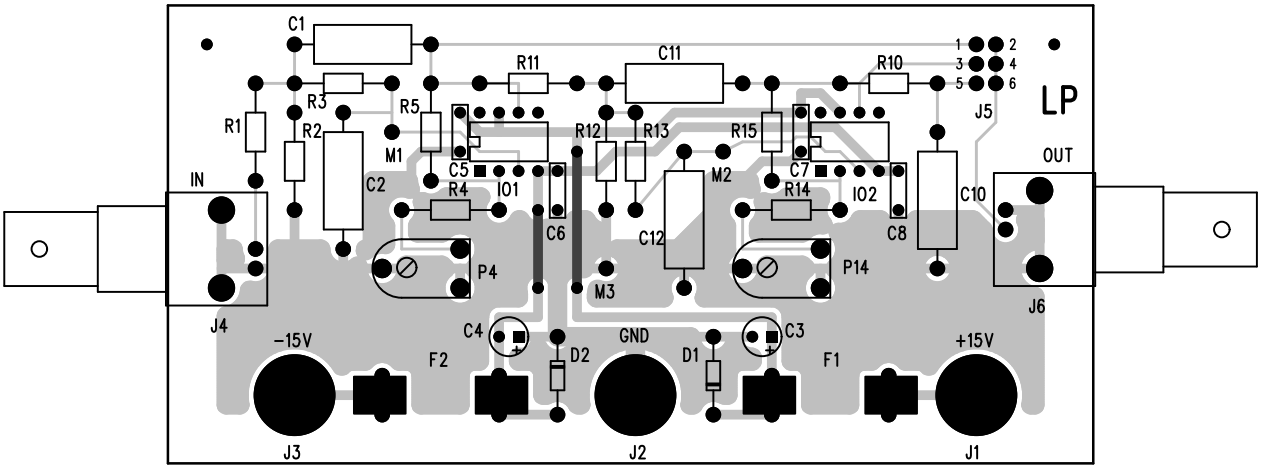


© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL



Obrázek P.1: Kompletní zapojení laboratorního přípravku dolní propusti.

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL



Obrázek P.2: Rozmístění součástek na laboratorním přípravku ARC filtru.

P.1. Cíle měření

Cílem měření je seznámit se s vlastnostmi základních aproximací amplitudových charakteristik kmitočtových filtrů, konkrétně Besselovy, Butterworthovy a Čebyševovy. Úkolem je změření a porovnání

- kmitočtových charakteristik a
- časových odezev pomocí přechodových charakteristik

pro jednotlivé filtry typu dolní propusti 3. i 5. řádu.

P.2. Postup měření

Podle návodu na měření:

1. zapojte přípravek (napájecí napětí, vstup a výstup),
2. ověřte jeho správnoou činnost: na výstupech OZ je pouze minimální stejnosměrná složka napětí odpovídající ofsetu, propouští harmonický signál do $f = f_p$ (výstup kontrolujte na osciloskopu) a utlumuje signál pro $f > f_p$,
3. podle pokynů cvičícího změřte kmitočtovou charakteristiku pro dané kmitočty a výsledky zapište do připravené tabulky. Jednotlivé tabuky se pak zpracují (vykreslí spolu s ideálními průběhy),
4. na osciloskopu zobrazte odezvu na jednotkový skok (periodický signál obdélníkového průběhu s kmitočtem $100\,\mathrm{Hz}$, případně $50\,\mathrm{Hz}$ a výsledky porovnejte s analýzou.

P.3. Návrh filtrů pro měření

Pro měření jsou připraveny filtry typu dolní propust 3. a 5. řádu s následujícími parametry: $f_p = 1\,\mathrm{kHz}$, $f_s = 1{,}8\,\mathrm{kHz}$, $a_p = 3\,\mathrm{dB}$. Minimální útlum v nepropustném pásmu a_s se liší podle použité aproximace a řádu filtru: a_{s3} pro 3. řád a_{s5} pro 5. řád. Výpočet aproximace (parametrů přenosových funkcí)

1. Filtr typu LP s Besselovou aproximací modulové charakteristiky: $a_{s3} \doteq 10\,\mathrm{dB}$, $a_{s5} \doteq 11\,\mathrm{dB}$,
2. Filtr typu LP s Butterworthovou aproximací modulové charakteristiky: $a_{s3} \doteq 15\,\mathrm{dB}$, $a_{s5} \doteq 26\,\mathrm{dB}$,
3. Filtr typu LP s Čebyševovou aproximací modulové charakteristiky: $a_{s3} \doteq 25\,\mathrm{dB}$, $a_{s5} \doteq 46\,\mathrm{dB}$.

parametr	typ aproximace filtru 3. řádu			typ aproximace filtru 5. řádu		
	Bessel	Butterworth	Čebyšev	Bessel	Butterworth	Čebyšev
$f_{01}\,[\mathrm{Hz}]$	1450	1000	916	1559	1000	614
$Q_1\,[-]$	0,69	1	3,07	0,56	0,62	2,14
$f_{02}\,[\mathrm{Hz}]$	1325	1000	299	1758	1000	967
$Q_2\,[-]$	–	–	–	0,92	1,62	8,82
$f_{03}\,[\mathrm{Hz}]$	–	–	–	1505	1000	178

Tabulka P.1: Parametry přenosových funkcí ARC filtrů pro měření.

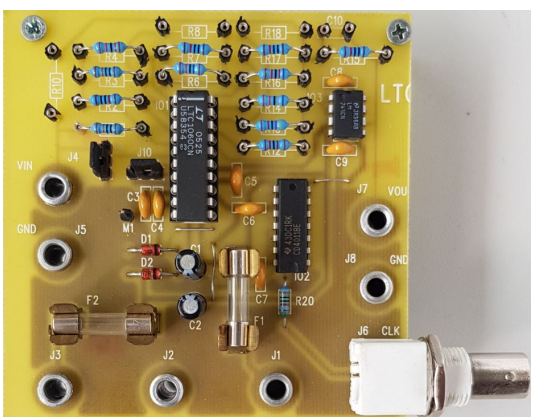
Dodatek Q

Měření filtru se spínanými kapacitory

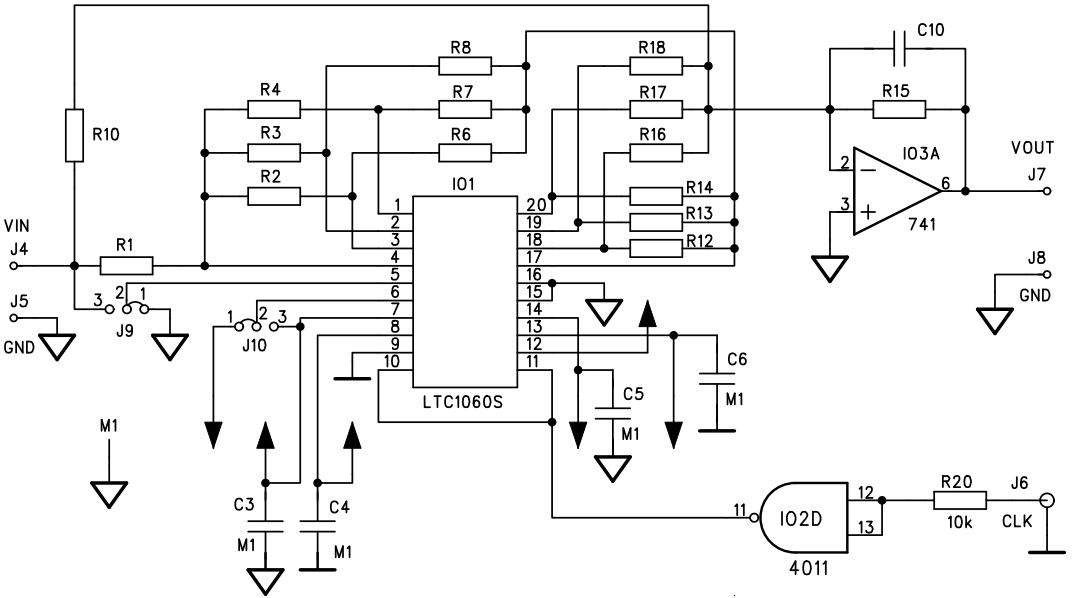
V této části jsou uvedeny základní informace k měření na laboratorním přípravku filtru se spínanými kapacitory založeném na IO LTC1060, viz datasheet.

Přípravek umožňuje realizovat libovolnou přenosovou funkci až 4. řádu, přičemž typ přenosové funkce (vnitřní zapojení sekce) lze volit zkratovacími spojkami a parametry přenosové funkce hodnotami výměnných odporů na přípravku. Na obrázku Q.1 je uvedeno zapojení přípravku, krátká ilustrace měření s komentářem je uvedena zde.

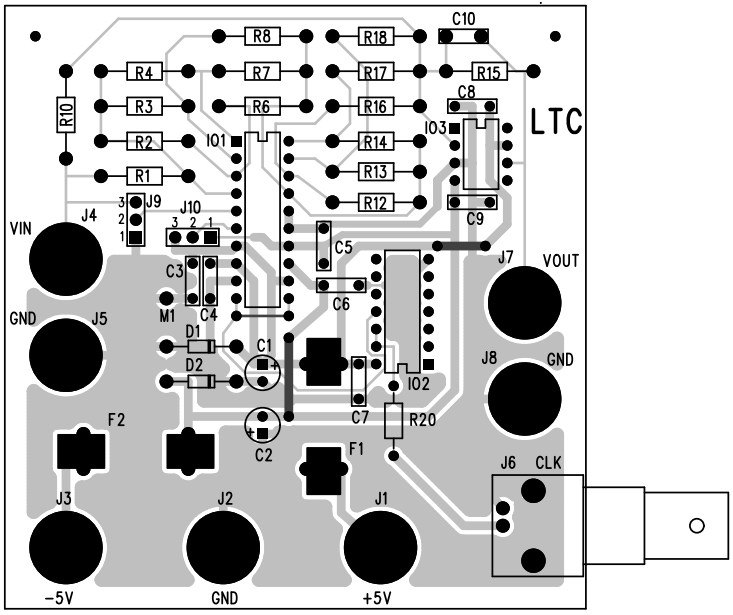
Podrobný návod na měření uvádí jak informace o laboratorním přípravku, tak o postupu měření i odkazy na návrhy sady filtrů pro měření.



© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL



Obrázek Q.1: Zapojení hlavní části laboratorního přípravku filtru se spínanými kapacitory.



Obrázek Q.2: Rozmístění součástek na laboratorním přípravku filtru se spínanými kapacitory.

Q.1. Cíle měření

Cílem měření je seznámit se se základními vlastnostmi filtrů se spínanými kapacitory. Návrh přenosové funkce filtru (parametrů ω_{0i}, Q_i, případně ω_{ni} a H_{0i} jednotlivých sekcí) je možné provést v návrhovém prostředí SYNTFIL. Vlastní zapojení a výpočet obvodových prvků pro obvod LTC 1060 provést s použitím návrhových vztahů uvedených v katalogovém listu obvodu[1], případně lze i k tomuto návrhu využít knihovnu Syntfil v programu Maple (nikoli už web aplikaci).

Q.2. Postup měření

1. Zapojte přípravek dle návodu na měření, přičemž napájecí napětí je $U_N = \pm 5\,\mathrm{V}$, amplitudu vstupního harmonického signálu volte $2\,\mathrm{V}$ a amplitudu obdélníkového hodinového signálu nastavte $5\,\mathrm{V}$ s DC posunem $2{,}5\,\mathrm{V}$, tj. log. $1 \equiv 5\,\mathrm{V}$ a log. $0 \equiv 0\,\mathrm{V}$.
2. Kmitočet vstupního signálu nastavte na f_0 filtru a kmitočet hodinového signálu na jeho odpovídající násobek dle návrhu (využijte dvou-výstupový generátor signálu) a osciloskopem zjistěte funkčnost přípravku na základě výstupního signálu (zkontrolujte jeho tvar při zapojeném i odpojeném C10).
3. Změřte celou modulovou a fázovou charakteristiku filtru a porovnejte ji s návrhem. Přelaďte filtr změnou kmitočtu hodinového signálu a měření opakujte. Demonstrujte vznik tzv. aliasingu pro $f > f_{\mathrm{CLK}}/2$.

[1] Při návrhu je třeba vhodně volit některé proměnné ($R \geq 10\,\mathrm{k\Omega}$).

Q.3. Parametry filtrů pro měření

Pro měření jsou připraveny následující návrhy filtrů:

1. Filtr 4. řádu typu pásmová propust s Čebyševovou, resp. Cauerovou aproximací modulové charakteristiky a následujícími parametry tolerančního schématu:
   (a) zvlnění modulu v propustném pásmu: $a_p = 2\,\mathrm{dB}$ (Čebyšev) a $a_p = 1\,\mathrm{dB}$ (Cauer),
   (b) minimální útlum v nepropustném pásmu: $a_s = 20\,\mathrm{dB}$,
   (c) kmitočet středu propustného pásma $f_0 = 1\,\mathrm{kHz}$,
   (d) šířka propustného pásma: $\Delta f_p = 500\,\mathrm{Hz}$ (Čebyšev) a $\Delta f_p = 600\,\mathrm{Hz}$ (Cauer),
   (e) rozdíl mezí nepropustného pásma $\Delta f_s = 1{,}5\,\mathrm{kHz}$ (Čebyšev) a $\Delta f_s = 1{,}5\,\mathrm{kHz}$ (Cauer) a
   (f) zesílení obou filtrů v propustném pásmu: $H_0 = 1$ pro
   (g) přepínací (hodinový) kmitočet $f_{\mathrm{CLK}} = 50\,\mathrm{kHz}$.
2. Filtr 4. řádu typu dolní propust s Cauerovou aproximací modulové charakteristiky a následujícími parametry tolerančního schématu: $a_p = 3\,\mathrm{dB}$, $a_s = 30\,\mathrm{dB}$, $f_p = 5\,\mathrm{kHz}$, $f_s = 6\,\mathrm{kHz}$ a $H_0 = 1$ pro $f_{\mathrm{CLK}} = 250\,\mathrm{kHz}$.
3. Filtr 4. řádu typu dolní propust s Besselovou aproximací modulové charakteristiky a následujícími parametry tolerančního schématu: $a_p = 3\,\mathrm{dB}$, $a_s = 20\,\mathrm{dB}$, $f_p = 5\,\mathrm{kHz}$, $f_s = 14\,\mathrm{kHz}$ a $H_0 = 1$ pro $f_{\mathrm{CLK}} = 250\,\mathrm{kHz}$.
4. Fázovací článek 2. řádu s následujícími parametry: $f_0 = 5\,\mathrm{kHz}$, $Q = 3{,}3$ a $H_0 = 1$ pro $f_{\mathrm{CLK}} = 250\,\mathrm{kHz}$.

Výsledky aproximační úlohy, tj. parametry přenosových funkcí udává následující tabulka (konstanta přenosu H_∞ se vztahuje k přenosové funkci (8.10) pro všechny typy přenosů, tj. pro LP i HP).

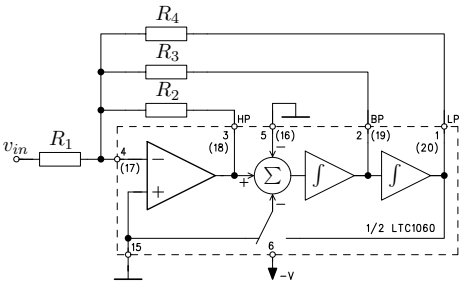
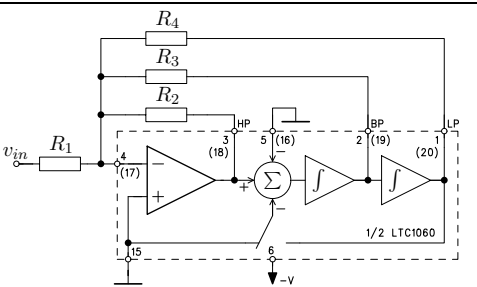
parametr	typ aproximace a filtru			
	Čebyšev BP	Cauer BP	Cauer LP	Bessel LP
$H_{\infty 1}\,[-]$	1	0,418	0,152	0,973
$\omega_{01}\,[\mathrm{rad/s}]$	5129	4739	30633	50450
$Q_1\,[-]$	5,079	3,365	9,883	0,806
$\omega_{n1}\,[\mathrm{rad/s}]$	–	2667	39394	–
$H_{\infty 2}\,[-]$	4,216	0,237	0,143	1,027
$\omega_{02}\,[\mathrm{rad/s}]$	7697	8330	17644	45001
$Q_2\,[-]$	5,079	3,365	1,191	0,522
$\omega_{n2}\,[\mathrm{rad/s}]$	–	14803	78379	–

Tabulka Q.1: Parametry přenosových funkcí SC filtrů pro měření.

Následující tabulky ilustrují zapojení obou sekcí SC filtru typu BP s Čebyševovou aproximací a typu LP s Cauerovou aproximací modulové charakteristiky. Tabulka byla vytvořena knihovnou SYNTFIL v programu Maple.

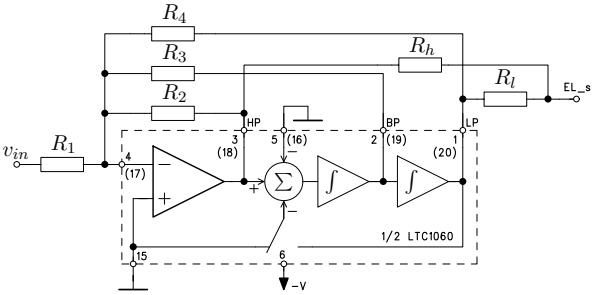
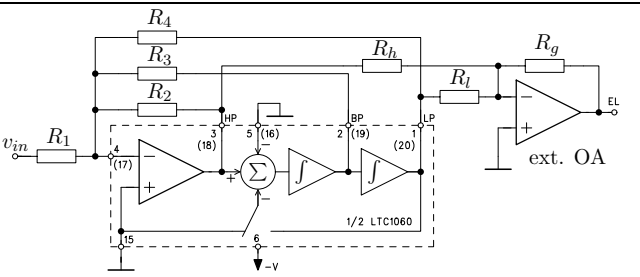
Návrhy všech uvedených filtrů lze najít v odkazech uvedených v návodu na měření.

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

N	circuit diagram	element values
1		$R_1 = 62.0\,\mathrm{k\Omega}$ $R_2 = 10.0\,\mathrm{k\Omega}$ $R_3 = 62.0\,\mathrm{k\Omega}$ $R_4 = 15.0\,\mathrm{k\Omega}$ $f_{clk} = 50.0\,\mathrm{kHz}$ ratio = 50 output: BP
2		$R_1 = 15.0\,\mathrm{k\Omega}$ $R_2 = 15.0\,\mathrm{k\Omega}$ $R_3 = 62.0\,\mathrm{k\Omega}$ $R_4 = 10.0\,\mathrm{k\Omega}$ $f_{clk} = 50.0\,\mathrm{kHz}$ ratio = 50 output: BP

Tabulka Q.2: Ukázka dokumentace výsledků návrhu filtru „Čebyšev BP“ knihovnou SYNTFIL.

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

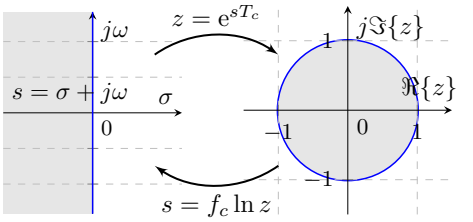
N	circuit diagram	element values
1		$R_1 = 100.0\,\mathrm{k\Omega}$ $R_2 = 10.0\,\mathrm{k\Omega}$ $R_3 = 100.0\,\mathrm{k\Omega}$ $R_4 = 11.0\,\mathrm{k\Omega}$ $R_l = 10.0\,\mathrm{k\Omega}$ $R_h = 16.0\,\mathrm{k\Omega}$ $f_{clk} = 250.0\,\mathrm{kHz}$ ratio = 50 output: EL_s
2		$R_1 = 0$ $R_2 = 22.0\,\mathrm{k\Omega}$ $R_3 = 47.0\,\mathrm{k\Omega}$ $R_4 = 68.0\,\mathrm{k\Omega}$ $R_l = 10.0\,\mathrm{k\Omega}$ $R_h = 62.0\,\mathrm{k\Omega}$ $R_g = 10.0\,\mathrm{k\Omega}$ $f_{clk} = 250.0\,\mathrm{kHz}$ ratio = 50 output: EL

Tabulka Q.3: Ukázka dokumentace výsledků návrhu filtru „Cauer LP“ knihovnou SYNTFIL.

Dodatek R

Syntéza periodicky spínaných filtrů na základě analogové přenosové funkce

Tento dodatek se zabývá vztahy mezi popisem analogových a digitálních systémů. Ukazuje různé způsoby aproximace mezi těmito popisy s cílem nalést takový transformační vztah, který by byl vhodný pro převod přenosových funkcí analogových systémů (filtrů) do přenosových funkcí digitálních systémů tak, aby byly realizovatelné a přitom jejich výsledné vlastnosti co nejvíce odpovídaly analogovému prototypu (původnímu analogovému systému).



popis analogových systémů

popis digitálních systémů

R.1. Transformace roviny $s \Leftrightarrow z$

Spojitě (ve spojitém čase) pracující lineární systémy lze popsat pomocí Laplaceových obrazů obvodových veličin, jak bylo ukázáno v kapitole 7. Podobně lze pro popis diskrétně pracujících systémů použít transformaci $\mathcal{Z}$.

Transformace je definována níže uvedeným vztahem a následující tabulka uvádí obrazy základních posloupností. Více uživatel najde v [15] a další citované literatuře.

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] z^{-n} \qquad \text{(R.1)}$$

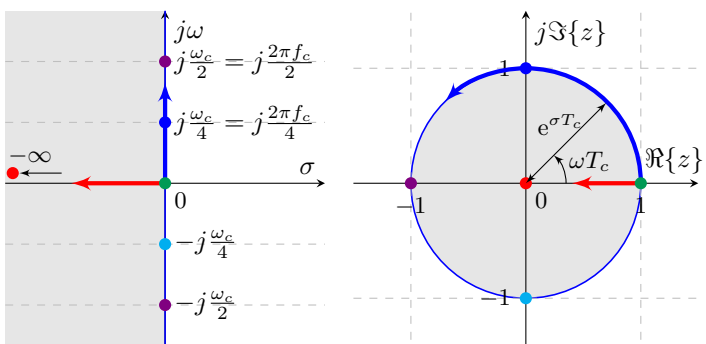
$f[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\}$	$F(z) = \mathcal{Z}\{f[n]\}$
$\delta[n]$	1
$\mathbf{1}[n]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$
a^n	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$
n	$\dfrac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$

Tabulka R.1: Obrazy základních posloupností.

Mezi analogovou a diskrétní oblastí platí vztah:

$$z = \mathrm{e}^{sT_c}\big|_{s=\sigma+j\omega} = \mathrm{e}^{\sigma T_c}\mathrm{e}^{j\omega T_c}, \quad s = \frac{1}{T_c}\ln z, \qquad \text{(R.2)}$$

kde $T_c = \frac{1}{f_c}$ je perioda vzorkovacího signálu.



Obrázek R.1: Grafické znázornění transformace $s \Leftrightarrow z$.

Pro realizaci spojitě pracujících systémů (např. filtrů) diskrétně pracujícím systémem je třeba transformovat přenosovou funkci $H(s)$ do diskrétní reprezentace $H(z)$. **Pro realizaci diskrétního systému je však třeba, aby přenosová funkce $H(z)$ byla ve tvaru racionálně lomené funkce proměnné z.** Z tohoto důvodu **nelze použít přesný transformační vztah (R.2) a je nutné použít různé způsoby transformace, resp. jeho aproximace**, které vedou na požadovaný tvar přenosové funkce $H(z)$. Použitelnost těchto aproximací je však podmíněna splněním následujících **podmínek**:

1. Imaginární osa roviny $s = j\omega$ se transformuje na jednotkovou kružnici roviny $z = \mathrm{e}^{j\omega} \Rightarrow$ jsou zachovány kmitočtové charakteristiky systému, které však mohou být zkreslené.
2. Levá polorovina roviny $\Re\{s\} < 0$ se transformuje dovnitř jednotkové kružnice $|z| < 1 \Rightarrow$ stabilní analogový systém vede na stabilní systém diskrétní.

Požadovaná přenosová funkce spojitého systému $H(s)$ je transformovaná do diskrétně pracujícího systému s přenosovou funkcí, kterou označme $H_D(z)$ a její kmitočtovou charakteristiku $H_D(j\omega_D) = H_D(z)|_{z=\mathrm{e}^{j\omega_D T_c}}$. Ta by měla co nejlépe aproximovat požadovanou charakteristiku spojitého systému $H(j\omega)$ v celém rozsahu kmitočtů $\omega \in \langle 0, \frac{\omega_c}{2})$, což nelze beze zbytku splnit. Jednak nebude použitá transformace přesná, a jednak **je charakteristika $H_D(j\omega_D)$ díky vztahu (R.2) vždy periodická**, viz také obrázek 8.4. Následuje stručný popis transformací a jejich vlastností, více viz např.[21].

$$\begin{array}{ccc} H(s) & \xrightarrow{s\to z} & H_D(z) \\ \downarrow s = j\omega & & \downarrow z = \mathrm{e}^{j\omega_D T_c} \\ H(j\omega) & \neq & H_D(j\omega_D) \end{array}$$

Obrázek R.2: Vztahy mezi kmitočtovými charakteristikami v analogové a diskrétní oblasti pro dále uvedené transformace.

R.1.1. Metoda impulzní invariance

Podstatou metody je transformace impulzní odezvy tak, aby platilo

$$h_D[n] = h(t)\big|_{t=nT_c} \tag{R.3}$$

kde $h_D[n]$ je impulzní odezva diskrétního systému a $h(t)$ je impulzní odezva analogového systému, která je dána přenosovou funkcí $H(s)$ s póly s_p.
Uvažujme základní tvar přenosové funkce, ze které lze po rozkladu na parciální zlomky vyjádřit impulzní odezvu:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{\prod_{k=1}^{N}(s-s_{p_k})}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{k=1}^{N}\frac{K_k}{s-s_{p_k}}\right\} = \sum_{k=1}^{N} K_k \mathrm{e}^{s_{p_k}t} \Rightarrow h_D[n] = \sum_{i=1}^{N} K_i \mathrm{e}^{s_{p_i}nT_c} \tag{R.4}$$

Aplikací $\mathcal{Z}$ transformace a součtu mocninné řady $\sum_{k=0}^{\infty} x^{-k} = \frac{1}{1-x^{-1}}$ dostaneme pro přenosovou funkci $H_D(z)$:

$$\boxed{H_D(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} h_D[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT_c) z^{-n} = \sum_{k=1}^{N}\left(K_k \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{s_{p_k}nT_c} z^{-n}\right) \boxed{= \sum_{k=1}^{N} \frac{K_k}{1-\mathrm{e}^{s_{p_k}T_c} z^{-1}}}. \tag{R.5}$$

Tato metoda vede na stejnou impulzní odezvu diskrétního systému jako vykazuje systém spojitý, přičemž je splněna podmínka ❷ ($|\mathrm{e}^{s_{p_i}T_c}| < 1 \,\forall\, \Re\{s_{p_i}\} < 0$). Kmitočtová charakteristika $H_D(j\omega_D)$ je zkreslená (zejména pro kmitočty blízké $f_c/2$), jak je patrné z příkladu R.1.

R.1.2. Transformace pólů a nul přenosové funkce (Matched-z transformation)

Transformace využívá přímou transformaci nul s_{n_i} a pólů s_{p_k} přenosové funkce $H(s)$ (viz vztah (8.1)) na póly a nuly funkce $H_D(z)$:

$$H(s) = H_C \frac{\prod_{i=1}^{M}(s - s_{n_i})}{\prod_{k=1}^{N}(s - s_{p_k})} \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_D(z) = H_Z \frac{\prod_{i=1}^{M}(1 - \mathrm{e}^{s_{n_i}T_c} z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1 - \mathrm{e}^{s_{p_k}T_c} z^{-1})}}, \tag{R.6}$$

kde H_C a H_Z jsou násobné konstanty, přičemž H_Z je třeba určit ze známé funkce $H(s)$ a relace $H(0) = H_Z(1)$.

Pro inverzní transformaci lze odvodit:

$$z = \mathrm{e}^{\sigma_D T_c}\mathrm{e}^{j\omega_D T_c} = r\mathrm{e}^{j\theta}, \quad \text{kde } r = \mathrm{e}^{\sigma_D T_c}, \quad \theta = \omega_D T_c \;\Rightarrow\; \sigma_D = f_c \ln r, \quad \omega_D = f_c \theta. \tag{R.7}$$

Pro parametry ω_0, Q pólů tzv. bikvadratické funkce pak dle (8.6) platí:

$$\omega_{0_D} = \frac{1}{T_c}\sqrt{\theta^2 + (\ln r)^2}, \qquad Q_D = -\frac{\sqrt{\theta^2 + (\ln r)^2}}{2 \ln r}. \tag{R.8}$$

Transformace splňuje podmínku ❶ i ❷. Vzhledem k přímému využití vztahu (R.2) se póly a nuly přenosu na kmitočtu $\omega_0 > \omega_c/2$ budou zrcadlit do pásma kmitočtů $< \omega_c/2$ (tzv. aliasing, viz obrázek 8.4), viz také příklad R.1.

R.1.3. Zpětná aproximace derivace (BD – Backward Euler approximation of derivates)

V tomto případě se využívá aproximace diskrétní (dopředné) derivace, na kterou je aplikována $\mathcal{Z}$ transformace:

$$\mathcal{Z}\left\{\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=nT_c}\right\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{y(nT_c)-y((n-1)T_c)}{T_c}\right\} = \frac{1-z^{-1}}{T_c}Y(z) \;\Rightarrow\; \boxed{s=\frac{1}{T_c}(1-z^{-1})=\frac{1}{T_c}\frac{z-1}{z}} \;\Rightarrow \quad \text{(R.9)}$$

a pro zpětnou transformaci pak platí:

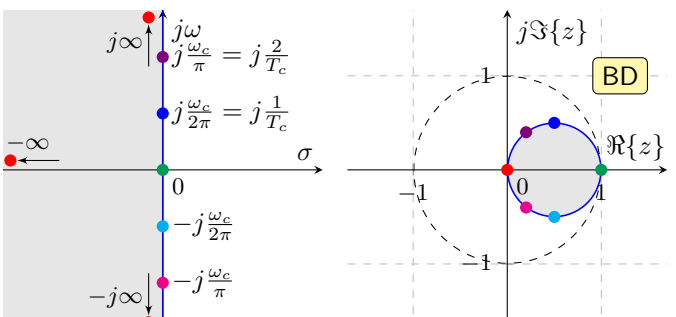
$$\Rightarrow \quad \boxed{z=\frac{1}{1-sT_c}}. \qquad \text{(R.10)}$$

Transformace splňuje podmínku ❷, viz její grafické vyjádření na obrázku R.3. Zkreslení reálné a imaginární osy získáme z (R.9) dosazením (R.2) a použitím (5.3) a pro zjednodušení pro $T_c = 1$:

$$s=\frac{1}{T_c}(1-z^{-1})\Big|_{T_c=1} = 1-\mathrm{e}^{-\sigma_D - j\omega_D} \Rightarrow$$

$$\sigma = \Re\{s\} = 1-\mathrm{e}^{-\sigma_D}\cos\omega_D, \qquad \text{(R.11)}$$

$$\omega = \Im\{s\} = \mathrm{e}^{-\sigma_D}\sin\omega_D = \sin\omega_D|_{\sigma_D=0}. \qquad \text{(R.12)}$$



Obrázek R.3: Grafické znázornění mapování roviny s do roviny z pomocí z BD transformace.

R.1.4. Dopředná aproximace derivace (FD – Forward Euler approximation of derivates)

Jako v předchozím případě se opět využívá aproximace diskrétní derivace (zde dopředné) s aplikací $\mathcal{Z}$ transformace:

$$\mathcal{Z}\left\{\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=nT_c}\right\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{y((n+1)T_c) - y(nT_c)}{T_c}\right\} = \frac{z-1}{T_c}Y(z) \;\Rightarrow\; \boxed{s = \frac{1}{T_c}(z-1) = \frac{1}{T_c}\frac{1-z^{-1}}{z^{-1}}} \;\Rightarrow \quad \text{(R.13)}$$

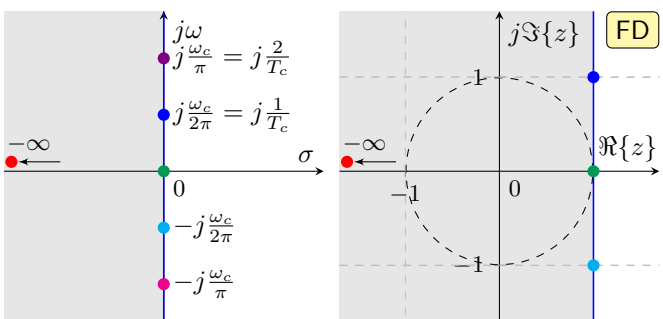
a pro zpětnou transformaci pak platí:

$$\Rightarrow \quad \boxed{z = 1 + sT_c}, \qquad \text{(R.14)}$$

Transformace nesplňuje ani jednu podmínku ze strany 182, viz její grafické vyjádření na obrázku R.3. Stabilní systém pracující ve spojitém čase může v tomto případě vést na nestabilní diskrétní systém. Zkreslení reálné a imaginární osy lze určit stejně jako v předchozím případě:

$$\sigma = \frac{1}{T_c}\left(\mathrm{e}^{\sigma_D T_c}\cos\omega_D T_c - 1\right), \qquad \text{(R.15)}$$

$$\omega = \frac{\mathrm{e}^{\sigma_D T_c}}{T_c}\sin\omega_D T_c = \sin\omega_D T_c|_{\sigma_D=0}. \qquad \text{(R.16)}$$



Obrázek R.4: Grafické znázornění mapování roviny s do roviny z pomocí z BD transformace.

R.1.5. Aproximace integrace (LDI – The lossless discrete integrator transformation)

V tomto případě se využívá aproximace integrace, přičemž se vychází z derivace v bodě $t = (n + 1/2)T_c$:

$$\int_{nT_c}^{(n+1)T_c} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = T_c \cdot \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=(n+1/2)T_c} = \frac{y((n+1)T_c) - y(nT_c)}{T_c} = \ldots \Rightarrow \boxed{s = \frac{1}{T_c}\left(z^{1/2} - z^{-1/2}\right)} \quad \text{(R.17)}$$

Grafické vyjádření transformace je uvedeno na obrázku R.5. Lze ukázat, že pokud bude splněno:

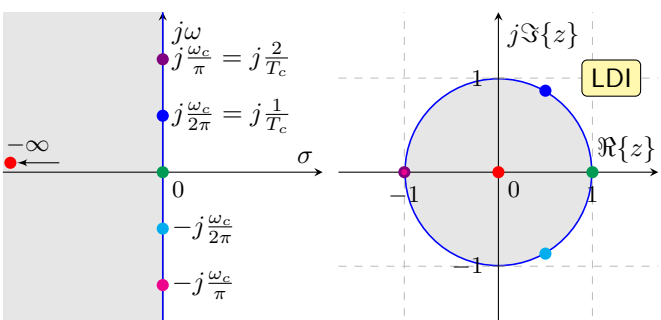
$$\boxed{-\pi f_c < \omega_D < \pi f_c}, \quad \text{(R.18)}$$

budou platit obě podmínky ze strany 182. Transformaci reálné a imaginární osy určíme dosazením relace $z = \mathrm{e}^{(\sigma_D + j\omega_D)T_c}$ do (R.17):

$$\sigma = \frac{2}{T_c}\sinh\frac{\sigma_D T_c}{2}\cos\frac{\omega_D T_c}{2}, \quad \text{(R.19)}$$

$$\omega = \frac{2}{T_c}\cosh\frac{\sigma_D T_c}{2}\sin\frac{\omega_D T_c}{2}, \quad \text{(R.20)}$$

$$\sigma = 0, \omega = \frac{2}{T_c}\sin\frac{\omega_D T_c}{2} \;\forall\; \sigma_D = 0. \quad \text{(R.21)}$$



Obrázek R.5: Grafické znázornění mapování roviny s do roviny z pomocí z LDI transformace.

R.1.6. Bilineární transformace (BL)

Bilineární transformace využívá aproximaci integrace diferenciální rovnice 1. řádu:

$$y(nT) = \int_{(n-1)T_c}^{nT_c} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + y((n-1)T_c) = \frac{T_c}{2}\left(\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=nT_c} + \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=(n-1)T_c}\right) + y((n-1)T_c) = \ \ldots \ \Rightarrow \quad \text{(R.22)}$$

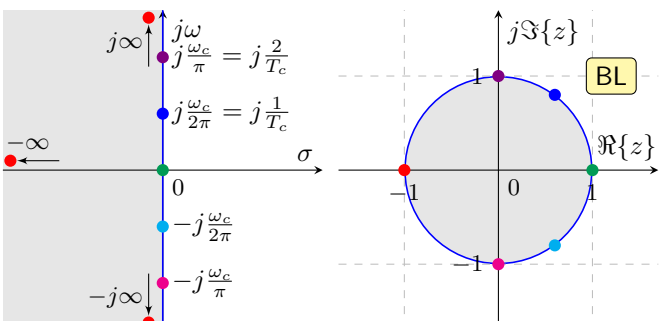
$$\Rightarrow \quad \boxed{s = \frac{2}{T_c}\frac{z-1}{z+1}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{z = \frac{2+sT_c}{2-sT_c}}, \quad \text{(R.23)}$$

viz grafické vyjádření na obrázku R.6. Transformace splňuje podmínku ❶ i ❷. Zkreslení reálné a imaginární osy určíme opět dosazením relace $z = \mathrm{e}^{(\sigma_D + j\omega_D)T_c}$ do (R.23):

$$\sigma = \frac{2}{T_c}\frac{\sinh \sigma_D T_c}{\cosh \sigma_D T_c \cos \omega_D T_c}, \quad \text{(R.24)}$$

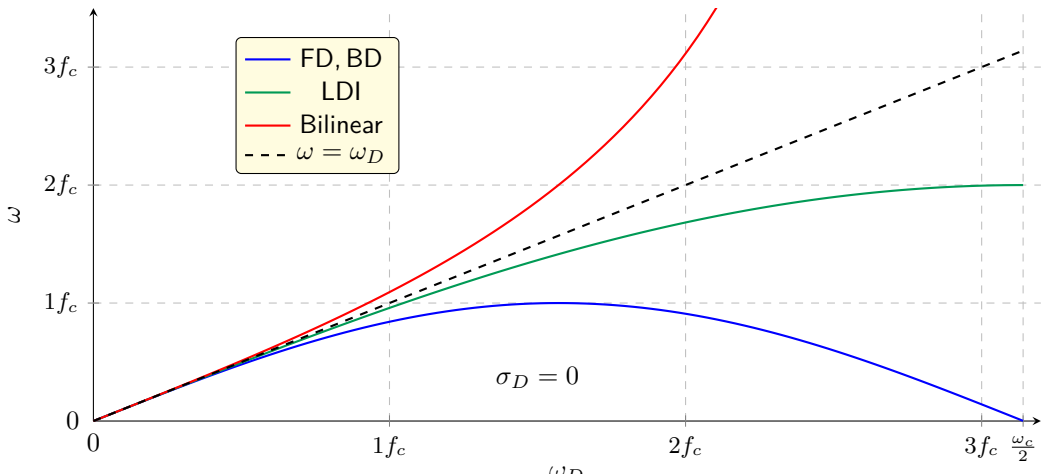
$$\omega = \frac{2}{T_c}\frac{\sin \omega_D T_c}{\cosh \sigma_D T_c \cos \omega_D T_c}, \quad \text{(R.25)}$$

$$\sigma = 0, \ \omega = \frac{2}{T_c}\tan\frac{\omega_D T_c}{2} \ \forall \ \sigma_D = 0. \quad \text{(R.26)}$$



Obrázek R.6: Grafické znázornění mapování roviny s do roviny z pomocí z BL transformace.

Transformace R.1.1 a R.1.2 se nazývají „exponenciální“, jelikož využívají přímo vztahu (R.2), zatímco transformace R.1.3 až R.1.6 jsou založené na algebraické aproximaci tohoto vztahu. Zkreslení kmitočtové osy těchto transformací je dáno vztahy (R.12) až (R.26), jejichž průběhy jsou uvedeny na obrázku R.7. Pro srovnání viz příklad R.1.



Obrázek R.7: Zkreslení imaginární osy pro transformace R.1.3 až R.1.6.

***Příklad R.1** Diskretizace analogové přenosové funkce*

Zadání: Proveďte transformaci přenosovou funkci $H(s)$ bikvadratické sekce (8.5) s komplexní nulou danou vztahem (R.27) na přenos $H(z)$ digitálního systému. Použijte všechny výše uvedené postupy a porovnejte výsledné kmitočtové charakteristiky. Tvar přenosové funkce $H(s)$ je normovaný pro $T_c = 1$, tj. vzorkovací kmitočet $\omega_c = 2\pi$.

$$H(s) = H_C \frac{s^2 + s\frac{\omega_n}{Q_n} + \omega_n^2}{s^2 + s\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}\Bigg|_{H_C = \frac{1}{16}, \omega_n = 2, Q_n = 10, \omega_0 = \frac{1}{2}, Q = 2} = \frac{1}{16}\frac{s^2 + s/5 + 4}{s^2 + s/4 + 1/4} \quad \text{(R.27)}$$

Řešení: Transformaci provedeme podle výše uvedených vztahů a pro výsledné přenosové funkce vykreslíme kmitočtové charakteristiky $H(j\omega_D) = H(z)|_{z=e^{j\omega_D}}$ spolu s požadovanou charakteristikou $H(j\omega)$. Nakonec porovnáme i impulzní charakteristiky případně i $h_D[n]|_{n=tT_c}$ s charakteristikou $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$.

Dále následují výpočty pro jednotlivé metody.

Metoda impulzní invariance

Přenosovou funkci $H(s)$ upravíme rozkladem na parciální zlomky (R.28) a následným použitím vztahu (R.5) dostaneme výslednou přenosovou funkci ve tvaru (R.29).

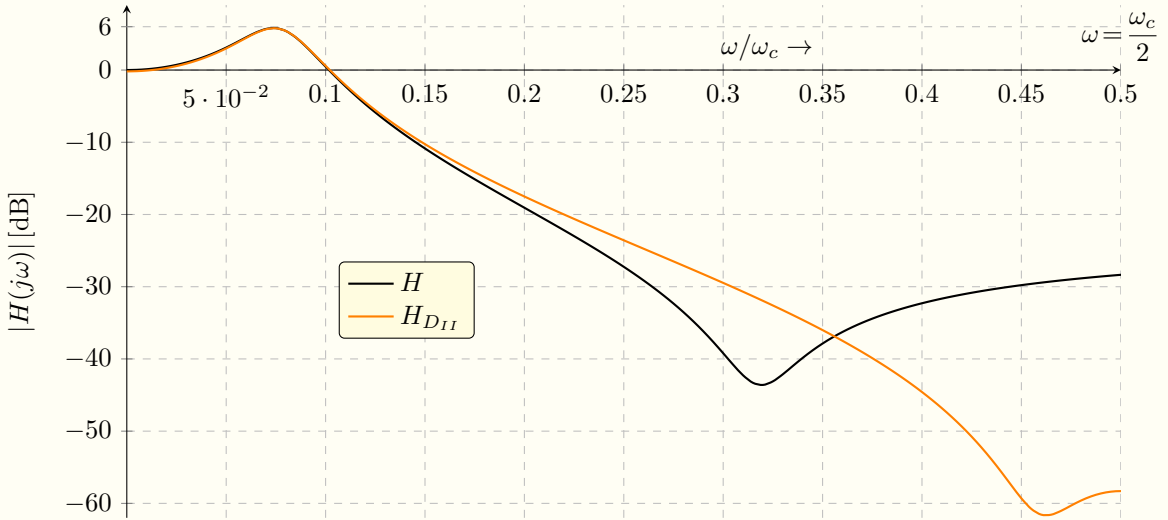
$$H(s) \doteq \frac{1}{16} + \frac{-0{,}001562 + 0{,}2425\,j}{s + 0{,}1250 + 0{,}4841\,j} + \frac{-0{,}001562 - 0{,}2425\,j}{s + 0{,}1250 - 0{,}4841\,j} \tag{R.28}$$

$$H_{D_{II}}(z) \doteq \frac{0{,}1040z + 0{,}04868 + 0{,}05938z^2}{0{,}7788 - 1{,}562z + z^2} \doteq$$

$$\doteq 0{,}05938\,\frac{(z + 0{,}8757 + 0{,}2302\,j)(z + 0{,}8757 - 0{,}2302\,j)}{(z - 0{,}7811 + 0{,}4107\,j)(z - 0{,}7811 - 0{,}4107\,j)} \tag{R.29}$$

Vzhledem k tomu, že velikost pólů $|z_p| \doteq 0.8825 < 1$, je diskrétní systém stabilní. Jeho kmitočtovou charakteristiku $H_D(j\omega_D)$ dostaneme $z = \mathrm{e}^{j\omega_D T_c}$, viz následující obrázek R.8.

Komentář: Z průběhu charakteristik je zřejmé, že transformace mění nejenom kmitočtové měřítko, ale deformuje i amplitudu. To nastává zejména pro kmitočty $\omega > \frac{\omega_c}{4}$. Navíc se měřítko expanduje (charakteristika $H_D(j\omega_D)$ se roztahuje-posouvá) pro $\omega_D \to \frac{\omega_c}{2}$. Z tohoto pohledu není tato metoda pro návrh filtrů příliš vhodná.



Obrázek R.8: Srovnání amplitudových charakteristik $|H(j\omega)|$ a $|H_D(j\omega_D)|$ pro metodu Impulzní invariance.

Transformace pólů a nul přenosové funkce (Matched-z transformation)

Vypočteme póly a nuly přenosové funkce $H(s)$, tj. upravíme rozkladem na kořenové činitele (R.30) a následným použitím vztahu (R.6) dostaneme výslednou přenosovou funkci ve tvaru (R.31).

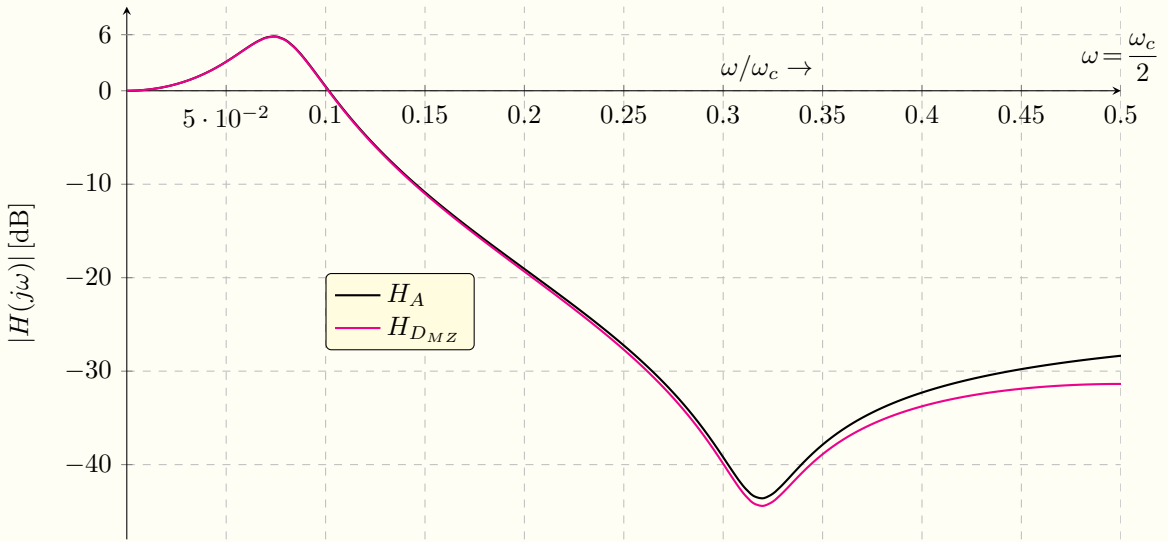
$$H(s) \doteq \frac{1}{16}\frac{(s+0{,}1+1{,}997\,j)(s+0{,}1-1{,}997\,j)}{(s+0{,}125+0{,}4841\,j)(s+0{,}125-0{,}4841\,j)} \tag{R.30}$$

$$H_{D_{MZ}}(z) \doteq 0{,}08437\frac{\big(1-(0{,}3745-0{,}8237\,j)z^{-1}\big)\big(1-(0{,}3745-0{,}8237\,j)z^{-1}\big)}{\big(1-(0.7811+0.4107\,j)z^{-1}\big)\big(1-(0.7811-0.4107\,j)z^{-1}\big)} \doteq$$

$$\doteq \frac{0{,}08437z^2+0{,}06319z+0{,}06907}{z^2-1{,}562z+0{,}7788} \tag{R.31}$$

I v tomto případě musí být velikost pólů $|z_p|<1$ – póly funkce $H_{D_{MZ}}(z)$ se musí rovnat pólům $H_{D_{II}}(z)$. Amplitudová charakteristika $|H_D(j\omega_D)|$ je na následujícím obrázku R.9.

Komentář: Z průběhu charakteristik je zřejmé, že transformace prakticky nemění kmitočtové měřítko a amplitudu deformuje zanedbatelně (znatelně pro $\omega_D \to \frac{\omega_c}{2}$).



Obrázek R.9: Srovnání amplitudových charakteristik $|H(j\omega)|$ a $|H_D(j\omega_D)|$ pro metodu Matched-z.

Zpětná aproximace derivace (BD)

Do přenosové funkce $H(s)$ dosadíme za proměnnou s výraz (R.9), čímž dostaneme přímo výslednou přenosovou funkci $H_D(z)$ ve tvaru (R.32).

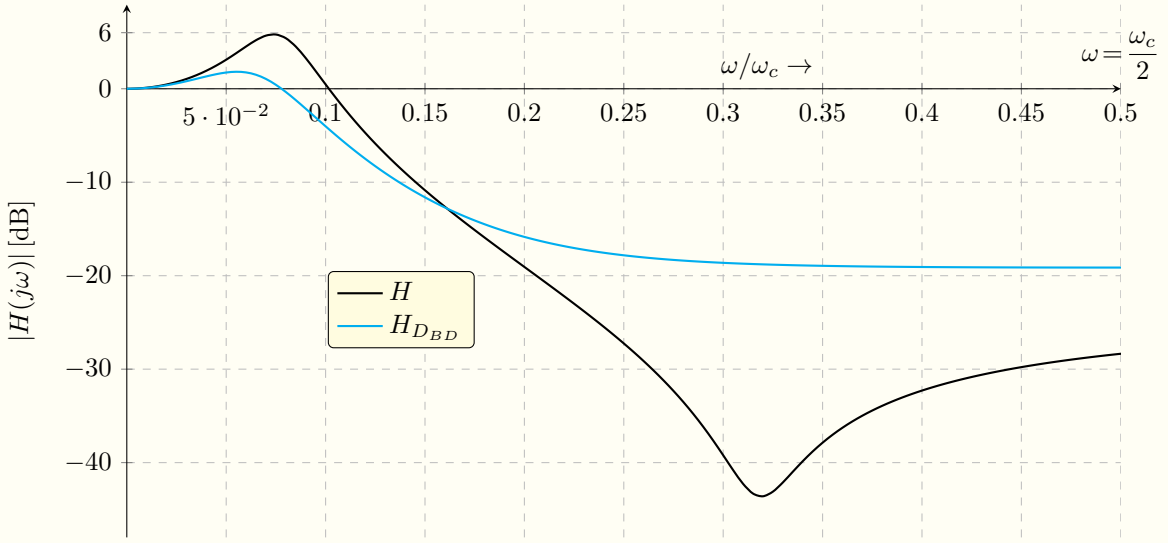
$$H_{D_{BD}}(z) = \frac{26\,z^2 - 11\,z + 5}{120\,z^2 - 180\,z + 80} \tag{R.32}$$

I pro tuto metodu musí vyjít velikost pólů $|z_p| < 1$, konkrétně:

$$z_p \doteq 0{,}2115 \pm 0{,}3840\,j \doteq 0{,}4385\,\mathrm{e}^{\pm j1{,}067}. \tag{R.33}$$

Amplitudová charakteristika $|H_D(j\omega_D)|$ je vykreslena na následujícím obrázku R.10.

Komentář: Z průběhu charakteristik je zřejmé, že transformace značně deformuje jak kmitočtové měřítko, tak i amplitudu, a to prakticky v celém rozsahu kmitočtů $\omega_D \in \langle 0,\, \frac{\omega_c}{2} \rangle$. Je to dáno relací (R.12), která je graficky znázorněna na obrázku R.7. Z ní vyplývá, že pro $\omega_D < \frac{3}{2} f_c$ kmitočtové měřítko je značně expandováno (roztaženo směrem k $\frac{\omega_c}{2}$) a pro $\omega_D > \frac{3}{2} f_c$ dochází při růstu ω_D dokonce ke zmenšování ω (kmitočtová osa se „vrací“ do počátku)! Proto na charakteristice chybí vliv nuly přenosu, jelikož $\omega_n = 2f_c$. Z těchto důvodů není tato metoda vhodná pro návrh filtrů, což platí zejména pro složitější přenosové funkce. Je použitelná pouze pro $\omega_D \ll \frac{\omega_c}{2}$.



Obrázek R.10: Srovnání amplitudových charakteristik $|H(j\omega)|$ a $|H_D(j\omega_D)|$ pro metodu BD.

Dopředná aproximace derivace (FD)

Dosazením výrazu (R.13) do přenosové funkce $H(s)$ za proměnnou s dostaneme přímo výslednou přenosovou funkci $H_D(z)$ ve tvaru (R.34).

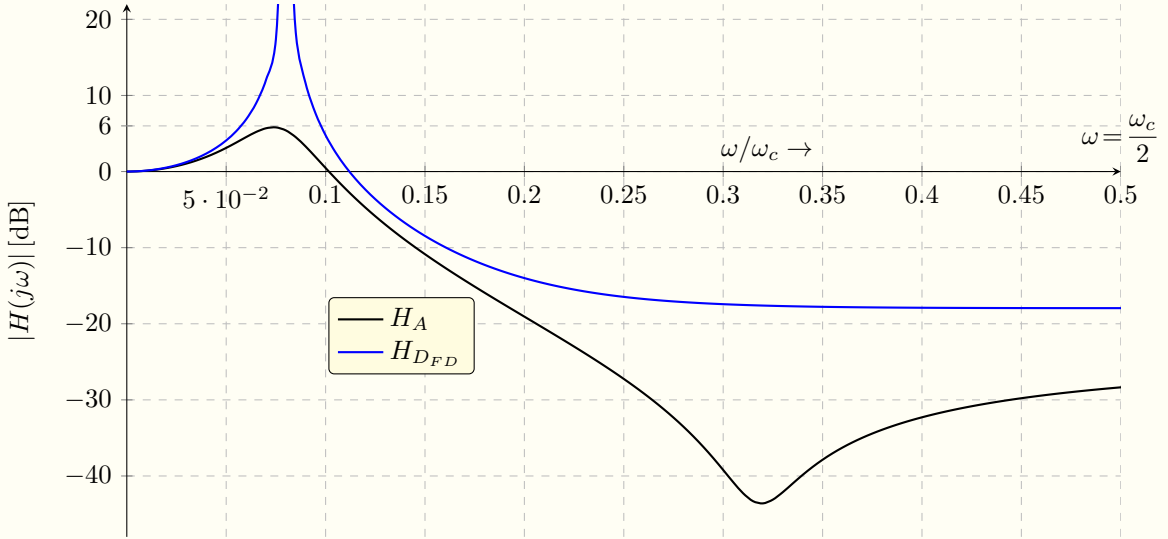
$$H_{D_{FD}}(z) = \frac{5\,z^2 - 9\,z + 24}{80\,z^2 - 140\,z + 80} \tag{R.34}$$

V tomto případě je nutné kontrolovat velikosti pólů získané funkce $H_{D_{FD}}(z)$:

$$z_p \doteq 0{,}95 \pm 1{,}997\,j \doteq 1\,\mathrm{e}^{\pm j0{,}5054}. \tag{R.35}$$

Je zřejmé, že obdržený diskrétně pracující systém je v tomto případě na mezi stability ($|z_p| = 1$)! Pro srovnání vykreslíme průběh $|H_D(j\omega_D)|$ (kmitočtová charakteristika v tomto případě neexistuje), který je na obrázku R.11. Viz také obrázek R.14.

Komentář: Z průběhu charakteristik je zřejmé, že transformace značně deformuje amplitudu v celém rozsahu kmitočtů $\omega_D \in \langle 0,\, \frac{\omega_c}{2} \rangle$. Kmitočtové měřítko je zkresleno stejně jako u metody BD, což je dáno relacemi (R.12), resp. (R.16), viz i obrázk R.7 a platí pro něj stejné závěry. Tato metoda se vzhledem k uvedeným skutečnostem pro návrh filtrů prakticky nepoužívá.



Obrázek R.11: Srovnání amplitudové charakteristiky $|H(j\omega)|$ a $|H_D(j\omega_D)|$ pro metodu FD.

Aproximace integrace (LDI)

Do přenosové funkce $H(s)$ dosadíme za proměnnou s výraz (R.17), čímž dostaneme výslednou přenosovou funkci $H_D(z)$ ve tvaru (R.36).

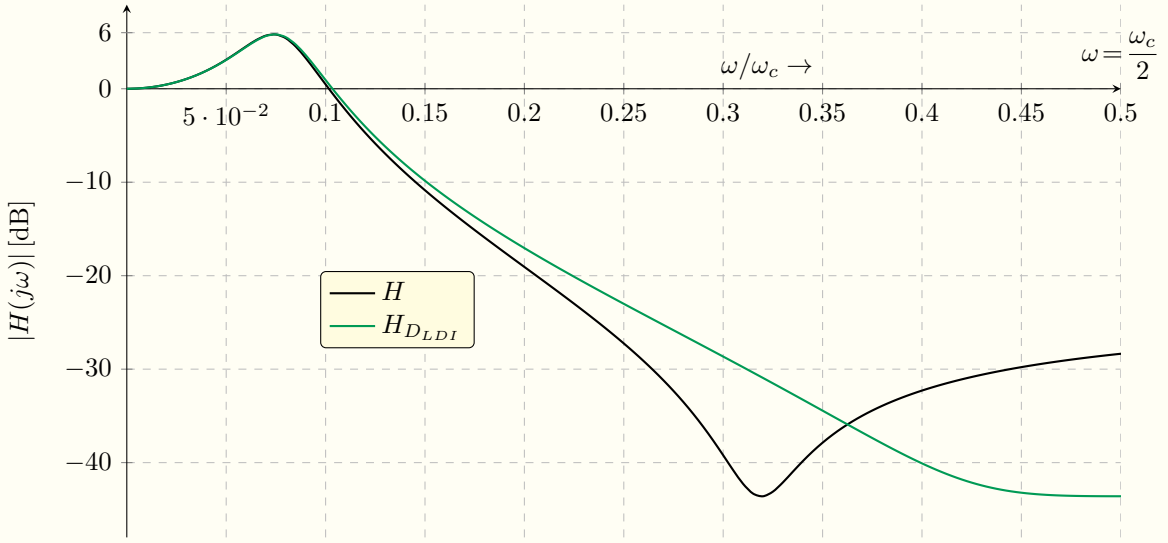
$$H_{D_{LDI}}(z) = \frac{5\,z^{5/2} + z^2 + 10\,z^{3/2} - z + 5\,\sqrt{z}}{80\,z^{5/2} + 20\,z^2 - 140\,z^{3/2} - 20\,z + 80\,\sqrt{z}} \tag{R.36}$$

I pro tuto metodu musí vyjít velikost pólů $|z_p| < 1$, konkrétně:

$$z_p \doteq [0,\ (0{,}7766 \pm 0{,}4122\,j)] \doteq [0,\ (0{,}8792\,\mathrm{e}^{\pm j0{,}4879})]. \tag{R.37}$$

Amplitudová charakteristika $|H_D(j\omega_D)|$ je vykreslena na následujícím obrázku R.12.

Komentář: Z průběhu charakteristik je zřejmé, že transformace nedeformuje amplitudu, což je dáno mapováním imaginární osy roviny s přesně na jednotkovou kružnici v rovině z. Transformace však expanduje kmitočtové měřítko (charakteristika $H_D(j\omega_D)$ se roztahuje-posouvá k $\frac{\omega_c}{2}$), což vyplývá z relace (R.20), která je graficky znázorněna na obrázku R.7.



Obrázek R.12: Srovnání amplitudových charakteristik $|H(j\omega)|$ a $|H_D(j\omega_D)|$ pro metodu LDI.

Bilineární transformace (BL)

Stejně jako v předchozích případech dosadíme do přenosové funkce $H(s)$ za proměnnou s výraz (R.22), čímž dostaneme výslednou přenosovou funkci $H_D(z)$ ve tvaru (R.38).

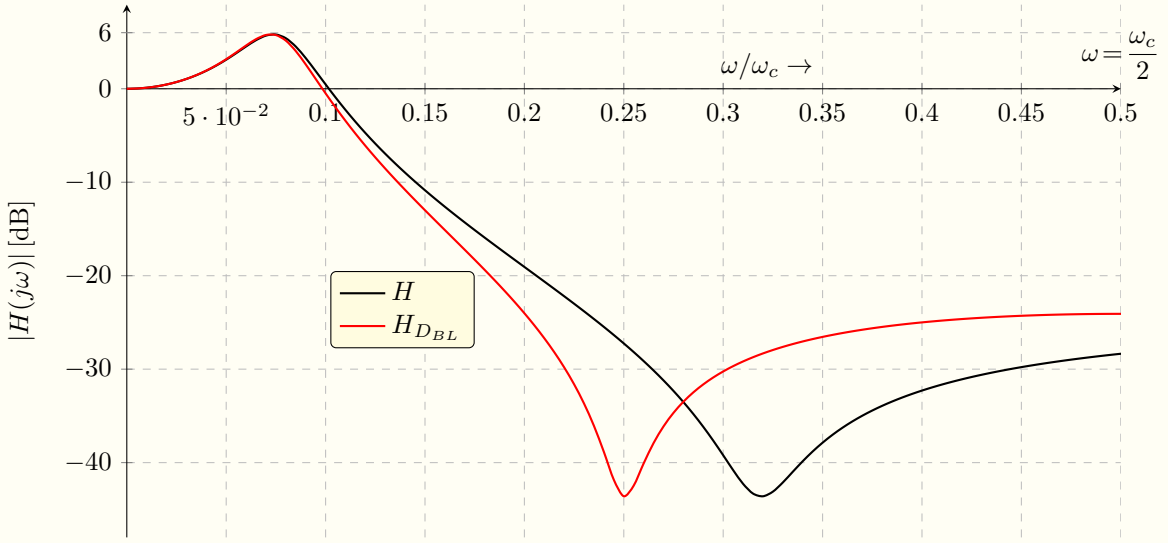
$$H_{D_{BL}}(z) = \frac{21\,z^2 + 19}{190\,z^2 - 300\,z + 150} \tag{R.38}$$

V tomto případě také musí vyjít velikost pólů $|z_p| < 1$, konkrétně:

$$z_p \doteq \pm 0{,}9510\,j. \tag{R.39}$$

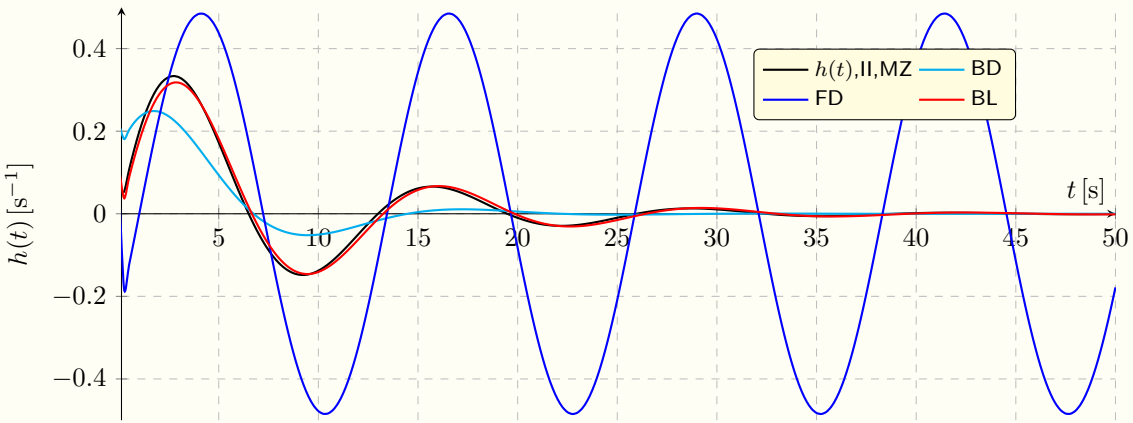
Amplitudová charakteristika $|H_D(j\omega_D)|$ je vykreslena na následujícím obrázku R.13.

Komentář: Z průběhu charakteristik je zřejmé, že transformace nedeformuje amplitudu, což je opět dáno mapováním imaginární osy roviny s přesně na jednotkovou kružnici v rovině z. Transformace BL na rozdíl od ostatních transformací kmitočtové měřítko komprimuje, (charakteristika $H_D(j\omega_D)$ se stlačuje k $\frac{\omega_c}{2}$), což je zřejmé z relace (R.21), která je graficky znázorněna na obrázku R.7. To má zásadní vliv na průběh kmitočtové charakteristiky, která se pro $\omega_D \to \frac{\omega_c}{2}$ vykreslí celá, tj. $\omega \to \infty$! Komprimace v tomto případě zvyšuje strmost charakteristiky v přechodovém pásmu filtru, což vlastně vylepšuje jeho vlastnosti. Z těchto důvodů **je metoda Bilineární transformace pro návrh filtrů upřednostňovaná**.

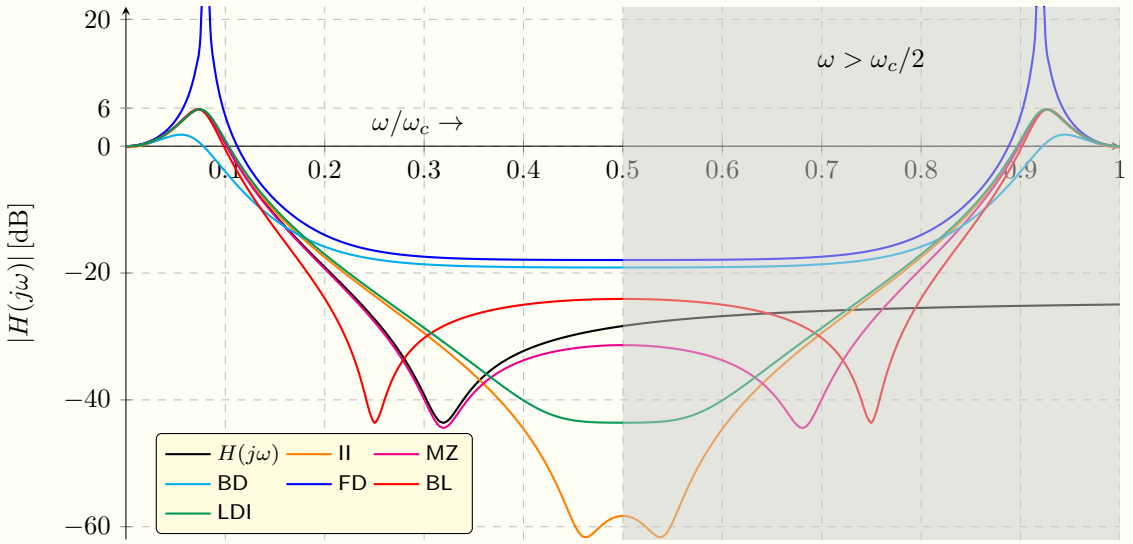


Obrázek R.13: Srovnání amplitudových charakteristik $|H(j\omega)|$ a $|H_D(j\omega_D)|$ pro metodu BL.

Níže jsou vykresleny impulzní charakteristiky $h_D[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H_D(z)\}$ pro uvedené metody (pro metodu LDI nelze, vzhledem ke tvaru (R.36), určit impulzní charakteristiku). Nakonec je na obrázku R.15 uvedeno srovnání amplitudových charakteristik $|H(j\omega)|$ a $|H_D(j\omega_D)|$ pro všechny metody pro $\omega \in \langle 0, \omega_c \rangle$.



Obrázek R.14: Srovnání impulzních charakteristik $h(t)$ a $h_D[n]|_{n=tT_c}$ pro uvedené metody.



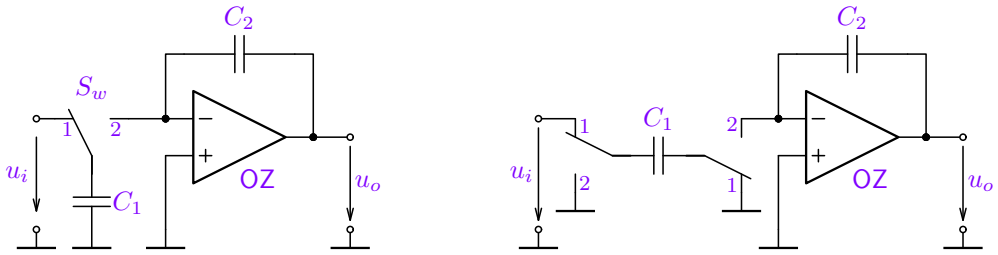
Obrázek R.15: Srovnání amplitudových charakteristik $|H(j\omega)|$ a všech $|H_D(j\omega_D)|$ pro $\omega \in \langle 0, \omega_c \rangle$.

Vlastnosti přenosové funkce (R.27), zejména parametry nuly přenosu (pro filtry je $Q_n \to \infty$) byly vybrány tak, aby bylo dobře patrné zkreslení nejenom imaginární (kmitočtové) osy, ale i zkreslení reálné osy, resp. vliv jejich vliv na zkreslení amplitudy. Vzhledem k tomu, že transformace BD a FD nemapují imaginární osu na jednotkovou kružnici (nezachovávají shodu os $j\omega$, $j\omega$). Tím dochází mimo zkreslení kmitočtové osy (kompresi, resp. expanzi) i ke zkreslení kmitočtové (změně amplitudové i fázové) charakteristiky, přičemž transformace BD činitel jakosti pólů Q snižuje, kdežto transformace FD ho zvyšuje, jak je patrné z charakteristik např. na obrázku R.15.
Z tohoto důvodu se pro návrh filtrů využívá zejména bilineární, případně LDI transformace a zkreslení kmitočtové osy lze pro vybraný kmitočet eliminovat tzv. předzkreslením (posunem) dle vztahu (R.26), resp. (R.21), jak bude prakticky ukázáno dále, v příkladu R.2.

R.1.7. Implementace SC integrátoru pro různé transformace

Přenosovou funkci lze ovlivňovat různým zapojením periodicky spínaných obvodů. To je dále demonstrováno na příkladu spínaného integrátoru pro různé obvodové implementace rezistoru pomocí spínaného kapacitoru. Ideální integrátor pracující ve spojitém čase byl představen v kapitole 11.10. Jednoduchou náhradu rezistoru dle ... získáme různé možnosti zapojení tzv. SC integrátoru (periodicky spínaného obvodu implementovaném pomocí techniky spínaných kapacitorů).
Vzhledem k tomu, že následující obvody jsou spínané pouze ve dvou fázích, použijeme stejné značení jako v kapitole 17.8.1, tj. např. $H_{i\bar{o}}(z)$ značí přenos z uzlu i v 1. fázi do uzlu $\bar{o}$ ve druhé fázi.

Základní implementace SC integrátotu byla ukázána v kapitole 17.8.3 na obrázku 17.93.

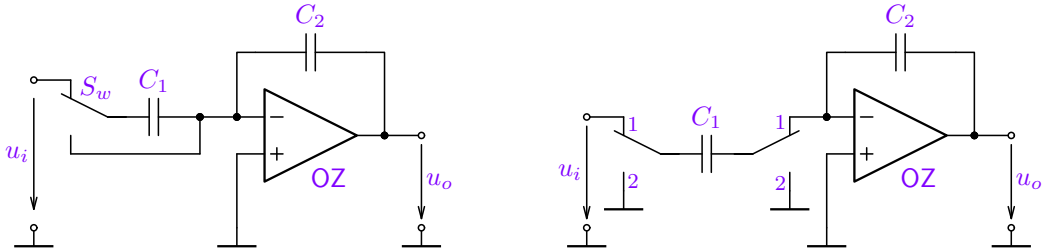


Obrázek R.16: SC integrátor se základní implemetací rezistoru pomocí spínaného kapacitoru v invertující (a) a neinvertující a tzv. strays-insensitive variantě (b).

Vztah (R.40) pro přenos odpovídá přenosu integrátoru pro FD transformaci.

$$H_{io}(z) = \frac{U_o(z)}{U_i(z)} = \mp\frac{C_1}{C_2}\frac{1}{z-1} \equiv \mp\frac{C_1}{C_2}\frac{1}{s}\Big|_{s \overset{\text{FD}}{=} z-1,\ T_c=1} \qquad \text{odpovídá FD transformaci.} \qquad \text{(R.40)}$$

Další variantou implementace SC integrátoru v následujícím zapojení vychází s propustného kapacitoru, který je periodicky zkratováván. Přenosové funkce jsou dány vztahy (R.41)[1] pro výstup do první, resp. (R.42) do druhé fáze, které odpovídají přenosu integrátoru pro BD resp. LDI transformaci.



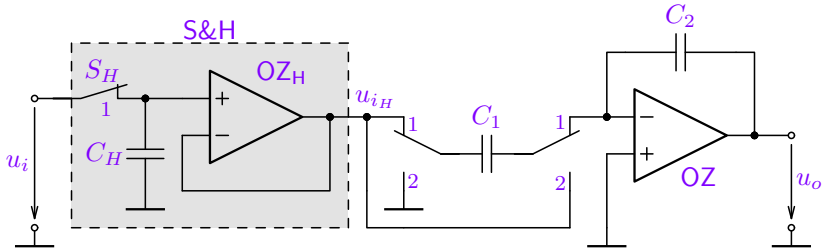
Obrázek R.17: SC integrátor s další variantou zapojení spínaného kapacitoru, varianta (b) jako strays-insensitive.

$$H_{io}(z) = \frac{U_o(z)}{U_i(z)} = -\frac{C_1}{C_2}\frac{z}{z-1} \equiv -\frac{C_1}{C_2}\frac{1}{s}\bigg|_{s=\frac{z-1}{z}\overset{\text{BD}}{,}\, T_c=1} \qquad \text{odpovídá BD transformaci.} \qquad \text{(R.41)}$$

$$H_{i\bar{o}}(z) = \frac{U_{\bar{o}}(z)}{U_i(z)} = -\frac{C_1}{C_2}\frac{\sqrt{z}}{z-1} \equiv -\frac{C_1}{C_2}\frac{1}{s}\bigg|_{s=z^{\frac{1}{2}}-z^{-\frac{1}{2}}\overset{\text{LDI}}{,}\, T_c=1} \qquad \text{odpovídá LDI transformaci.} \qquad \text{(R.42)}$$

[1] odpovídá $\mathcal{Z}$ obrazu jednotkového skoku

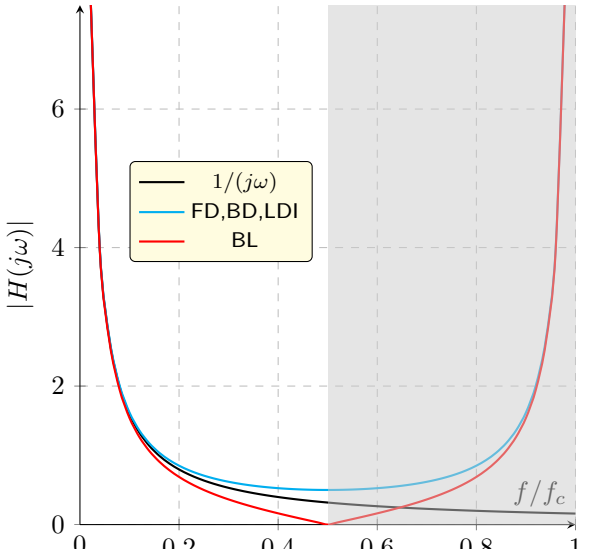
Další implementací rezistoru technikou SC je na obrázku R.16. Přenos takového zapojení SC integrátoru odpovídá bilineární transformaci, a to v případě použití obvodu S&H na jeho vstupu. Na rozdíl od implementací R.16 (b) a R.17 (b), je tato implementace spínaného rezistoru „strays-sensitive“, jelikož se uplatní parazitní kapacita realizace kapacitoru C_1, stejně jako u zapojení R.16 (a), viz obrázek 17.74. Viz také implementaci 17.76.

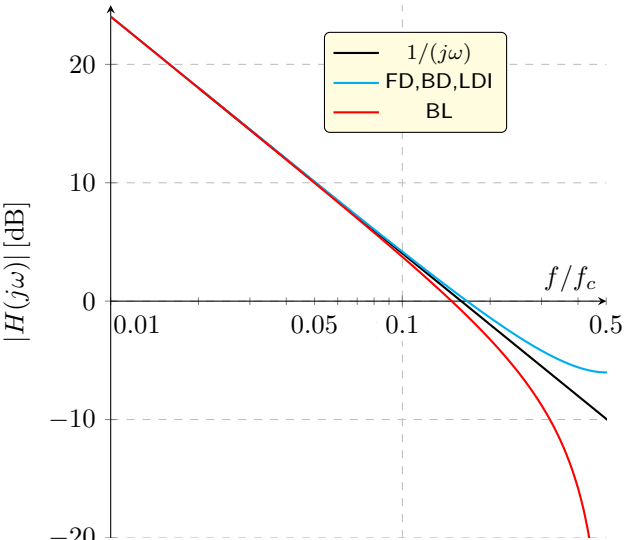


Obrázek R.18: SC integrátor s obvodem S&H odpovídající bilineární transformaci.

$$H_{io}(z) = \frac{U_o(z)}{U_i(z)} = -\frac{C_1}{C_2}\frac{z+1}{z-1} \equiv -\frac{2C_1}{C_2}\frac{1}{s}\bigg|_{\substack{\text{BL}\\ s=2\frac{z-1}{z+1},\, T_c=1}} \quad \text{odpovídá BL transformaci.} \tag{R.43}$$

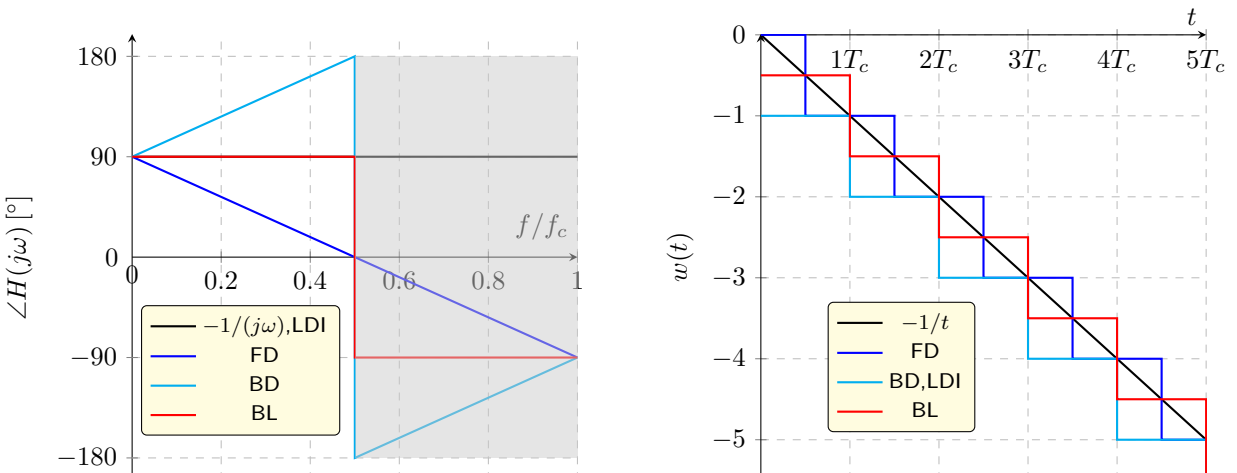
Srovnání kmitočtových charakteristik ideálního integrátoru a představených implementací pomocí spínaných kapacitorů je na obrázku R.19. Je zřejmé že pro $f < f_c/20$ je chyba implementace zanedbatelná ($< 0{,}1\,\mathrm{dB}$).





Obrázek R.19: Srovnání amplitudových charakteristik analogového a digitálně implementovaného integrátoru pro různé $s \Rightarrow z$ transformace v lineárních a logaritmických souřadnicích, viz analýzu.

Chyba fázové charakteristiky vzniká pouze u FD a BL transformace. Přechodové charakteristiky jednotlivých implementací SC integrátoru se liší pouze posunem (časovým či amplitudovým). Nicméně jejich průběh odpovídá charakteru invertujícího integrátoru, tj. diskretizované funkci $-1/t$ v časech $nT_c/2$, jak ukazuje obrázek R.20.



Obrázek R.20: Srovnání fázových a přechodových charakteristik analogového a digitálně implementovaného invertujícího integrátoru pro různé $s \Rightarrow z$ transformace, viz analýzu.

V dalším příkladu návrhu bikvadratické funkce je ukázáno, že i když nejsou použité „bilineární“ integrátory, lze implementaci přenosové funkce $H_D(z)$ pomocí Bilineární transformace provést.

***Příklad R.2** Návrh SC bikvadratické sekce jako pásmové propusti*

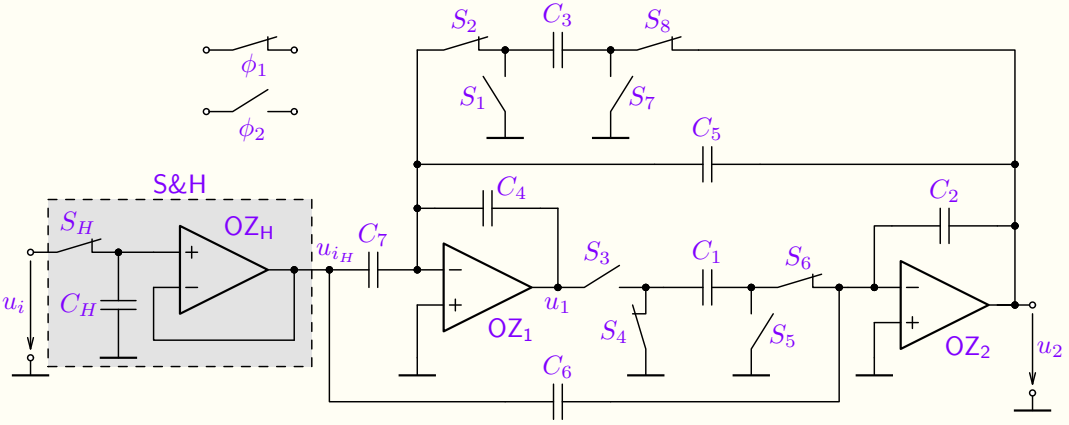
Zadání: Je zadaná přenosová funkce $H(s)$ analogové bikvadratické sekce typu pásmová propust dle (8.9). Proveďte transformaci této funkce na přenos $H_D(z)$ digitálního systému pomocí Bilineární transformace a určete hodnoty kapacitorů obvodu R.21 pro realizaci tak, aby jeho kmitočtová charakteristika na výstupu u_2 odpovídala zadané $H(j\omega)$. Uvažujte následující parametry: $H_B = 1$, $Q = 40$, $\frac{\omega_0}{2\pi} = f_0 = 16\,\mathrm{kHz}$ a vzorkovací kmitočet $f_c = 128\,\mathrm{kHz}$.

$$H(s) = \frac{H_B \frac{\omega_0}{Q} s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2} \tag{R.44}$$

Řešení: Nejprve určíme přenos $H_D(z) = \frac{U_2(z)}{U_i(z)}$ (z první do první fáze). Výsledek uveden vztahem (R.45), na který aplikujeme Bilineární transformaci pro normovaný kmitočet ($T_c = 1$), čímž obdržíme vztah (R.46).

$$H_D(z) = -\frac{C_4C_6z^2 + (C_1C_7 - 2C_4C_6)z - C_1C_7 + C_4C_6}{(C_2C_4)z^2 + (C_1C_3 + C_1C_5 - 2C_2C_4)z - C_1C_5 + C_2C_4} \tag{R.45}$$

$$H_D(z)\Big|_{z \overset{\text{BL}}{=} \frac{s+2}{2-s},\, T_c=1} = \frac{(2C_1C_7 - 4C_4C_6)s^2 - 4C_1C_7 s}{(C_1C_3 + 2C_1C_5 - 4C_2C_4)s^2 - 4C_1C_5 s - 4C_1C_3} \tag{R.46}$$



Obrázek R.21: Zjednodušené zapojení bikvadratické sekce se spínanými kapacitory.

Nyní porovnáme koeficienty přenosových funkcí (R.44) a (R.46), přičemž zvolíme normované hodnoty kapacitorů $C_1 = C_2 = C_4 = 1$, které vychází z doporučení pro vyvážené dynamické poměry zapojení.

Výpočet provedeme pro normovaný kmitočet $\omega_{0n} = \frac{2\pi f_0}{f_c} \doteq 0{,}7854$. Pro ostatní hodnoty kapacitorů pak z porovnání dostaneme:

$$C_3 = \frac{4Q\omega_{0n}^2}{D} \doteq 0{,}53, \quad C_5 = \frac{4\omega_{0n}}{D} \doteq 0{,}0169, \quad C_7 = 2C_6 = \frac{4H_B\omega_{0n}}{D} \doteq 0{,}0169, \tag{R.47}$$

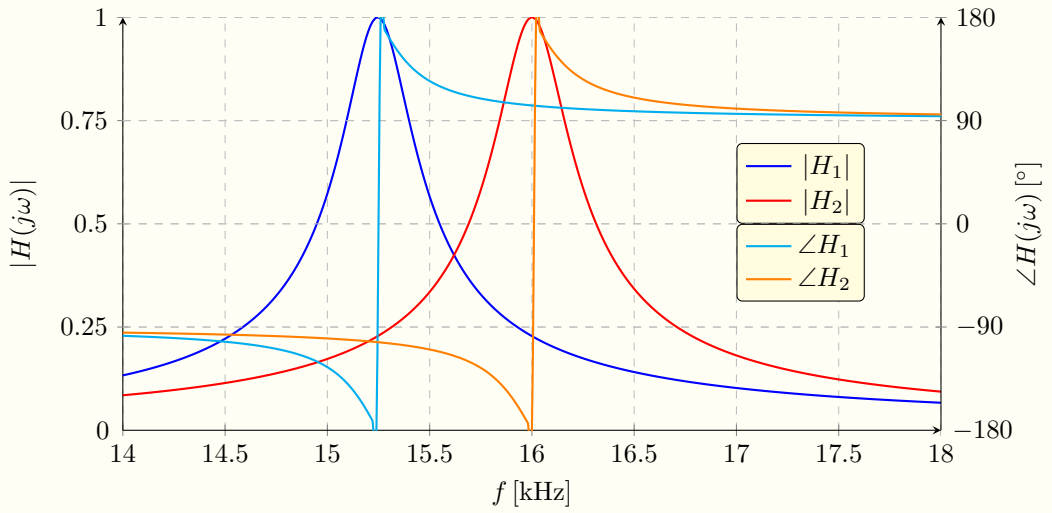
kde $D = Q\omega_{0n}^2 + 4Q + 2\omega_{0n}$.

Výsledné hodnoty kapacitorů dosadíme do (R.45) a vykreslíme kmitočtovou charakteristiku, která je na obrázku R.22 označena jako $H_1(j\omega_D) = H_D(z)|_{z=\mathrm{e}^{j\omega_D}}$. Je zřejmé, že propustné pásmo je posunuto na $f_0' \doteq 15{,}25\,\mathrm{kHz}$, Je to dáno malým poměrem $f_c/f_0 = 8$, čímž se znatelně projeví zkreslení kmitočtové osy dané vztahem (R.26), viz obrázek R.7.

Pokud provedeme předzkreslení kmitočtové osy vztahem (R.26), dostaneme pro zlomový kmitočet a následně pro kapacitory následující normované hodnoty:

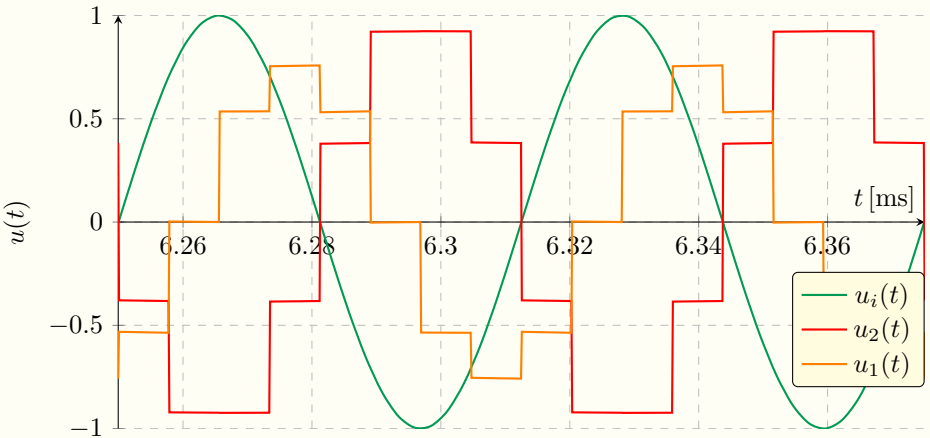
$$\omega_{0n'} = \frac{2f_c}{f_c} \tan \frac{2\pi f_0}{2f_c} \doteq 0.8284, \quad C_3 \doteq 0{,}581, \quad C_5 = C_7 = 2C_6 \doteq 0{,}0175, \text{ pro } C_1 = C_2 = C_4 = 1. \tag{R.48}$$

Kmitočtová charakteristika $H_2(j\omega_D)$, příslušející k hodnotám (R.48) nyní odpovídá zadání, tj. propustné pásmo je přesně na $f_0 = 16\,\mathrm{kHz}$, viz obrázek R.22.



Obrázek R.22: Kmitočtové charakteristiky bikvadratické sekce SC typu pásmové propusti navržené bez (H_1) a s před-zkreslením kmitočtové osy (H_2).

Na závěr je vykreslen výsledek výsledek časové analýzy pro výstupní napětí $u_2(t)$ i $u_1(t)$ při buzení harmonickým signálem $u_i(t)$ s kmitočtem $f = 16\,\mathrm{kHz}$. Je zřejmá funkčnost zapojení i uvedený poměr $f_c/f_0 = 8$.

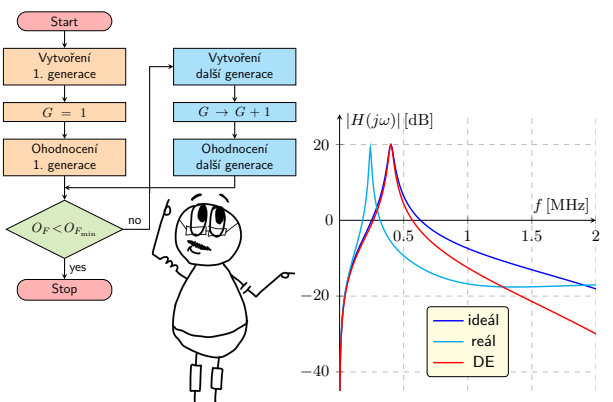


Obrázek R.23: Ustálená časová odezva napětí bikvadratické sekce SC na výstupech OZ $u_1(t)$ a $u_2(t)$ při buzení harmonickým signálem $u_i(t)$ pro $f = 16\,\mathrm{kHz}$.

Dodatek S

Optimalizace obvodů pomocí genetických algoritmů

Tato kapitola je věnována stručnému úvodu do optimalizace elektrických systémů. Jedná se velmi širokou oblast, přičemž optimalizační metoda se často vybírá podle řešeného problému. Tento materiál se omezuje pouze na optimalizace pomocí tzv. Genetických algoritmů, konkrétně metody Diferenciální evoluce. Jejich využití a možnosti jsou ukázány na několika příkladech. Podrobnější rozbor najde uživatel v citované literatuře.



S.1. Úloha optimalizace

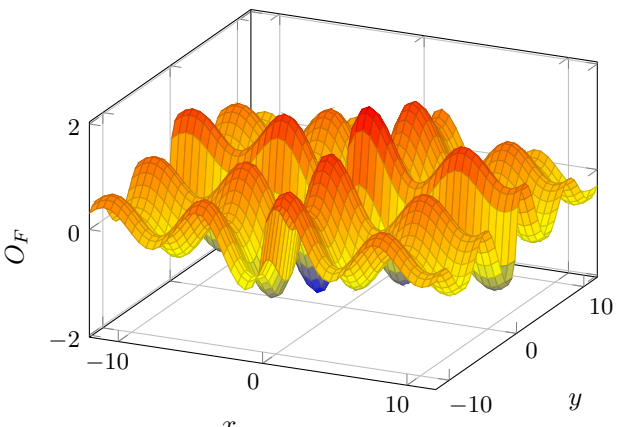
- **Optimalizace** = nalezení nejlepšího řešení dané úlohy pomocí řízených modifikací.
- **Účelová funkce** O_F (Objective function) vyjadřuje kvalitu řešení.

Účelová funkce je mnohdy definována jako penalizační funkce $\Rightarrow$ čím lepší řešení, tím menší hodnota O_F. Pokud je nalezeno globální minimum O_F, je nalezeno nejlepší řešení úlohy.

Účelová funkce může být velmi různorodá – záleží na typu optimalizované a zejména kritériích hodnocení/penalizace. O_F může být spojitá, např.

$$O_F = \frac{\sin(x)}{\sqrt{|x|}} + \frac{\sin(y)}{\sqrt{|y|}}, \qquad \rightarrow$$

jak ukazuje obrázek vpravo. V mnoha případech se však jedná o matematicky výrazně složitější funkci (nespojitou, s nespojitou derivací, ...), viz. dále.



Obrázek S.1: 3D graf funkce $\frac{\sin(x)}{\sqrt{|x|}} + \frac{\sin(y)}{\sqrt{|y|}}$.

S.2. Optimalizační algoritmus

Existuje velké množství matematických metod pro optimalizaci a z nich vyplývajících různých algoritmů. Tato problematika je obecně velice široká a optimalizace elektronických obvodů a systémů tvoří jen její malou část. Na druhou stranu je v této oblasti mnohdy nutné optimalizovat najednou požadavky na statické i dynamické parametry (zisk, linearita, chybové parametry, kmitočtové charakteristiky, časové odezvy, . . .), citlivostní parametry (tolerance hodnot), atd. Splnění mnoha takto různorodých požadavků je značně složitý úkol, který prakticky vylučuje použití analytických metod. Využívají se proto metody numerické.
Tento výuková materiál se omezuje pouze na stručné seznámení s **Evolučními algoritmy**, konkrétně s **Diferenciální evolucí**. Tyto algoritmy patří do skupiny a **stochastických** (využívají náhodnost) a ukázaly se jako velmi výhodné zejména pro optimalizaci specifických úloh elektronických, nespojitě pracujících obvodů, viz např. zde.

Výhody evolučních algoritmů

- Nekladou žádné podmínky na vlastnosti účelové funkce O_F (spojitost diferencovatelnost, . . .), přičemž proměnné O_F mohou být z různých množin (nejen reálných čísel) $\Rightarrow$ mohou řešit velmi různorodé požadavky.
- Zaměřují se na nalezení globálního optima (globální extrém O_F).

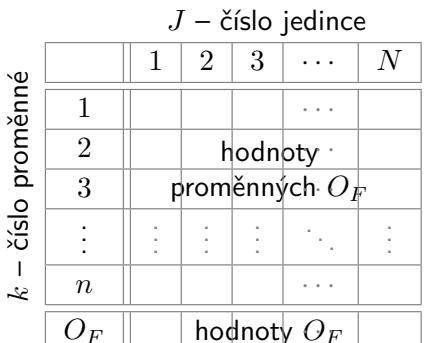
Nevýhody evolučních algoritmů

- Potřebují delší čas pro nalezení řešení $=$ daň za jejich robustnost.
- Čas výpočtu nelze předem určit, jelikož pracují s náhodnostmi.

S.3. Podstata evolučních algoritmů (EA)

Princip je podobný evolučnímu procesu/vývoji v přírodě a je převzatý i jeho popis. Vývoj optimalizace se děje po generacích, které obsahují tzv. jedince, viz obrázek níže.

- Proměnná $k = 1, \ldots, n$ je parametr obvodu: např. hodnota obvodového prvku (R, C, $\ldots$) nebo parametr tranzistoru (W), $\ldots$, jehož hodnota ovlivňuje chování optimalizovaného systému. Prostřednictvím změny těchto hodnot algoritmus hledá optimum = extrém O_F.
- Jedinec J je n prvkový vektor s hodnotami všech proměnných účelové funkce O_F, tj. hodnotami všech prvků/parametrů obvodu, které algoritmus mění, a tím optimalizuje chování obvodu.
- Generace je skupina N různých jedinců s danými hodnotami proměnných. Obvykle se volí $N \approx n \cdot 10$ (počet jedinců v generaci bývá cca 10 větší než je počet parametrů účelové funkce).



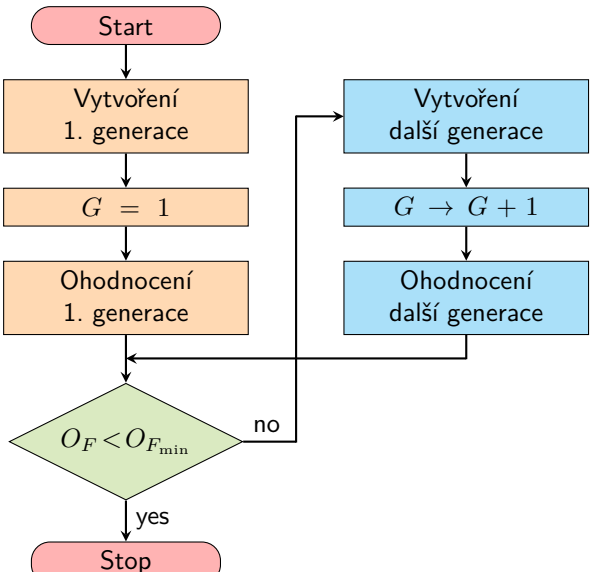
Obrázek S.2: Ilustrace jedné generace matic s parametry jedinců a jejich hodnotami O_F.

V matici, která popisuje jednu generaci je navíc ke každému jedinci přidaná odpovídající hodnota O_F (jejich ocenění). Matice má pak rozměr $(n + 1) \cdot N$, viz obrázek S.2.

S.3.1. Proces optimalizace EA

Algoritmus se snaží v jednotlivých cyklech získávat lepší jedince, tj. hodnoty O_F. Postup lze vyjádřit diagramem na obrázku S.3.

1. Jedinci první generace se často generují jako náhodná čísla, mnohdy v předem daných intervalech (např. $R \in \langle 10\,\Omega, 100\,\mathrm{k}\Omega \rangle$, ...).
2. Další generace se vytvoří ze stávajících jedinců pomocí různých postupů dle použitého EA:
   - Diferenciální evoluce (dále uvedena),
   - Evoluční strategie,
   - Evoluční programování,
   - Genetické algoritmy,
   - Genetické programování, případně další.
3. Optimalizace končí nalezením optimálního jedince, jehož O_F vyhovuje požadavkům. Případně se běh algoritmu zastaví pokud EA není progrese (lepší jedinec) v posledních x generacích.



Obrázek S.3: Obecný vývojový diagram EA.

S.3.2. Diferenciální evoluce (DE)

DE je výkonný a univerzální algoritmus patřící do EA. Tvorba nové generace (jedinců) se řídí těmito parametry:

- práh křížení (crossover) $CR \in \langle 0{,}1 \rangle$,
- mutační konstanta $F \in \langle 0{,}2 \rangle$ (obvykle $0{,}3$ až $0{,}9$)

a probíhá podle níže uvedeného postupu:

1. Vytvoření 2 – 5 náhodných přirozených čísel R_y (počet y dán variantou DE) z množiny $\{1,2,\ldots,N\}$ mimo J,
2. generování náhodného přirozeného čísla $K \in \{1,2,\ldots,n\}$,
3. vytvoření jedince $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \ldots h_n)$ tzv. „mezigenerace“:

$$h_k = \begin{cases} v_k & \text{pokud } L \leq CR \text{ nebo } k = K, \\ x_{k,J,G} & \text{jinak,} \end{cases} \quad \text{pro} \quad k \in \{1,2,\ldots,n\}, \tag{S.1}$$

   kde v_k je prvek potenciálně nového jedince – vektoru $\mathbf{v}$, vytvořený z jedinců J stávající generace G (dle varianty DE, viz dále) a $L \in \langle 0, 1 \rangle$ je pro něho vytvořené náhodné reálné číslo,

4. vytvoření jedince $\mathbf{x}$ na pozici J v nové generaci $G + 1$:

$$\mathbf{x}_{J,G+1} = \begin{cases} \mathbf{h} & \text{pokud } O_F(\mathbf{h}) \leq O_F(\mathbf{x}_{J,G}), \\ \mathbf{x}_{J,G} & \text{jinak.} \end{cases} \tag{S.2}$$

Vytvoření potenciálně nového jedince v

Pro výpočet potenciálně nového jedince lze použít mnoha způsobů. Zde jsou uvedeny čtyři často používané možnosti (další viz např. zde nebo v práci: Lukáš Dolívka: Disertační práce ČVUT FEL):

DE1: $\mathbf{v} = \mathbf{x}_{R_1,G} + F(\mathbf{x}_{R_2,G} - \mathbf{x}_{R_3,G})$,
DE2: $\mathbf{v} = \mathbf{x}_{\text{best},G} + F(\mathbf{x}_{R_1,G} - \mathbf{x}_{R_2,G})$,
DE3: $\mathbf{v} = \mathbf{x}_{J,G} + \lambda(\mathbf{x}_{\text{best},G} - \mathbf{x}_{J,G}) + F(\mathbf{x}_{R_1,G} - \mathbf{x}_{R_2,G})$,
DE4: $\mathbf{v} = \mathbf{x}_{R_1,G} + F(\mathbf{x}_{\text{best},G} - \mathbf{x}_{R_1,G} + \mathbf{x}_{R_2,G} + \mathbf{x}_{R_3,G})$,

kde $x_{\text{best},G}$ je jedinec s nejlepší (nejmenší) hodnotou O_F v aktuální generaci G a
λ je náhodné reálné číslo většinou v intervalu $0{,}6$ až $0{,}95$.

Prvotní kontrola potenciálně nového jedince v

Nový jedinec se generuje náhodným procesem a v mnoha případech optimalizace je třeba aby hodnoty jeho proměnných byly v předem daném intervalu, tj. $v_k \in M_k$, resp. $v_k \in \langle \min(M_k), \max(M_k) \rangle$, např. $C \in \langle 10\,\text{pF}, 1\,\mu\text{F} \rangle$. Obecně je M_k množina reálných, komplexních nebo diskrétních čísel. Pokud $v_k \notin M_k$, lze použít vztahu S.3 nebo lépe S.4, kde je korigovaná hodnota blíže překročené mezi:

$$v_k = L\big(\max(M_k) - \min(M_k)\big) + \min(M_k) \tag{S.3}$$

$$v_k = \begin{cases} L\big(\phi_{M_k} - \min(M_k)\big) + \min(M_k) & \text{pro } x_k < \min(M_k), \\ L\big(\max(M_k) - \phi_{M_k}\big) + \phi_{M_k} & \text{pro } x_k > \max(M_k), \end{cases} \quad \text{kde} \quad \phi_{M_k} = \frac{\max(M_k) + \min(M_k)}{2} \tag{S.4}$$

S.4. Účelová funkce

Obecně je účelová funkce definovaná jako funkce n proměnných: $O_F(x_1,\ldots,x_n): \; M \to \mathbf{R}$, kde $M = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$, tj. $x_k \in M_k, \quad k = 1,\ldots,n$. Pokud $x_k \in \mathbf{R}$, pak $M \subseteq \underbrace{\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R}}_{n-\text{krát}} = \mathbf{R}^n$

S.4.1. Optimalizace elektrických obvodů

Účelová funkce O_F pro optimalizaci systémů – např. elektrických obvodů zahrnuje funkci $O(v_i, x_1, \ldots, x_n)$, která je předmětem optimalizace a mimo proměnné obvodu $\mathbf{x}$ má ještě další proměnnou $v_i \in \mathbf{R}$ – většinou diskrétní body, ve kterých $O(v_i, \mathbf{x})$ vyhodnocujeme (např. ω_i jako body $H(j\omega)$ nebo t_i pro $w(t)$, ...). Úlohou optimalizace je stanovení hodnot proměnných $x_1, \ldots, x_n$ tak, aby funkční hodnota $O(v_i, \mathbf{x})$ ležela v požadovaném intervalu:

$$O(v_i, x_1, \ldots, x_n) \in \langle B_l(v_i), B_h(w_i) \rangle \quad \forall\, v_i \tag{S.5}$$

Pokud podmínka (S.5) není splněna (v kterémkoli bodě v_i), zvýší se hodnota $O_F(\mathbf{x_k})$ o tzv. penalizaci V_i:

$$O_F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_i V_i(v_i, x_1, \ldots, x_n), \quad \text{kde} \tag{S.6}$$

$$V_i(v_i, x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} B_l(v_i) - O(v_i, x_1, \ldots, x_n) & \text{pokud} \quad B_l(v_i) > O(v_i, x_1, \ldots, x_n), \\ O(v_i, x_1, \ldots, x_n) - B_h(v_i) & \text{pokud} \quad B_h(v_i) < O(v_i, x_1, \ldots, x_n), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \tag{S.7}$$

O_F ve vztahu (S.6) může obsahovat další členy a tím lze optimalizaci téměř libovolně rozšířit o další kritéria.

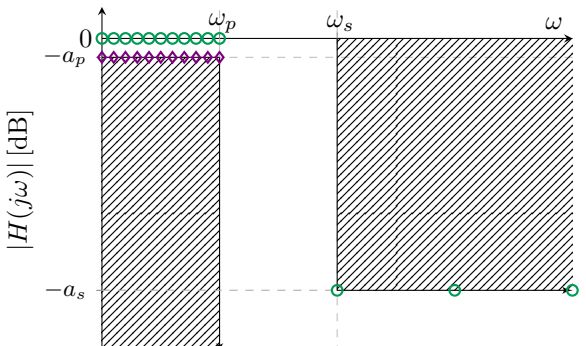
S.4.2. Optimalizace amplitudové charakteristiky

Konkrétněji je představena optimalizace amplitudové charakteristiky kmitočtového filtru, která je založena na výše uvedeném postupu/algoritmu. Výpočet penalizace uvažuje, na rozdíl od vztahu (S.7), vhodnější relativní odchylku místo odchylku absolutní.

Na obrázku vpravo je uvedeno toleranční schéma filtru, které lze popsat

- ○ horními mezemi modulu $\equiv B_h(\omega_i)$ a
- ◊ dolními mezemi modulu $\equiv B_l(\omega_i)$,

kde $v_i = \omega_i$ jsou jednotlivé úhlové kmitočty, ve kterých se kontroluje hodnota amplitudové charakteristiky $|H(j\omega)| = O$ pro daného jedince J, definovaného hodnotami obvodových prvků, např. $\mathbf{x}_J = (C_1, L_1, C_2, L_2, \dots)$. Účelovou funkci lze pak zapsat ve tvaru:



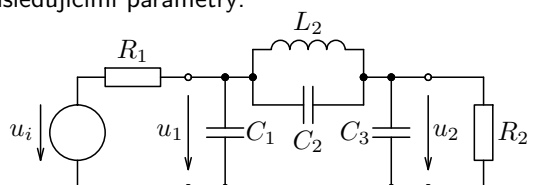
$$O_F(\mathbf{x_k}) = \begin{cases} \frac{|H(j\omega_i,\mathbf{x_k})|-B_h(\omega_i)}{B_h(\omega_i)} & \text{pokud } |H(j\omega_i,\mathbf{x_k})| > B_h(\omega_i), \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} +$$

$$+ \begin{cases} \frac{B_l(\omega_i)-|H(j\omega_i,\mathbf{x_k})|}{B_l(\omega_i)} & \text{pokud } |H(j\omega_i,\mathbf{x_k})| < B_l(\omega_i), \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad \forall\ \omega_i, \quad \text{kde} \quad \mathbf{x_k} = x_1, \dots, x_n. \qquad \text{(S.8)}$$

S.5. Ukázky použití algoritmů DE

S.5.1. Standardní návrh LC filtru typu dolní propusti

Následují ukázky použití výše uvedených postupů při návrhu a optimalizaci elektrických kmitočtových filtrů. Jako první je ukázka výpočtu hodnot obvodových prvků eliptického LC filtru typu dolní propusti uvedeného níže s následujícími parametry:



- $f_p = 100\,\mathrm{kHz}$,
- $f_s = 200\,\mathrm{kHz}$,
- $a_p = 3\,\mathrm{dB}$,
- $a_s = 40\,\mathrm{dB}$,
- $R_1 = R_2 = 100\,\Omega$.

Obrázek S.4: Schéma eliptického LC filtru typu dolní propusti s požadovanými parametry.

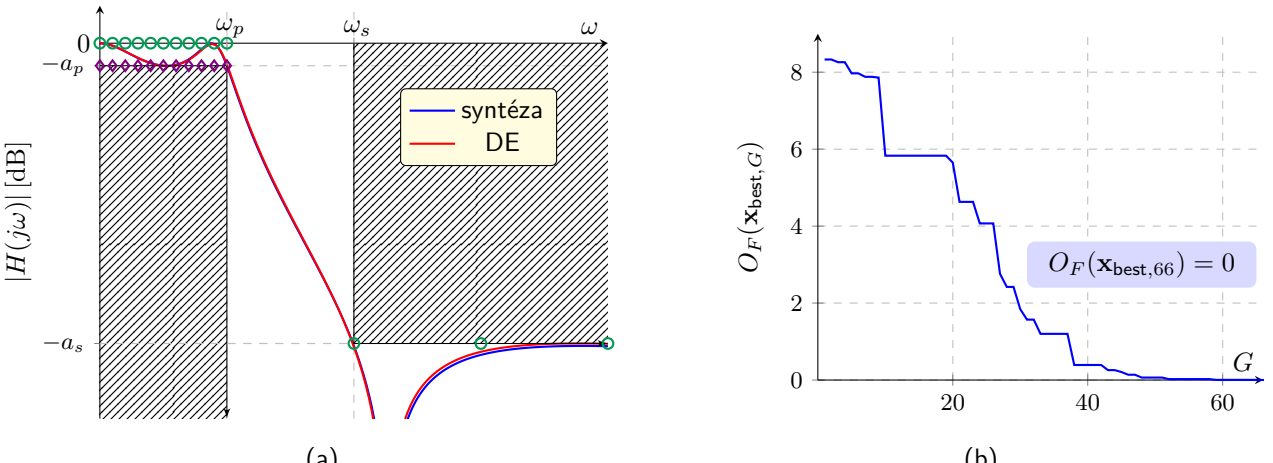
Pro výpočet byl použit evoluční algoritmus DE1 s následujícími parametry (výsledky viz obrázek S.5 na další straně a tabulku S.1 vpravo):

- $CR := 0{,}9$, $F = 0{,}5$ a $N = 10n = 40$,
- $C_k \in \langle 100\,\mathrm{pF}, 1\,\mu\mathrm{F}\rangle$, $L_k \in \langle 10\,\mu\mathrm{H}, 1\,\mathrm{mH}\rangle$.

	C_1 [nF]	C_2 [nF]	L_2 [µH]	C_3 [nF]
syntéza	49,34	4,96	99,07	49,34
DE: $\mathbf{x}_{\mathrm{best}}$	53,06	5,03	98,75	44,86

Tabulka S.1: Hodnoty prvků LC filtru z obrázku S.4 vypočtené analyticky (syntéza) a pomocí algoritmů DE.

Na následujícím obrázku je uvedeno toleranční schéma filtru s naznačenými mezemi ($\circ \equiv B_h(\omega_i)$ a $\diamond \equiv B_l(\omega_i)$) a vykresleným průběhem modulové charakteristiky pro syntetizovaný filtr a pro hodnoty součástek vypočtené pomocí algoritmů DE, včetně průběhu optimalizace.



Obrázek S.5: Amplitudové charakteristiky (provozní činitel přenosu) LC filtru vytvořeného syntézou a pomocí algoritmů DE (a) a typický průběh minima účelové funkce v závislosti na generaci (b).

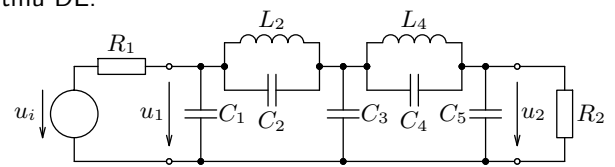
S.5.2. Nestandardní návrh LC filtru typu dolní propusti

V tomto případě se jedná o návrh nestandardního filtru, u kterého je požadováno:

1. propustné pásmo na kmitočtu $27\,\mathrm{MHz}$ pro nosnou vlnu a
2. potlačení její 3. a 5. harmonické (na kmitočtu 81 a $135\,\mathrm{MHz}$) o $150\,\mathrm{dB}$.

Standardní návrh byl proveden pro 5. řád filtru (pro dvě nuly přenosu) pomocí Cauerovy aproximace. Vhodnou volbou tolerančního schématu průběhu (viz níže) docílit modulové charakteristiky dle obrázku S.7 (modrá křivka), která však nemůže plně splnit zadání. Níže je uvedena struktura LC filtru a tabulka hodnot prvků pro $R_1 = R_2 = 50\,\Omega$, které byly obdrženy syntézou a pomocí algoritmu DE.

- $f_p = 28{,}4\,\mathrm{MHz}$,
- $a_p = 6\,\mathrm{dB}$,
- $f_s = 77{,}4\,\mathrm{MHz}$ a
- $a_s = 90\,\mathrm{dB}$.



Obrázek S.6: Zapojení LC filtru pro nestandardní návrh.

	C_1 [nF]	C_2 [pF]	L_2 [µH]	C_3 [nF]	C_4 [pF]	L_4 [µH]	C_5 [nF]
syntéza	0,60	29,6	0,13	0,76	11,2	0,14	0,62
DE: $\mathbf{x}_{\mathrm{best}}$	3,27	17,4	0,08	0,56	9,6	0,4	1,04

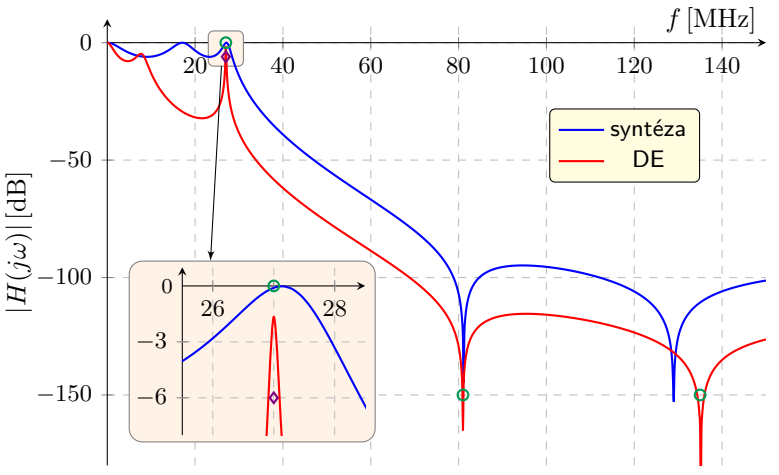
Tabulka S.2: Hodnoty prvků LC filtru vypočtené analyticky (syntéza) a pomocí algoritmů DE.

Pro optimalizaci byl opět použit evoluční algoritmus DE1 s podobnými parametry parametry jako v předchozím případě, tj. $C_k \in \langle 5\,\mathrm{pF}, 5\,\mathrm{nF}\rangle$, $L_k \in \langle 10\,\mathrm{nH}, 1\,\mu\mathrm{H}\rangle$, $CR := 0{,}9$, $F = 0{,}5$, $N = 10n = 70$.

Algoritmus skočí cca po 230 geberacích, s výsledkem $O_F(\mathbf{x}_{\mathrm{best}}) = 0$, tj. **dospěje k řešení, které beze zbytku splňuje zadání**. Výsledné hodnoty obvodových prvků jsou uvedeny v tabulce S.2.

Obrázek S.7 uvádí toleranční schéma filtru s mezemi zadání ($\circ \equiv B_h(\omega_i)$ a $\diamond \equiv B_l(\omega_i)$) a vykresleným průběhem modulové charakteristiky jak pro syntetizovaný filtr, tak pro hodnoty součástek vypočtené pomocí algoritmu DE.

Průběh optimalizace je ukázán ve videoukázce.



Obrázek S.7: Amplitudové charakteristiky (provozní činitel přenosu) nestandardního LC filtru vytvořeného syntézou a pomocí algoritmů DE.

S.5.3. Optimalizace pásmové propusti se spínanými kapacitory (SC)

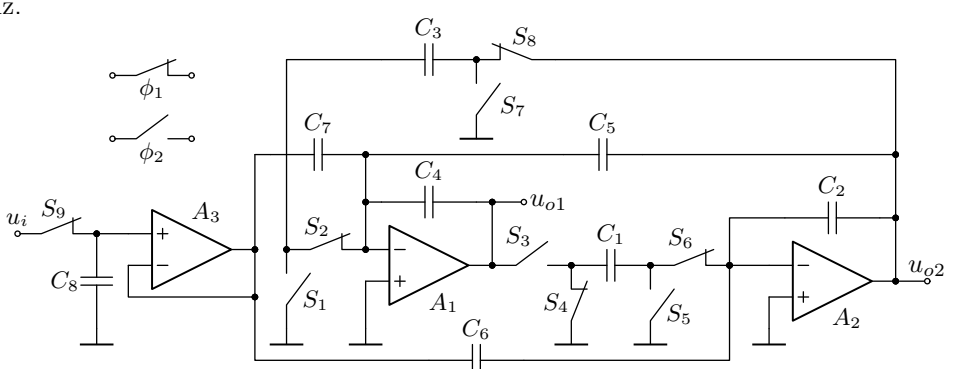
V poslední ukázce je uveden příklad optimalizace zjednodušeného Fleischer-Laker SC bikvadu s reálnými parametry spínačů a operačních zesilovačů. Jeho schéma je uvedeno na obrázku S.8. Cílem je navrhnout hodnoty kapacitorů, které budou splňovat zadání i pro s reálnými parametry prvků. Idealizovaný návrh byl proveden postupem uvedeným v kapitole 17 pro níže uvedené parametry. Výsledky včetně optimalizace dokládá tabulka S.3 a obrázek S.9. Pásmová propust 2. řádu byla navržena pro $f_0 = 400\,\mathrm{kHz}$, resp. $f_0 = 405{,}95\,\mathrm{kHz}$ po předzkreslení, $Q = 10$ a $H_B = 10$ a spínací kmitočet $f_c = 6\,\mathrm{MHz}$.

Jako neideality byly uvažovány reálné parametry OZ:

- $A_0 = 2 \cdot 10^5$,
- $f_t = 20\,\mathrm{MHz}$,
- $R_o = 50\,\Omega$ a

a odpory spínačů v sepnutém stavu:

- $R_{\mathrm{on}} = 1\,\mathrm{k}\Omega$.



Obrázek S.8: Zapojení zjednodušeného Fleischer-Laker SC bikvadu.

	C_1 [pF]	C_2 [pF]	C_3 [pF]	C_4 [pF]	C_5 [pF]	C_6 [pF]	C_7 [pF]
výpočet	50,0	50,0	8,5	50,0	2,0	10,0	20,0
DE: $\mathbf{x}_{\text{best}}$	71,0	43,6	59,4	57,1	15,1	31,7	44,5

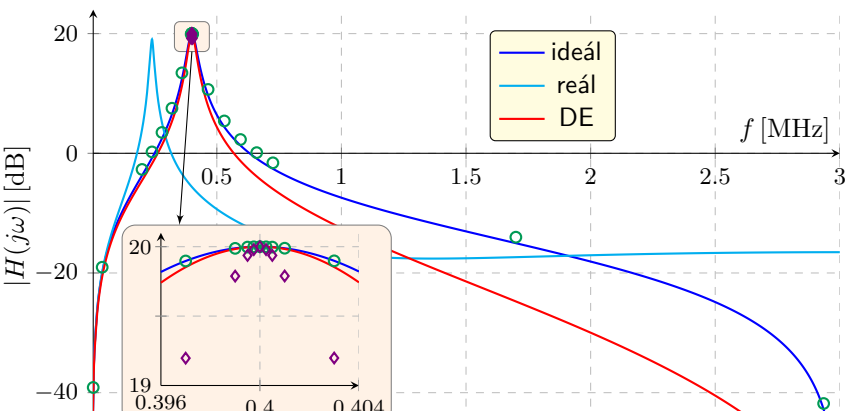
Tabulka S.3: Hodnoty kapacit SC bikvadu vypočtené analyticky pro f_0' a pomocí algoritmů DE pro reálný obvod.

Výsledky uvedeny pro $H(j\omega) = \frac{U_{o2}(j\omega)}{U_i(j\omega)}$ dle S.8.

Nastavení optimalizace bylo shodné jako v předchozích případech s $C_k \in \langle 1\,\text{pF}, 100\,\text{pF}\rangle$ a $N = 10n = 70$. Do úlohy optimalizace byla zahrnuta i dynamika obvodu, tj. $\frac{U_{o2}(j\omega)}{U_{o1}(j\omega)}$.

Výsledek $O_F \doteq 2{,}4 \cdot 10^{-10}$ obdržen po $G = 1983$.

Viz také Lukáš Dolívka: Disertační práce ČVUT FEL



Obrázek S.9: Amplitudové charakteristiky SC filtru s analyticky určenými hodnotami kapacit a to jak s ideálními, tak reálnými spínači a OZ a s optimalizovanými hodnotami C_k reálného obvodu pomocí algoritmů DE.

S.6. Kombinování optimalizačních algoritmů

Hybridní algoritmy jsou kombinacemi dvou i více metod. Tohoto přístupu se využívá zejména v situacích, kdy je řešená úloha značně komplikovaná a samotný algoritmus DE může být buď pomalý nebo neschopný nalézt globální minimum O_F. Vzhledem k rozsahu toto materiálu je zde uvedena pouze základní zmínka. Pro další studium je třeba využít uvedených odkazů.

Optimalizace hejnem/rojem částic – Particle Swarm Optimization (PSO)

Tzv. rojová optimalizace je inspirovaná chováním hejna ptáků při hledání potravy. Jedná se v zásadě o evoluční algoritmus, který také využívá generace náhodně vytvořených jedinců, nicméně noví jedinci se nevytvářejí křížením ani mutacemi. Podstata metody je založena na sdílení informací o nejlepších místech celého hejna a jednotlivých jedinců. Jedinci se mění, tj. pohybují prohledávaným prostorem, přičemž se sleduje a mění poloha, rychlost pohybu a samozřejmě hodnota účelové funkce.

Nelder-Mead (NM) simplexový algoritmus

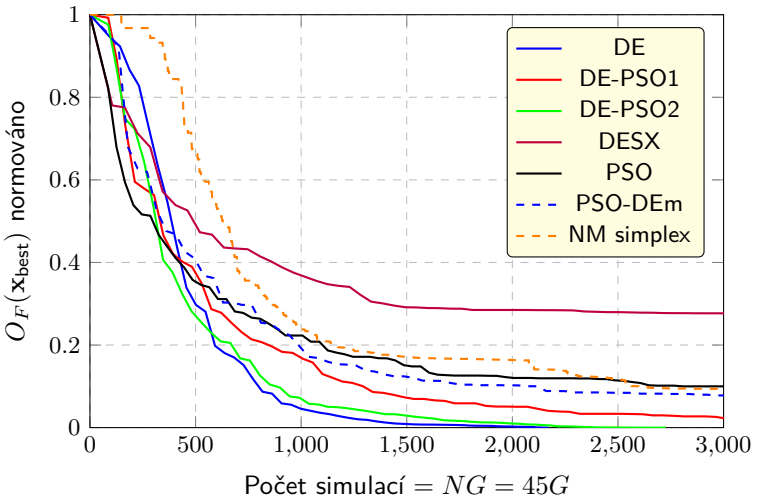
Algoritmus přímo prohledávající optimalizační prostor, jehož princip je založen na postupných úpravách simplexu (útvar s $n+1$ vrcholy v n rozměrném prostoru, viz např. zde) tak, aby se hodnota účelové funkce minimalizovala. Jeho základem jsou transformace bodu s nejvyšší hodnotou účelové funkce pomocí tzv. centroidu (resp. těžiště).

Více viz Jiří Náhlík: Disertační práce ČVUT FEL.

Obrázek S.10 ukazuje průběhy optimalizací SC bikvadu, který byl simulován na tranzistorové úrovni. Bylo použito několik hybridních algoritmů:

- DE – samotný algoritmus diferenciální evoluce (většinou DE3),
- DE-PSO – spojení algoritmů DE a PSO (varianty DE-PSO1 a DE-PSO2) s dominancí DE,
- DESX – spojení algoritmů simplexové metody s algoritmy DE, přičemž je umožněna paralelizace výpočtu, ale je nutný větší počet jedinců,
- PSO – samotný algoritmus PSO,
- PSO-DEm – spojení algoritmů PSO a DE s dominancí PSO,
- NM Simplex – samotný simplexový algoritmus.

Popis jednotlivých algoritmů a jejich spojení je uveden zde.



Obrázek S.10: Průběhy optimalizací různých metod. (převzato).

S.7. Hodnocení optimalizačních metod

Vzhledem k tomu, že všechny použité algoritmy patří mezi stochastické (využívají náhodnost), tak vyhodnocování jejich výkonnosti je nutné provést statisticky. Mnohdy je výsledek ovlivněn už 1. generací, zejména v případě, že její členy jsou značně vzdáleny od globálního minima O_F, resp, jsou blízko minima lokálního.

Graf na obrázku S.10 je vykreslením průměrů z deseti „běhů“, čímž lze částečně eliminovat uvedenou náhodnost. Samotný graf však plně nevypovídá o úspěšnosti daného algoritmu. Mimo výpočetní náročnosti (počtu generací/analýz, případně času výpočtu – paralelizace) je možné do hodnocení zahrnout i tzv. úspěšnost – Success rate, který je definován jako:

$$S_R = \frac{\text{počet úspěšně dokončených optimalizací}}{\text{celkový počet optimalizací}}$$

Pro uvedený případ ukazuje výsledky následující tabulka:

	DE3	DE-PSO1	DE-PSO2	DESX	PSO	PSO-DEm	NM Simplex
N_{OF}	2172	10299	2725	7770	84942	77855	5371
$S_R\,[\%]$	67	100	100	0	0	0	60

Tabulka S.4: Průměrný počet vyčíslení účelové funkce (simulací) N_{OF} a Success rate S_R jednotlivých optimalizačních metod při ukončovací podmínce 100 iterací bez vývoje O_F.

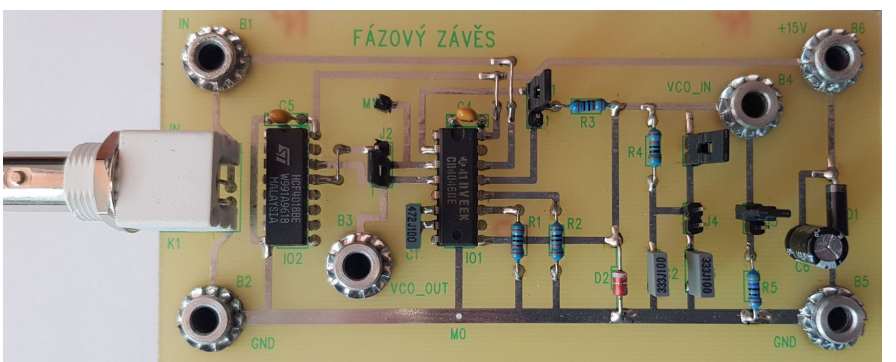
Z grafu na obrázku S.10 je zřejmé, že samotný algoritmus DE je velmi účinný. Nicméně především algoritmy DE-PSO zlepšují spolehlivost optimalizace spínaných obvodů, jak uvádí tabulka S.4. Větší počet simulací tohoto hybridního algoritmu lze do značné míry kompenzovat použitím hraniční velikosti počtu jedinců generace, tj. lze použít malý počet jedinců a tím zkrátit výpočet.

NM simplexový algoritmus ukázal dobrou a rychlou konvergenci, pokud se řešení přiblížilo ke globálnímu minimu.

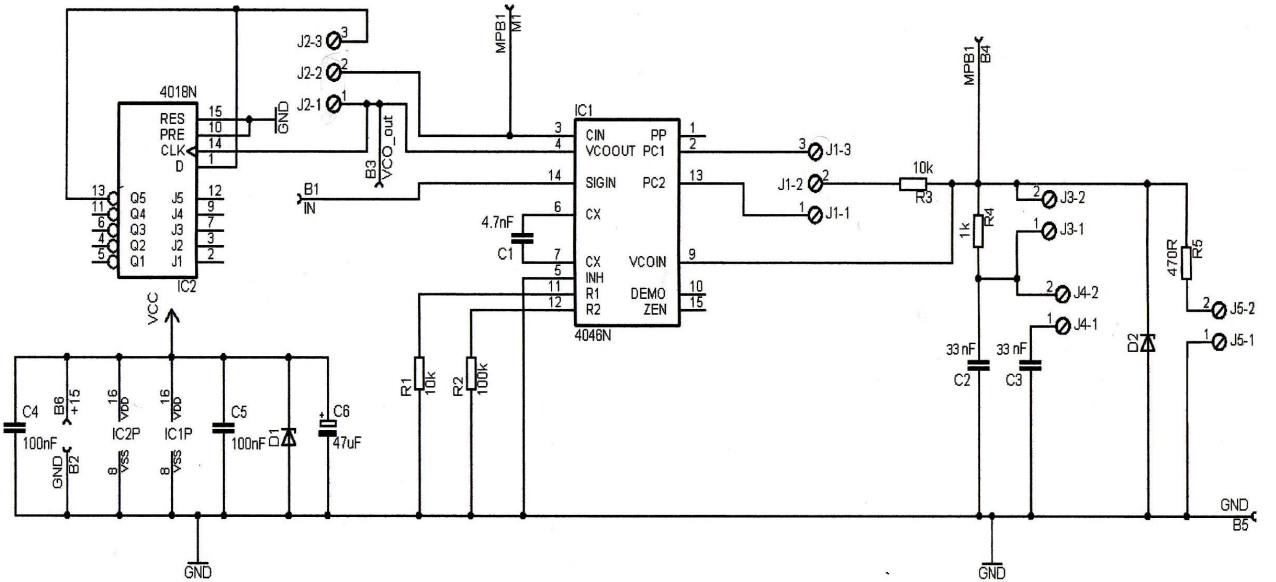
V této části je ukázána zejména optimalizace elektrických filtrů. Nicméně uvedené algoritmy lze použít na další úlohy. Jednak lze účelovou funkci rozšířit o další kritéria jako např. uvedené dynamické poměry SC bikvadu, a tím postihnout širší oblast vlastností optimalizovaného systému. Jednak lze pomocí uvedených metod optimalizovat elektronické obvody – např. velikosti MOS tranzistorů zesilovačů, atd. Uživatele, kteří se zajímají o danou problematiku mohou vyjít z uvedených odkazů, kde lze nalézt další informace a také odkazy na další literaturu.

Dodatek T
Měření na fázovém závěsu

V této části jsou uvedeny základní informace k měření na laboratorním přípravku fázového závěsu realizovaného integrovaným obvodem 4046. Přípravek umožňuje realizovat základní konfigurace fázového závěsu s fázovým detektorem typu XOR i hranový. Filtr dolní propusti je možné volit ze dvou typů, viz celkové zapojení na obrázku T.1.



© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

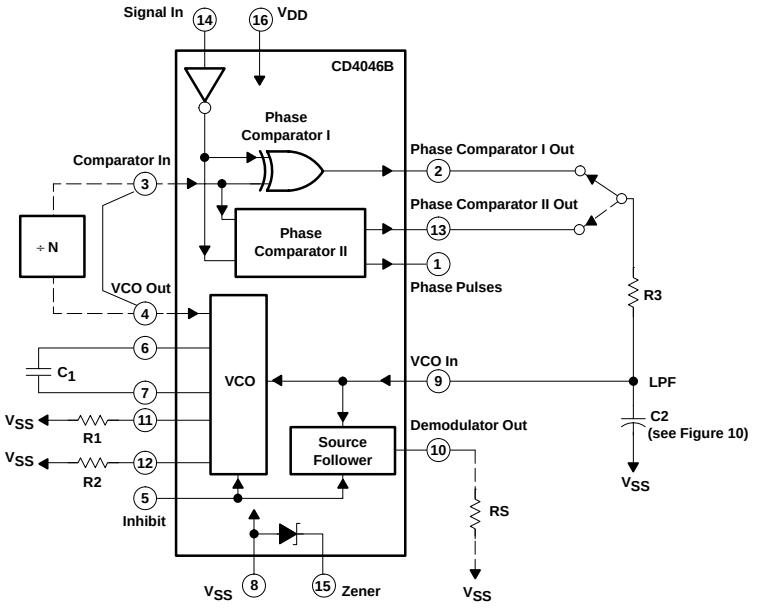


Obrázek T.1: Kompletní zapojení laboratorního fázového závěsu.

T.1. Postup a cíle měření na fázovém závěsu

- Seznamte se s funkcí a vlastnostmi integrovaného fázového závěsu 4046, viz datasheet.
- Určete prvky FZ tak aby $f_{min} = 5\,\mathrm{kHz}$, $f_{max} = 35\,\mathrm{kHz}$ ($f_m = 20\,\mathrm{kHz}$) a $f_C = \pm 3\,\mathrm{kHz}$ pro oba typy filtrů.
- Změřte charakteristiku VCO (zkontrolujte f_{min} a f_{max} a „saturaci“ $\doteq 0{,}9\,\mathrm{V}$),
- Sestavte kompletní FZ, ověřte jeho funkci a změřte pásmo zachycení a držení pro FD EXOR a oba typy filtrů ($C = 33\,\mathrm{nF}$ a u prvního typu filtru i $C = 2 \times 33\,\mathrm{nF}$). Sledujte na osciloskopu signál na vstupu výstupu FZ a dále řídící napětí VCO (pin B4). Lze měřit i převodní konstantu FD, kde $\Delta\varphi$ je třeba měřit např. osciloskopem.
- Zjistěte citlivost na střídu vstupního signálu a zachycení FZ na vyšší harmonické a subharmonické vstupního signálu.
- Proveďte stejné měření i při použití hranově řízeného FD.
- Pro FZ s fázovým detektorem XOR se dále pokuste se modulovat vstupní signál FM modulací obdélníkovým signálem (dle možností generátoru) a sledovat změny kmitočtu výstupního signálu, resp. řídícího signálu VCO pro oba typy filtrů (mají různé činitele jakosti Q).
- Ověřte funkci FZ s použitým děličem $f/10$ za VCO, používejte jednoduchý R-C filtr ($C = 66\,\mathrm{nF}$).

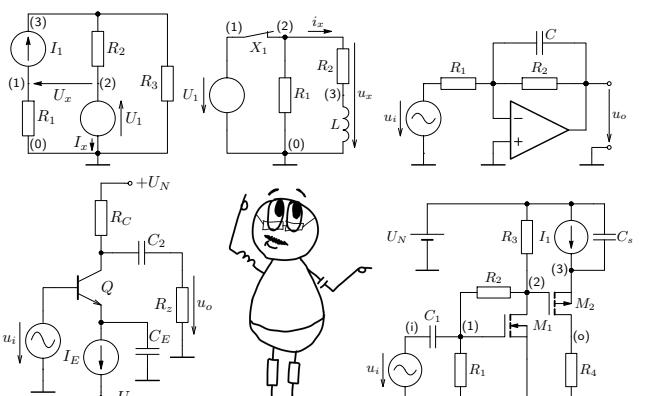
Oscilátor je možné určit dle nomogramů z datasheetu, případně v aplikačním listu integrovaného obvodu nebo je možné hodnoty prvků určit pomocí vztahů a konstant podle následujícího příkladu výpočtu, kde je uveden návrh FZ s obvodem 4046.



Obrázek T.2: Blokový diagram IO 4046.

Dodatek U
Příklady k procvičení

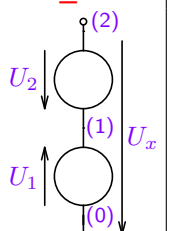
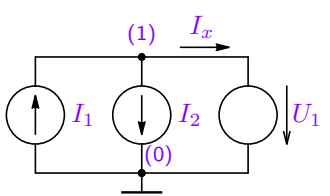
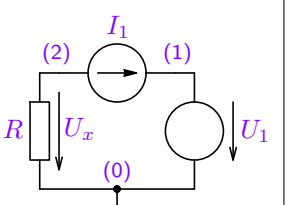
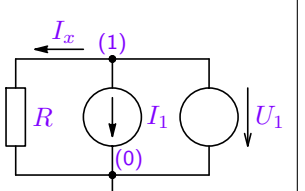
Tento dodatek je souborem příkladů pro procvičení řešení vybraných úloh základů elektrických a elektronických obvodů a systémů. Jednotlivé části tohoto souboru se vztahují k problematice vysvětlované v předchozích kapitolách následujícím způsobem: příklady v části U.1 se vztahují ke kapitole 2, příklady části U.2 ke kapitole 11, příklady části U.3 ke kapitole 4, příklady části U.4 a U.5.3 ke kapitole 5, příklady části U.6 ke kapitolám 7 a 8, příklady části U.7 ke kapitole 3, příklady části U.8 ke kapitole 15 a příklady části U.9 se vztahují ke kapitole 16. Výsledky lze ověřit v simulátoru GEEC.



U.1. Obvody pro analýzu ve stejnosměrném ustáleném stavu

Zadání: Vypočítejte napětí U_x nebo proud I_x, pokud jsou známy hodnoty všech obvodových prvků (rezistorů a zdrojů). Předpokládejte, že všechny nezávislé zdroje mají pouze stejnosměrnou složku a obvody jsou v ustáleném stavu (obsahují-li akumulační prvky). Výsledky lze ověřovat v editoru GEEC kliknutím na obrázek.

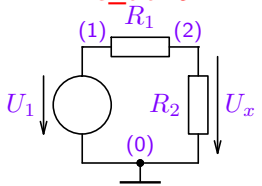
U.1.1. Elementární příklady

DC_elem1	DC_elem2	DC_elem3	DC_elem4
			
pokračování tabulky na další straně			

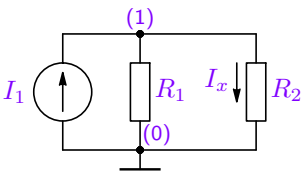
Tabulka U.1: Elementární obvody pro analýzu ve stejnosměrném ustáleném stavu.

pokračování tabulky z minulé strany

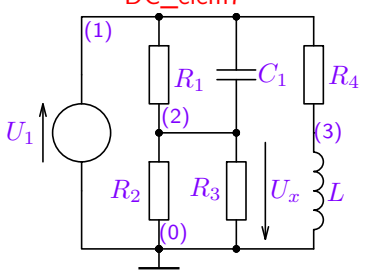
DC_elem5



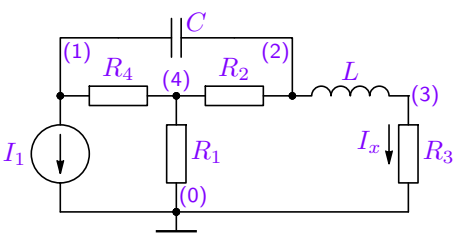
DC_elem6



DC_elem7



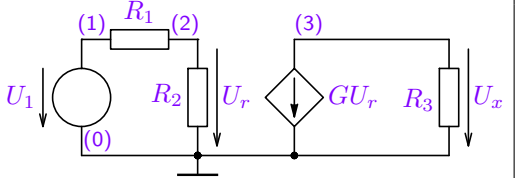
DC_elem8



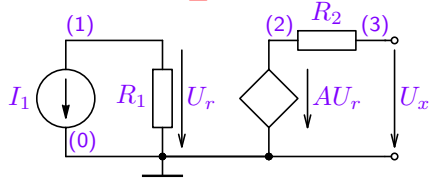
pokračování tabulky na další straně

pokračování tabulky z minulé strany

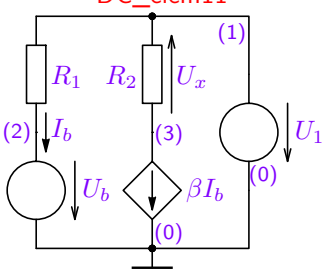
DC_elem9



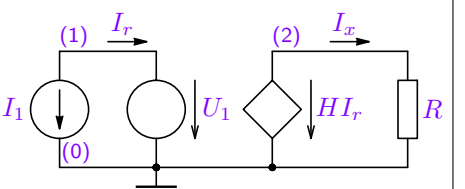
DC_elem10



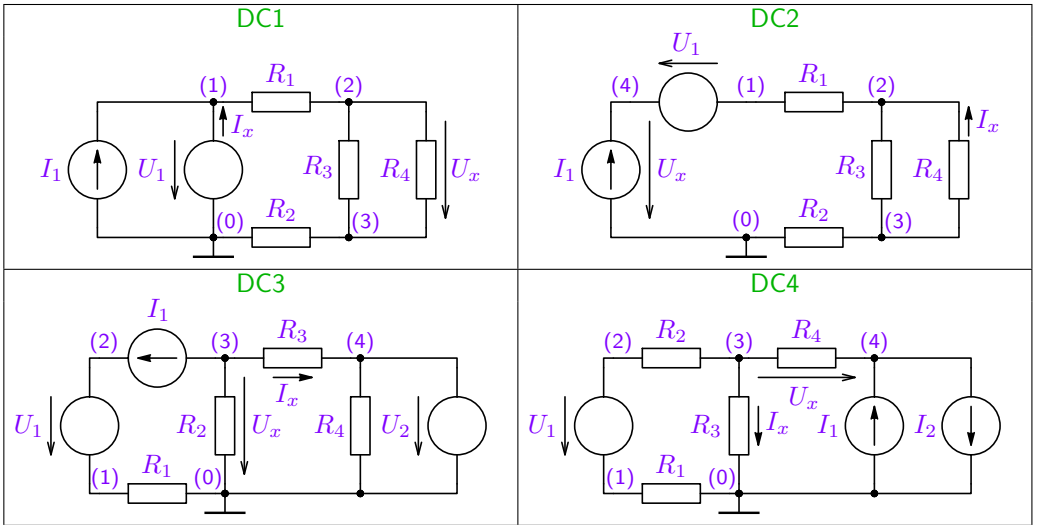
DC_elem11



DC_elem12



U.1.2. Jednoduché příklady

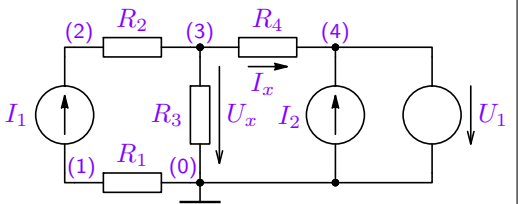


pokračování tabulky na další straně

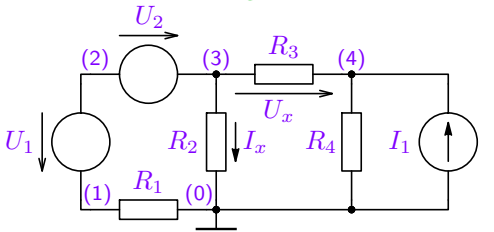
Tabulka U.2: Jednoduché obvody pro analýzu ve stejnosměrném ustáleném stavu.

pokračování tabulky z minulé strany

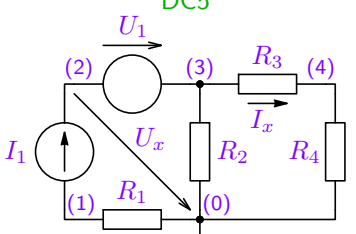
DC3



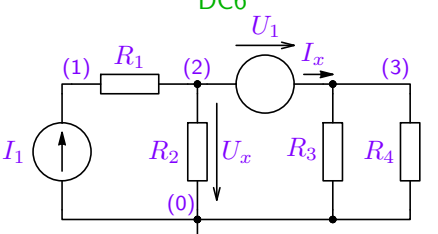
DC4



DC5



DC6

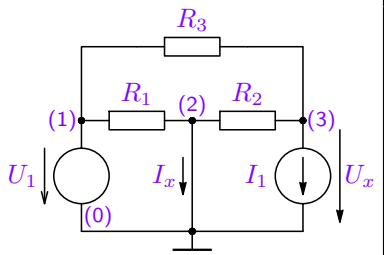


pokračování tabulky na další straně

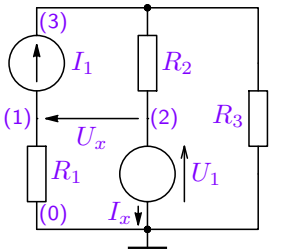
© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

pokračování tabulky z minulé strany

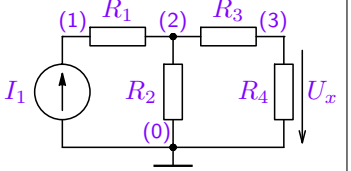
DC7



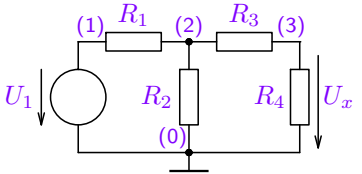
DC8



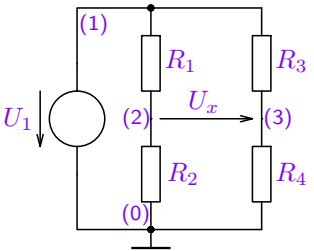
DC9



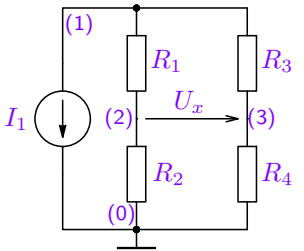
DC10



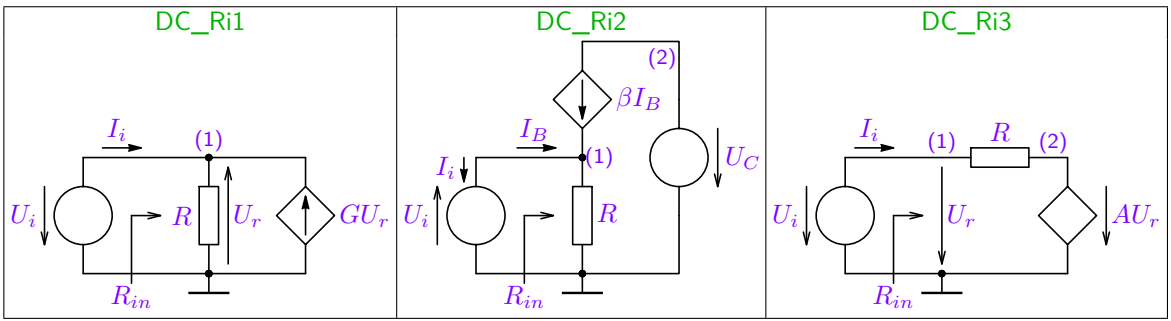
DC11



DC12



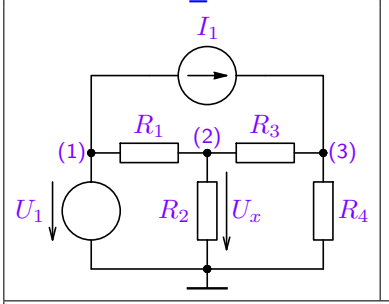
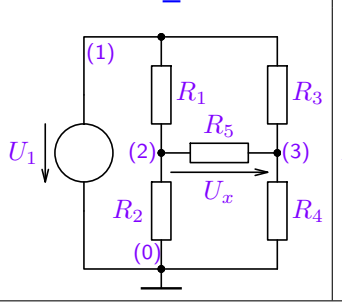
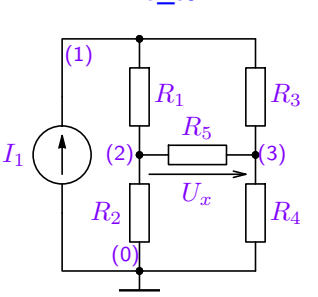
Zadání: Vypočítejte vstupní odpor jako podíl U_i/I_i, pokud jsou známy hodnoty všech obvodových prvků (rezistorů a zdrojů). Předpokládejte, že všechny nezávislé zdroje mají pouze stejnosměrnou složku a obvody jsou v ustáleném stavu (obsahují-li akumulační prvky). Výsledky lze ověřit v editoru GEEC kliknutím na obrázek.



Tabulka U.3: Jednoduché obvody pro výpočet vstupního odporu.

U.1.3. Složitější příklady

Zadání: Vypočítejte napětí U_x, resp. proud I_b nebo vstupní odpor jako podíl U_i/I_i (pro příklad DC_s8 jako $R_{in} = -U_b/I_b$ pro $U_1 = 0$), případně Theveninovo/Nortonovo náhradní zapojení na uvedených svorkách, pokud jsou známy hodnoty všech obvodových prvků (rezistorů a zdrojů). Výsledky lze ověřovat v editoru GEEC kliknutím na obrázek.

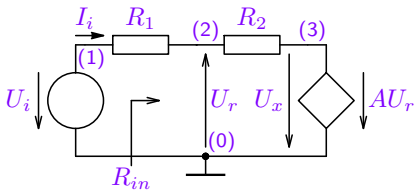
DC_s1	DC_s2	DC_s3
		
pokračování tabulky na další straně		

Tabulka U.4: Složitější obvody pro analýzu ve stejnosměrném ustáleném stavu.

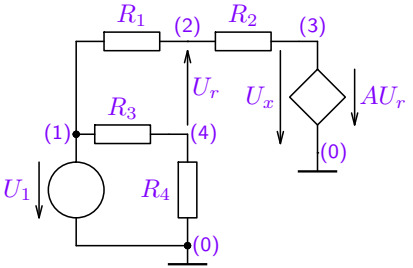
© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

pokračování tabulky z minulé strany

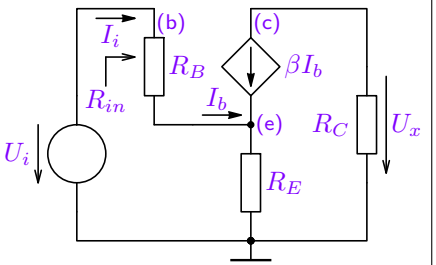
DC_s4



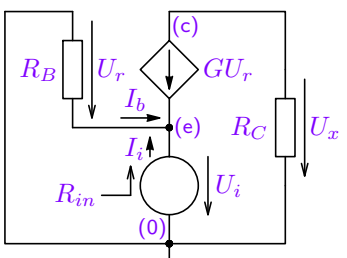
DC_s5



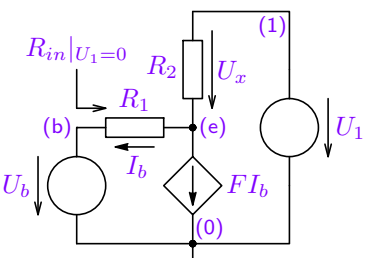
DC_s6



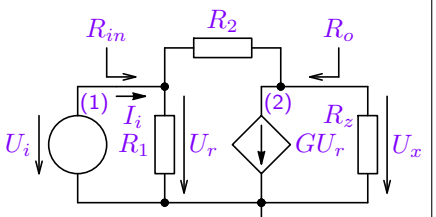
DC_s7



DC_s8

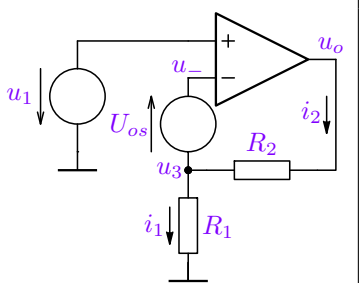
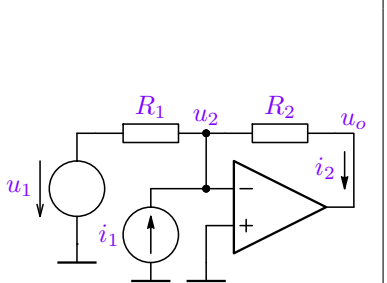
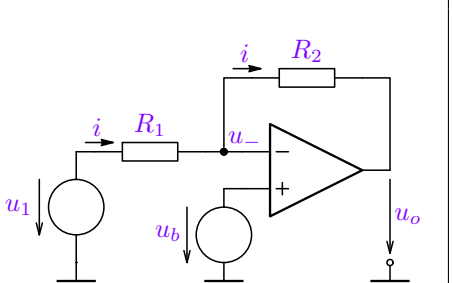


DC_s9



U.2. Základní zapojení s ideálním operačním zesilovačem

Zadání: Vypočítejte požadované obvodové veličiny následujících zapojení pro zadané hodnoty jednotlivých prvků, případně kmitočtovou charakteristiku u zapojení s akumulačními prvky. Uvažujte ideální operační zesilovač. Všechna uzlová napětí jsou vztažena k referenčnímu bodu.

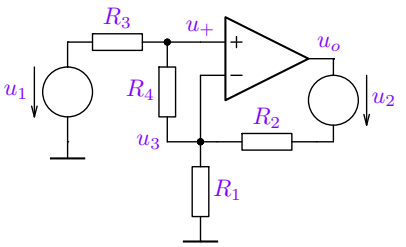
OZ1	OZ2	OZ3
		
pokračování tabulky na další straně		

Tabulka U.5: Příklady zapojení s operačním zesilovačem.

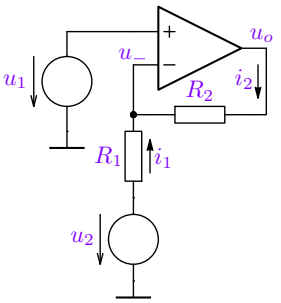
© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

pokračování tabulky z minulé strany

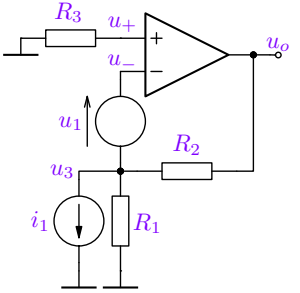
OZ4



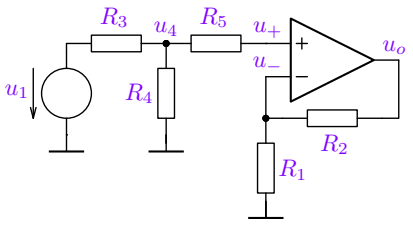
OZ5



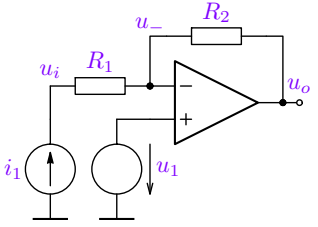
OZ6



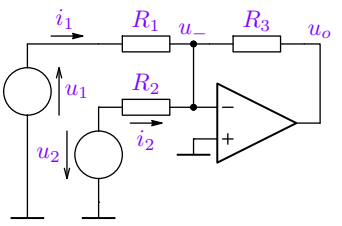
OZ7



OZ8



OZ9

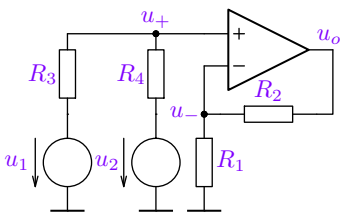


pokračování tabulky na další straně

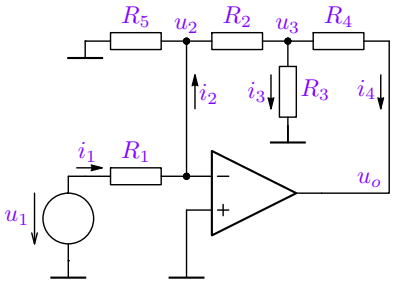
© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

pokračování tabulky z minulé strany

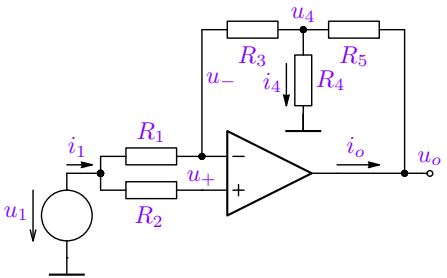
OZ10



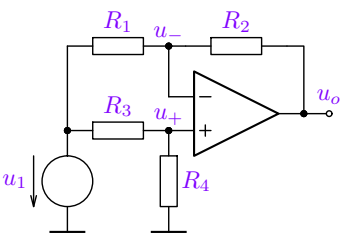
OZ11



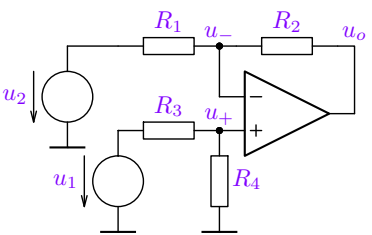
OZ12



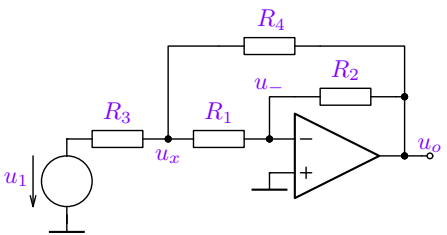
OZ13



OZ14



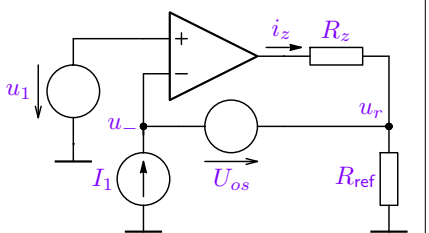
OZ15



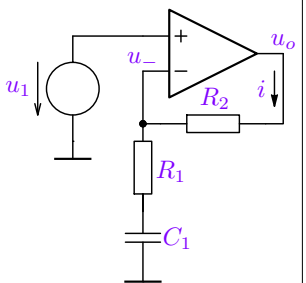
pokračování tabulky na další straně

pokračování tabulky z minulé strany

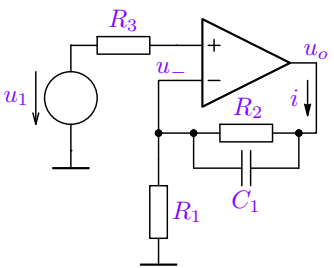
OZ16



OZ17



OZ18

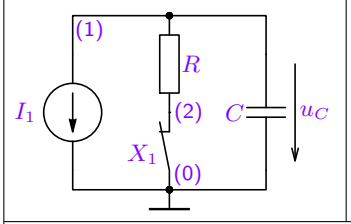
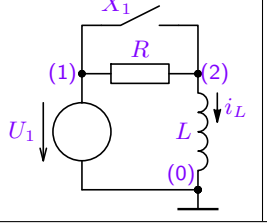
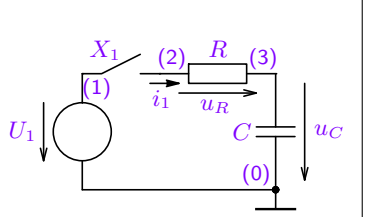


Pro střídavé složky obvodových veličin uvažujte v příkladech OZ17 a OZ18 susceptanci kapacitoru $\omega C_1 \to \infty$.

U.3. Obvody pro analýzu přechodných dějů

U.3.1. Elementární příklady

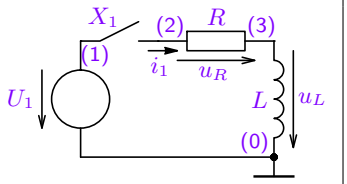
Zadání: Je zadán lineární obvod dle uvedeného obrázku. Obvod obsahuje pouze zdroje stejnosměrného napětí nebo proudu (konstantního časového průběhu) a je v ustáleném stavu pro $t < 0$. Určete všechny obvodové veličiny jako časové funkce pro $t \geq 0$ pro zadané hodnoty obvodových prvků, pokud v čase $t = 0$ dojde ke změně stavu spínače X_1 (sepnutí, rozepnutí nebo přepnutí). Výsledky lze ověřovat v editoru GEEC kliknutím na obrázek.

TR1	TR2	TR3
		
pokračování tabulky na další straně		

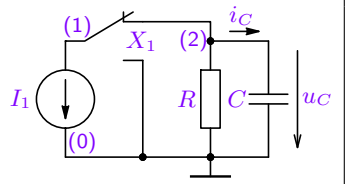
Tabulka U.6: Elementární obvody pro analýzu přechodných dějů.

pokračování tabulky z minulé strany

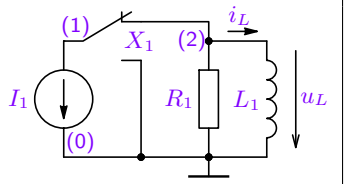
TR4



TR5



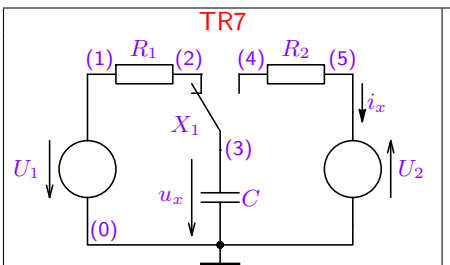
TR6



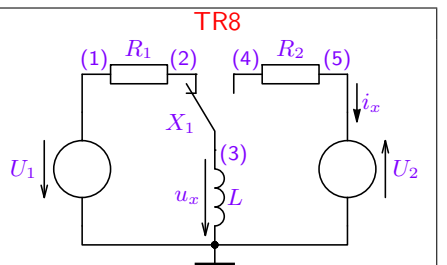
U.3.2. Jednoduché příklady

Zadání: Určete napětí $u_x(t)$ a proud $i_x(t)$ jako časové funkce pro $t \geq 0$ pro zadané hodnoty obvodových prvků, pokud v čase $t = 0$, kdy byl obvod v ustáleném stavu, dojde ke změně stavu spínače X_1 (sepnutí, rozepnutí nebo přepnutí). Výsledky lze ověřovat v editoru GEEC.

TR7



TR8



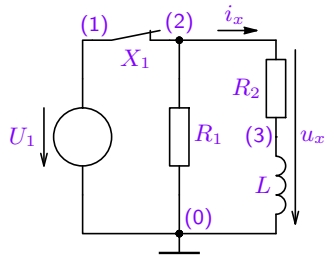
pokračování tabulky na další straně

Tabulka U.7: Jednoduché obvody pro analýzu přechodných dějů.

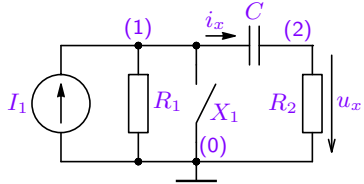
© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

pokračování tabulky z minulé strany

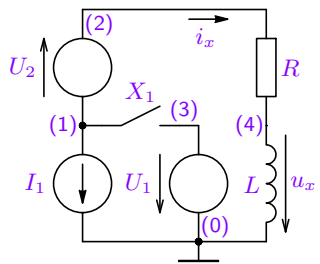
TR9



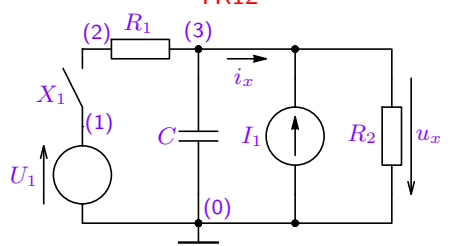
TR10



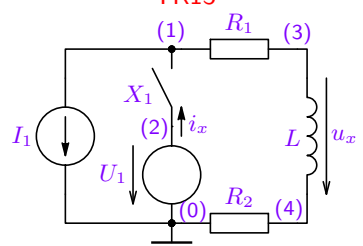
TR11



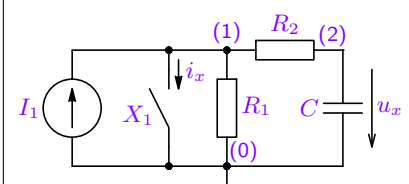
TR12



TR13

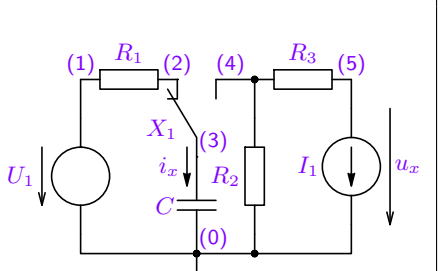
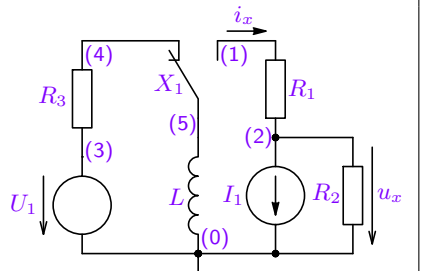


TR14



U.3.3. Složitější příklady obvodů 1. řádu

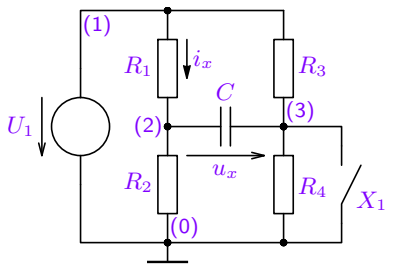
Zadání: Je zadán lineární obvod dle uvedeného obrázku. Obvod obsahuje pouze zdroje stejnosměrného napětí nebo proudu (konstantního časového průběhu) a je v ustáleném stavu pro $t < 0$. Určete napětí $u_x(t)$ a proud $i_x(t)$ jako časové funkce pro $t \geq 0$ pro zadané hodnoty obvodových prvků, pokud v čase $t = 0$ dojde ke změně stavu spínače X_1 (sepnutí, rozepnutí nebo přepnutí). Výsledky lze ověřovat v editoru GEEC kliknutím na obrázek.

TRs1	TRs2
	
pokračování tabulky na další straně	

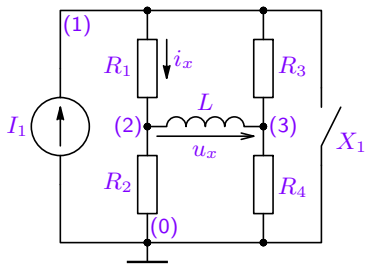
Tabulka U.8: Složitější obvody pro analýzu přechodných dějů.

pokračování tabulky z minulé strany

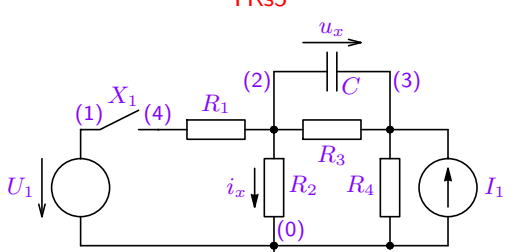
TRs3



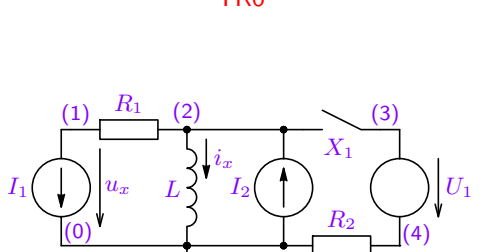
TRs4



TRs5

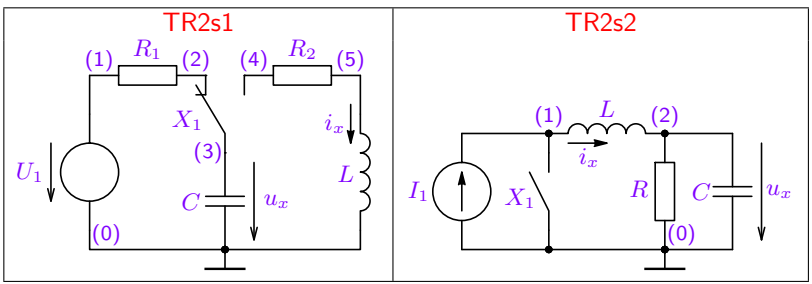


TR6



U.3.4. Příklady elementárních obvodů 2. řádu

Zadání: Je zadán lineární obvod dle uvedeného obrázku. Obvod obsahuje pouze zdroje stejnosměrného napětí nebo proudu (konstantního časového průběhu) a je v ustáleném stavu pro $t < 0$. Určete napětí $u_x(t)$ a proud $i_x(t)$ jako časové funkce pro $t \geq 0$ pro zadané hodnoty obvodových prvků, pokud v čase $t = 0$ dojde ke změně stavu spínače X_1 (sepnutí, rozepnutí nebo přepnutí). Výsledky lze ověřovat v editoru GEEC kliknutím na obrázek.

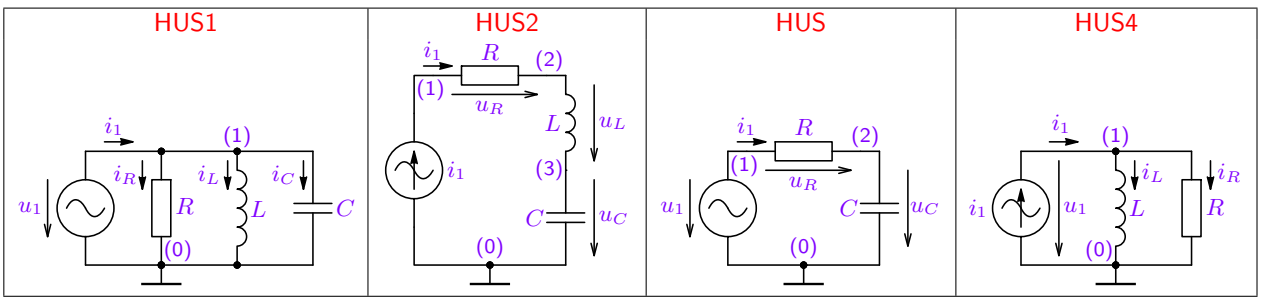


Tabulka U.9: Příklady elementárních obvodů 2. řádu pro analýzu přechodných dějů.

U.4. Obvody pro analýzu v harmonickém ustáleném stavu

Zadání: Je zadán lineární obvod dle uvedeného obrázku buzený harmonickým zdrojem (zdroj signálu s harmonickým časovým průběhem). Určete všechny obvodové veličiny jako fázory i časové funkce v ustáleném stavu (HUS) pro zadané hodnoty obvodových prvků. Výsledky lze ověřovat v editoru GEEC kliknutím na obrázek.

U.4.1. Elementární příklady

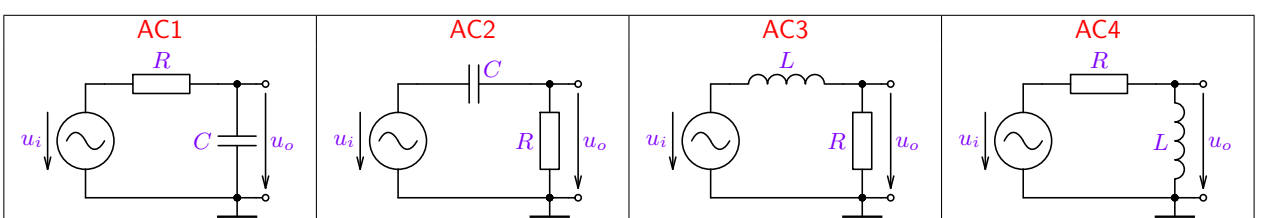


Tabulka U.10: Elementární obvody pro analýzu v harmonickém ustáleném stavu.

U.5. Obvody v harmonickém ustáleném stavu – kmitočtové charakteristiky

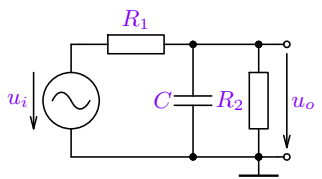
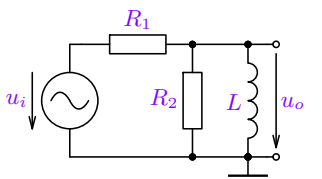
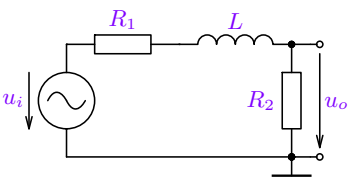
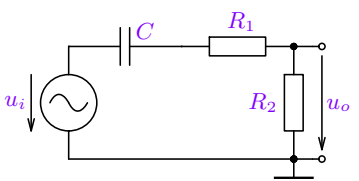
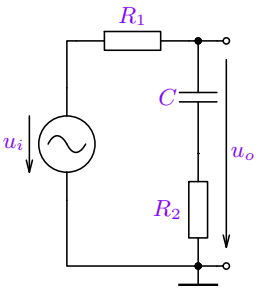
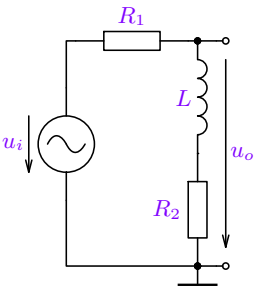
Zadání: Je zadán lineární obvod dle uvedeného obrázku. Určete obecně přenos obvodu $H(s) = U_o(s)/U_1(s)$ a kmitočtovou charakteristiku $H(j\omega)$, kterou vykreslete pomocí Bodeho aproximace (modulovou i fázovou) pro zadané hodnoty obvodových prvků. Z přenosu určete časový průběh výstupního napětí pokud bude zadáno vstupní napětí a výpočet ověřte odečtem z nakreslených charakteristik. Dále vypočítejte a vykreslete impulzní charakteristiku $h(t)$ a přechodovou charakteristiku $w(t)$, přičemž jejichž význačné body $h(0)$, $h(\infty)$, $w(0)$ a $w(\infty)$ ověřte z přenosu pomocí vět o koncové a počáteční hodnotě. Výsledky lze ověřovat v editoru GEEC kliknutím na obrázek.

U.5.1. Elementární příklady



Tabulka U.11: Elementární obvody pro analýzu v harmonickém ustáleném stavu a přenosových charakteristik.

U.5.2. Jednoduché příklady RC a RL obvodů

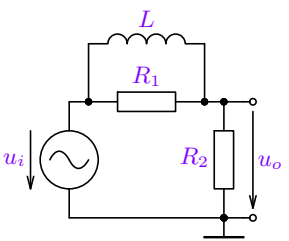
AC5 	AC6 	AC7 
AC8 	AC9 	AC10 
pokračování tabulky na další straně		

Tabulka U.12: Jednoduché obvody pro analýzu v harmonickém ustáleném stavu a přenosových charakteristik.

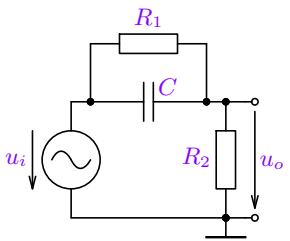
© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

pokračování tabulky z minulé strany

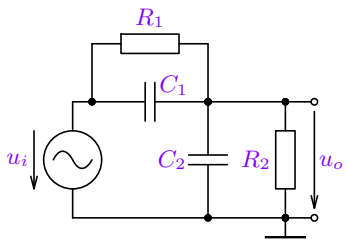
AC11



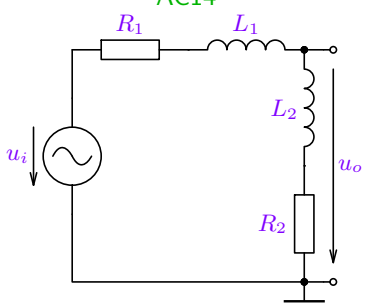
AC12



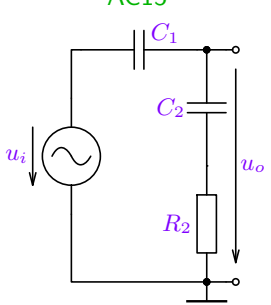
AC13



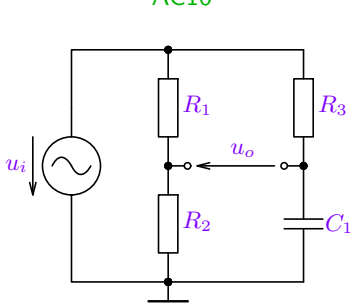
AC14



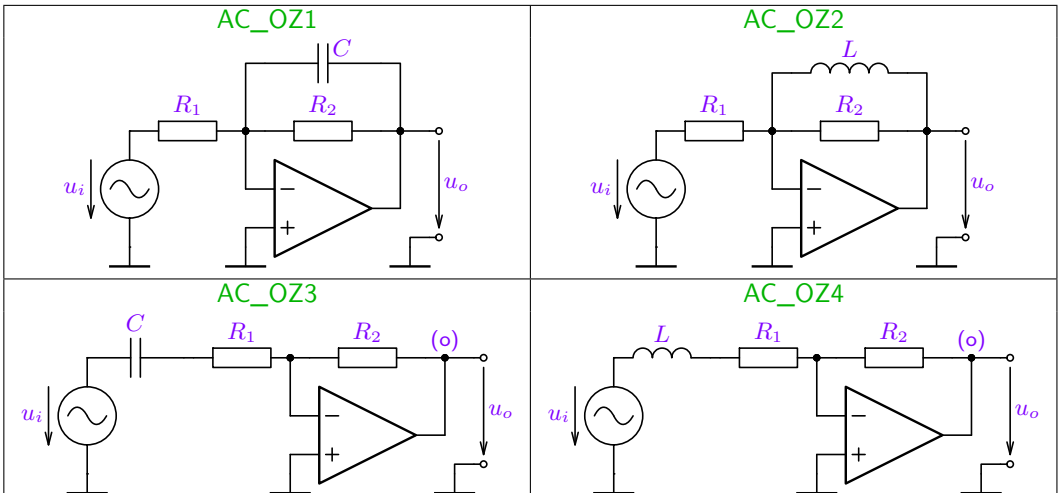
AC15



AC16



U.5.3. Jednoduché příklady obvodů s ideálními operačními zesilovači

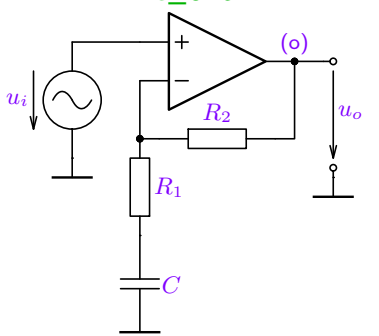


pokračování tabulky na další straně

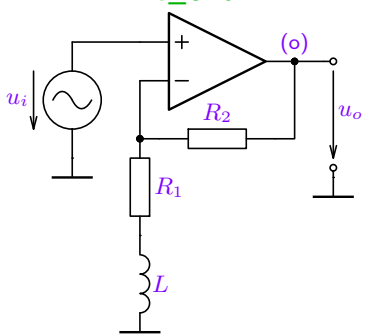
Tabulka U.13: Obvody s ideálními OZ pro analýzu v harmonickém ustáleném stavu a přenosových charakteristik.

pokračování tabulky z minulé strany

AC_OZ5



AC_OZ6

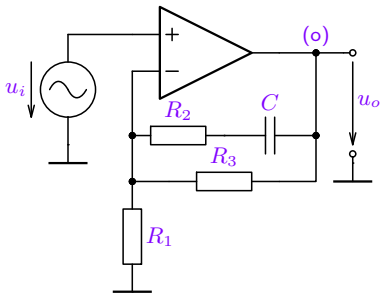


pokračování tabulky na další straně

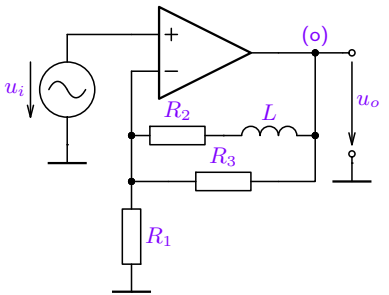
© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

pokračování tabulky z minulé strany

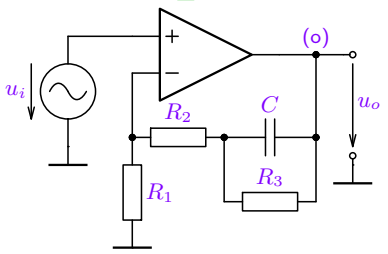
AC_OZ7



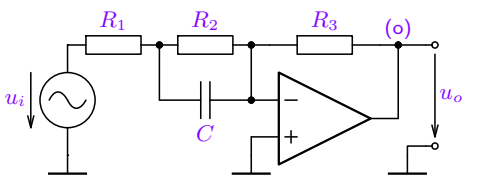
AC_OZ8



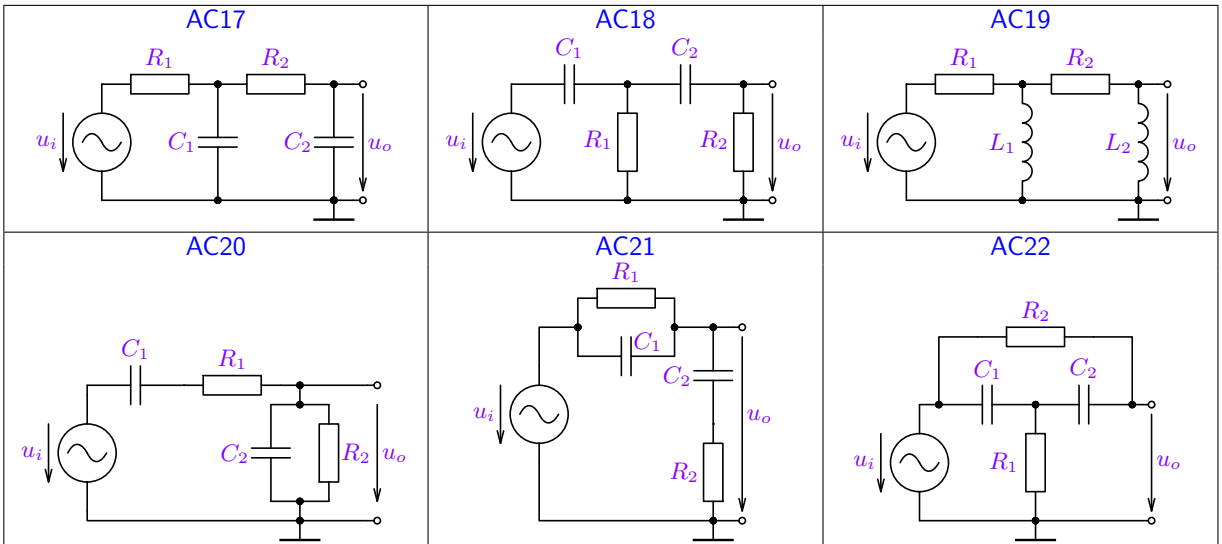
AC_OZ9



AC_OZ10

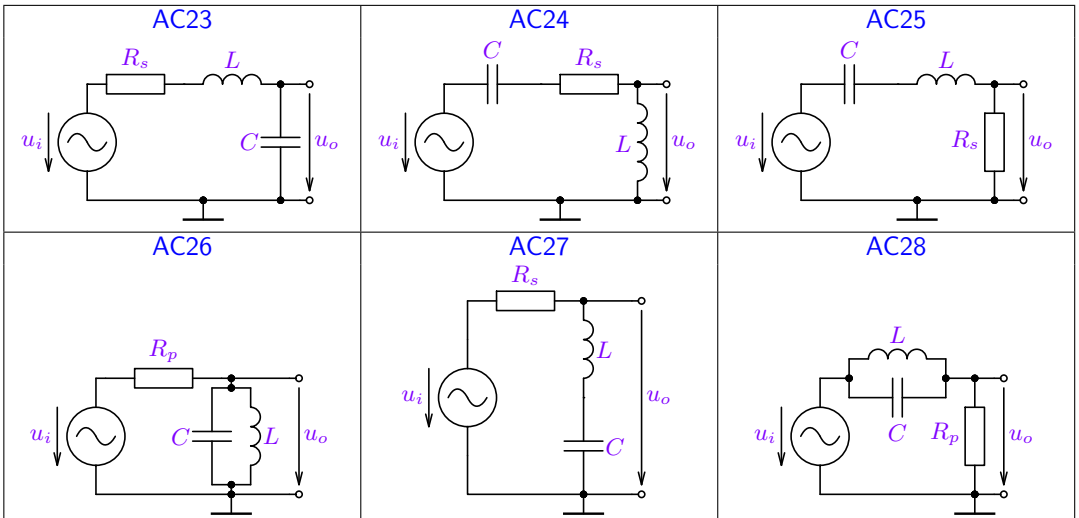


U.5.4. Složitější příklady RC a RL obvodů



Tabulka U.14: Složitější obvody pro analýzu v harmonickém ustáleném stavu a přenosových charakteristik.

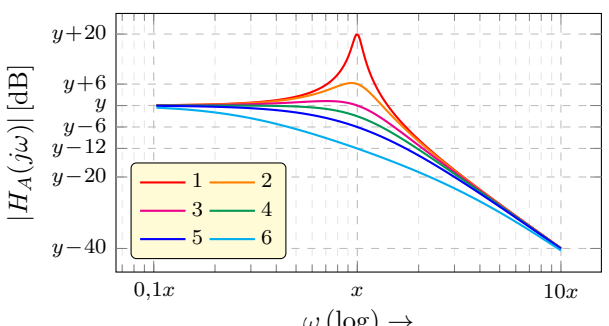
U.5.5. Příklady s rezonančními obvody

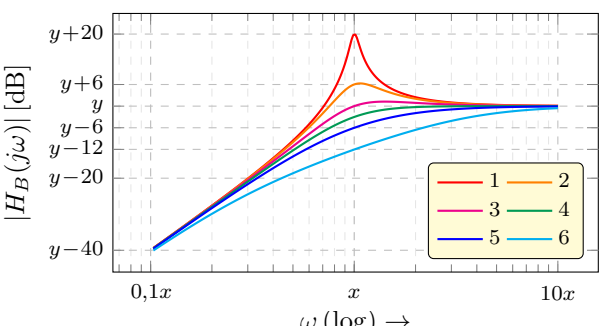


Tabulka U.15: Obvody s rezonančními obvody pro analýzu v harmonickém ustáleném stavu a přenosových charakteristik.

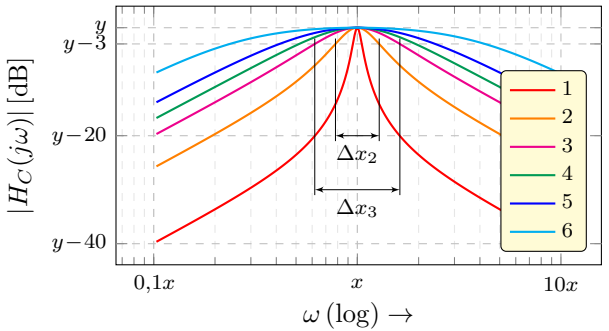
U.6. Přenosové charakteristiky základních systémů/filtrů

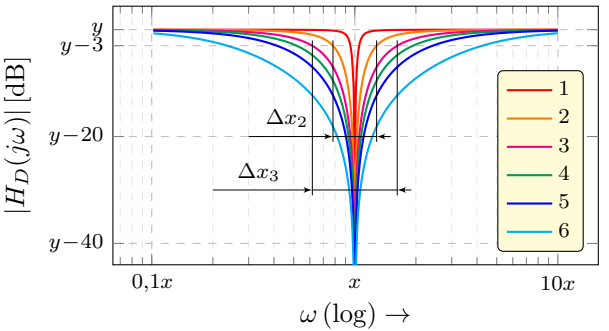
Zadání: Následující obrázky ukazují různé charakteristiky lineárních systémů 2. řádu. K vybrané amplitudové charakteristice (např. $|H_{B3}(j\omega)|$) napište odpovídající přenosovou funkci $H_{B3}(s)$ systému včetně numerických hodnot (pro tzv. eliptické přenosové funkce přibližně). Bude zadán kmitočet $x\,[\mathrm{rad/s}]$, násobná konstanta $y\,[\mathrm{dB}]$ a zda se jedná o neinvertující nebo invertující systém (násobná konstanta je kladná nebo záporná). Dále k danému systému, resp. charakteristice $|H_?(j\omega)|$ přiřaďte ostatní odpovídající charakteristiky, tj. fázovou $\varphi_{H_?}(j\omega)$, přechodovou $w_?(t)$ a impulzní $h_?(t)$ charakteristiku i grafické vyjádření polohy pólů a nul přenosové funkce v komplexní rovině PZ?. Určete periodu T, případně konstantu K a nakreslete také možnou obvodovou RLC realizaci, která by odpovídala násobné konstantě $y = 0\,[\mathrm{dB}]$. Výsledky lze ověřit v GEEC jak pro základní, tak pro tzv. eliptické přenosové funkce.

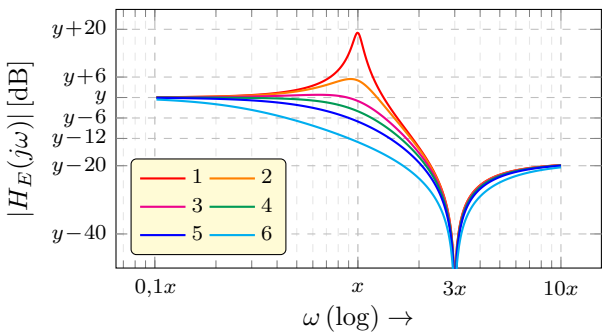


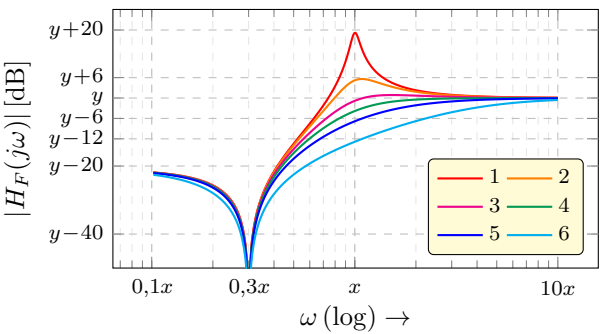


© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

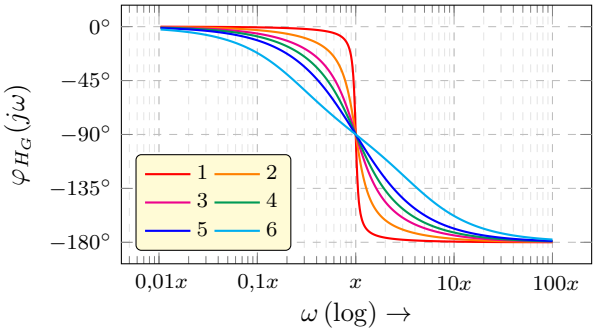


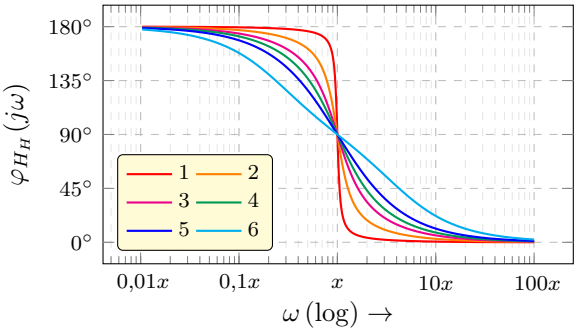


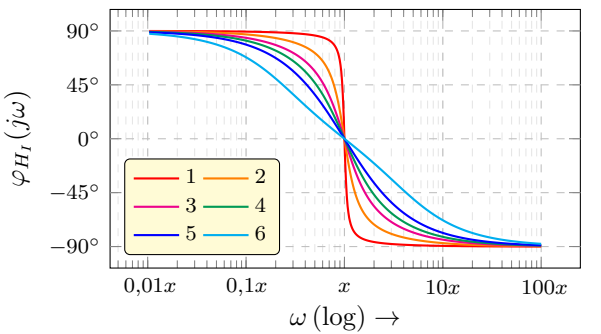


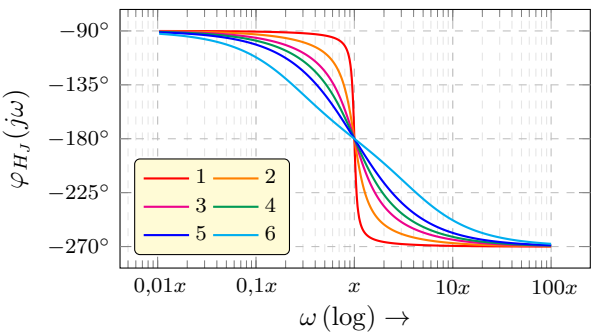


© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

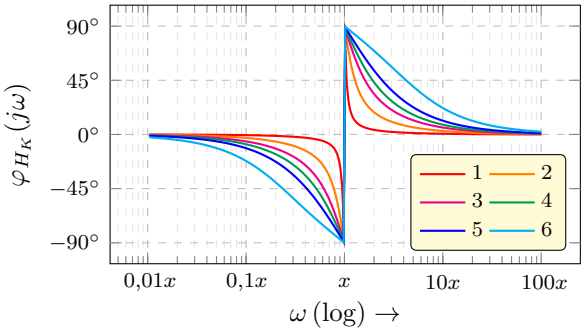


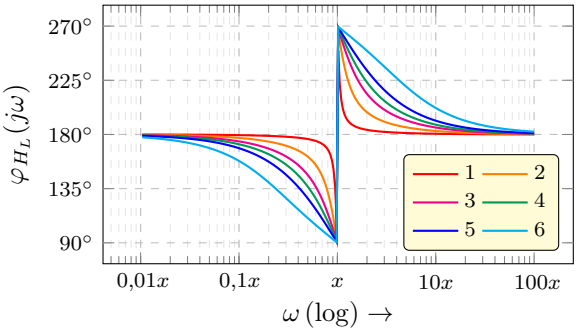


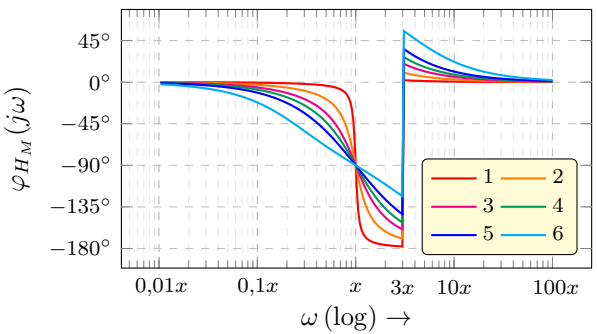


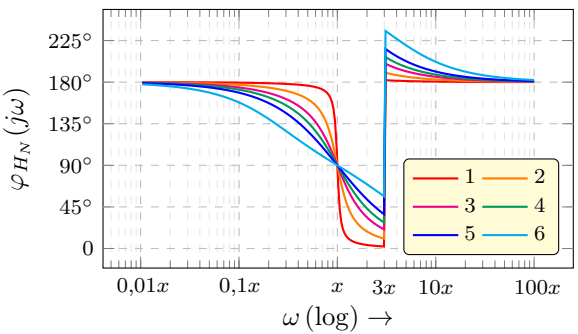


© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

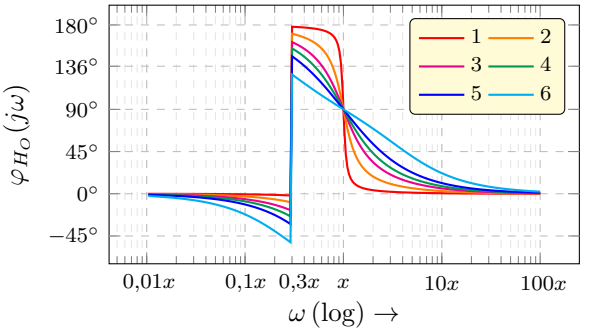


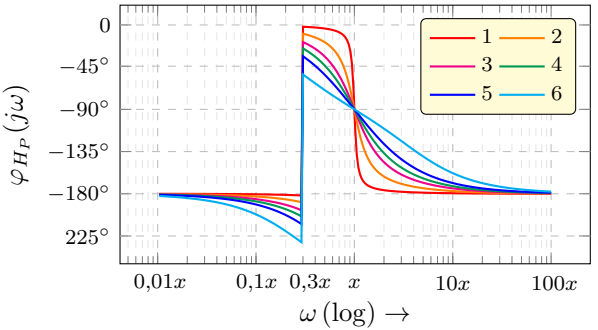


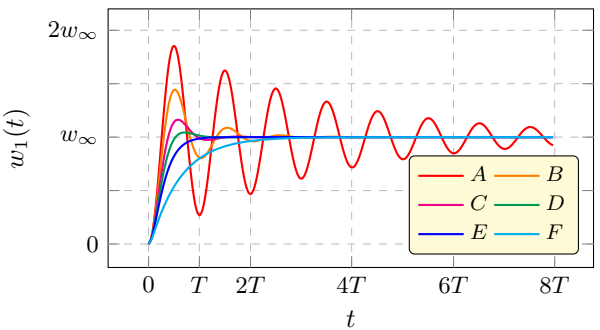


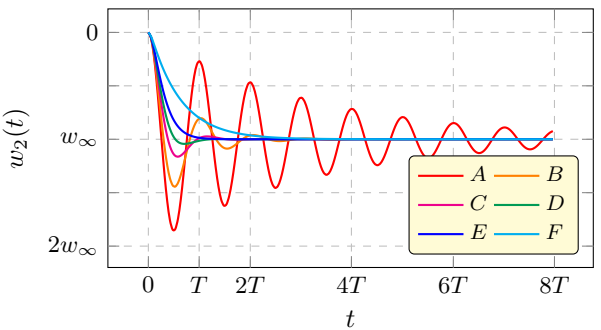


© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

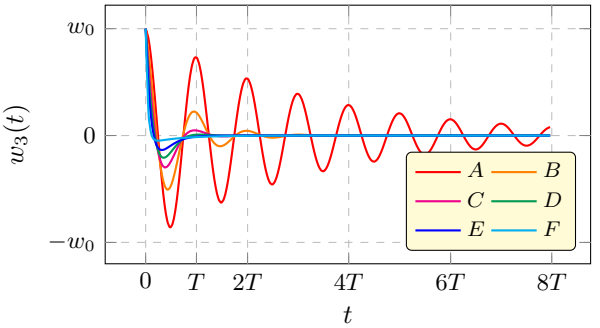


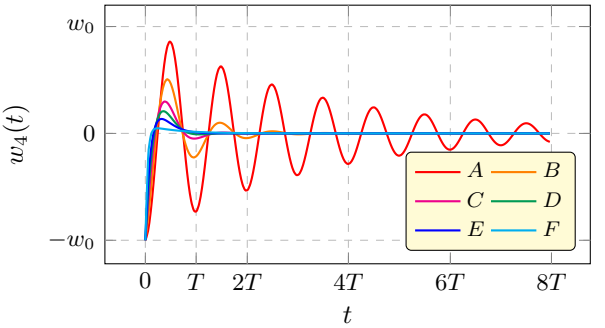


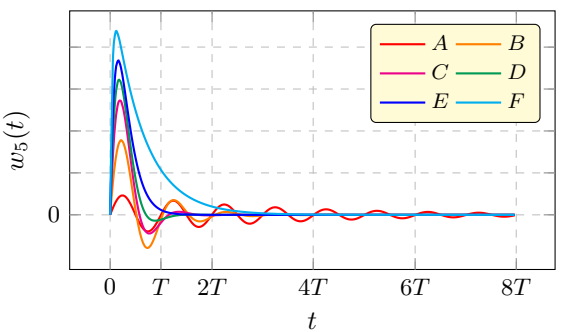


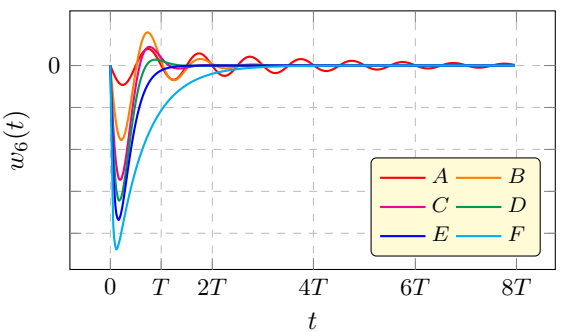


© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

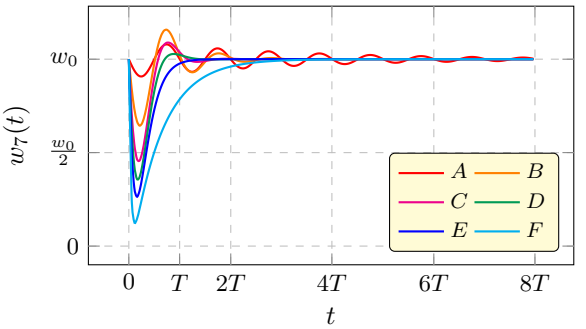


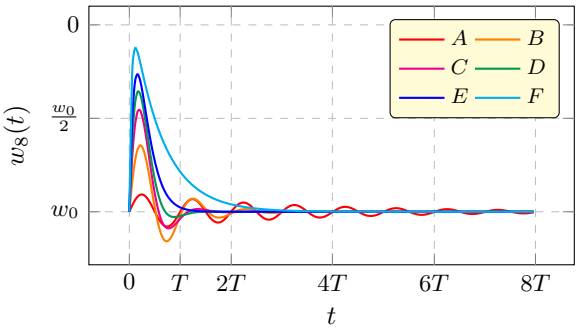


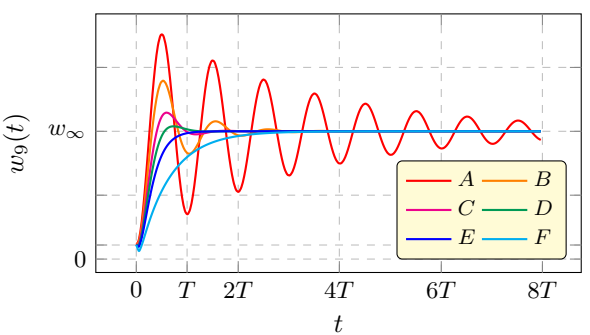


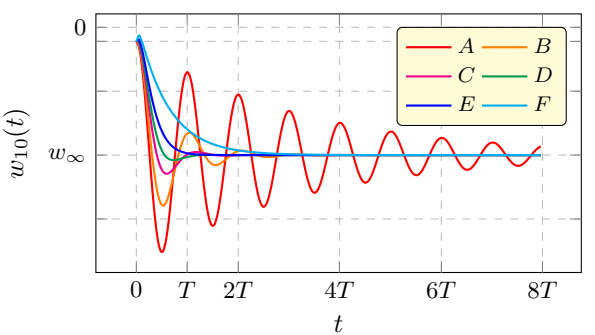


© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

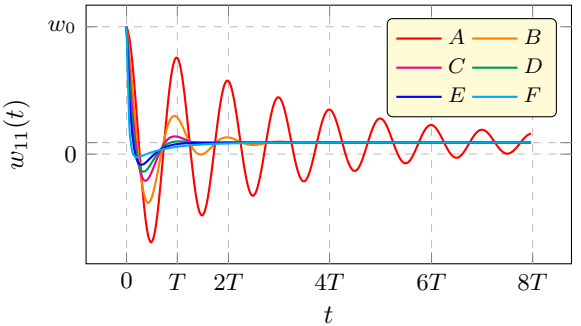


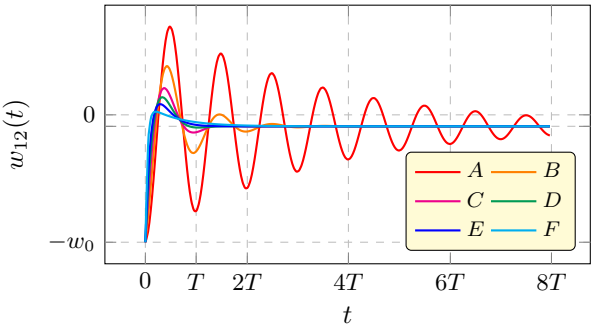


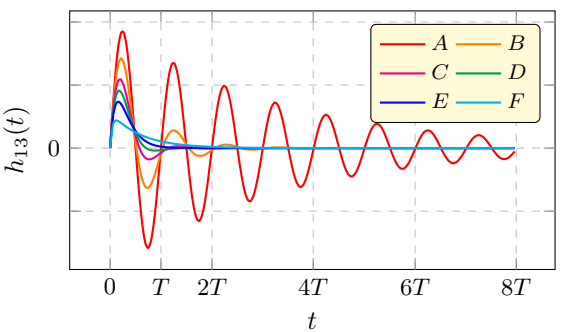


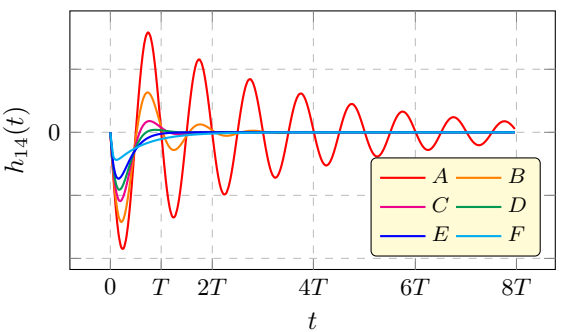


© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

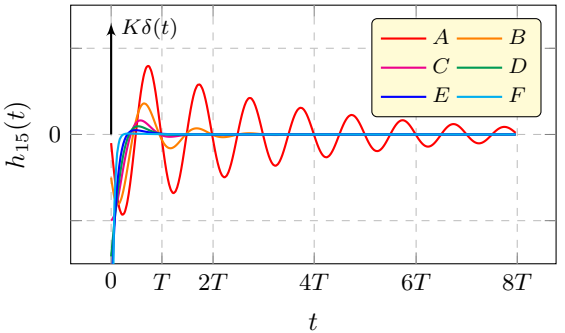


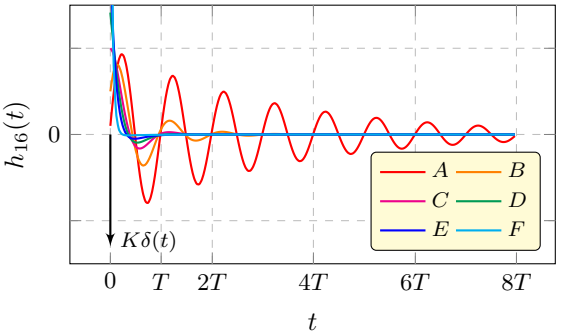


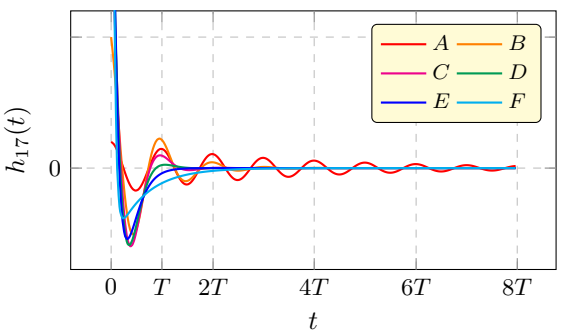


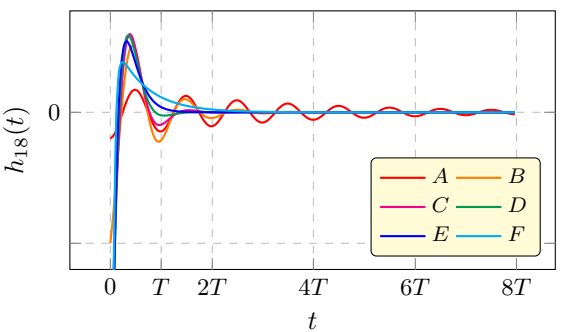


© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

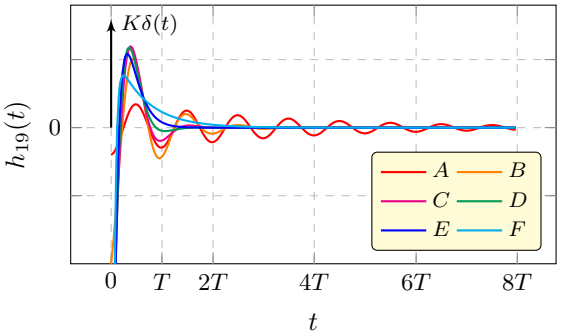


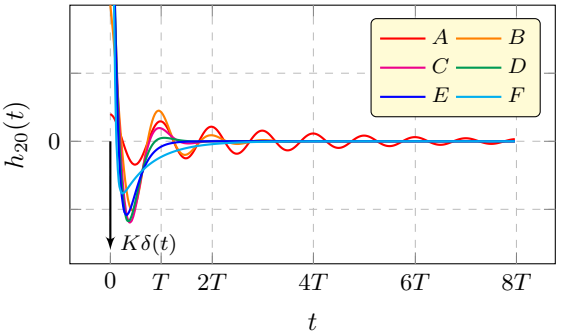


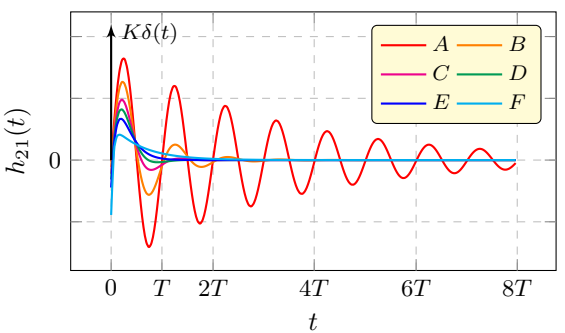


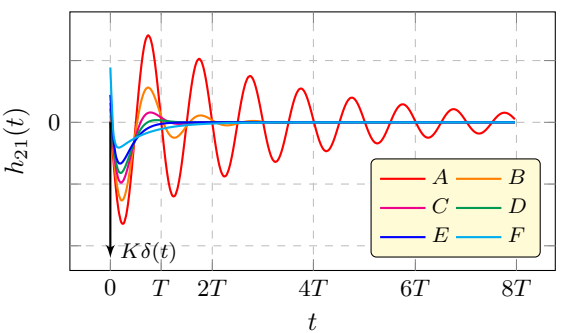


© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

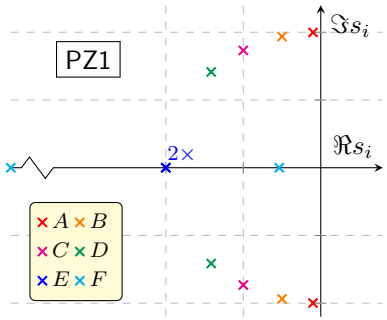


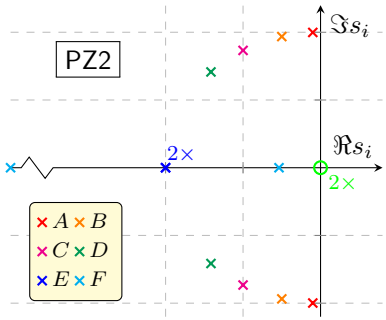


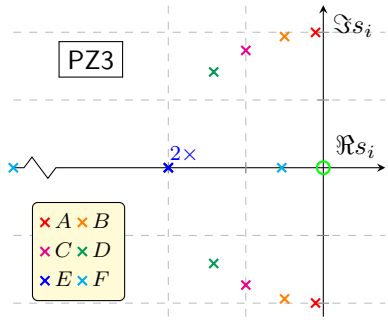


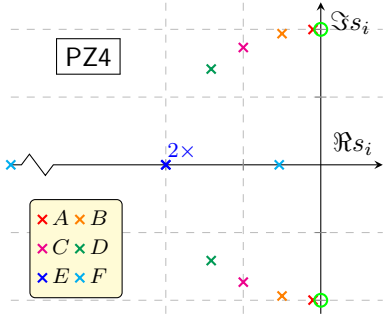


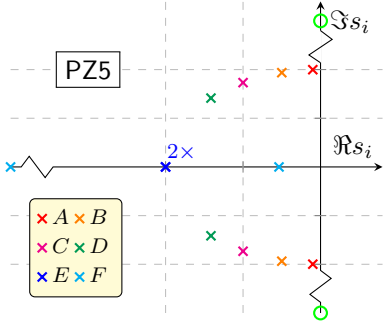
© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

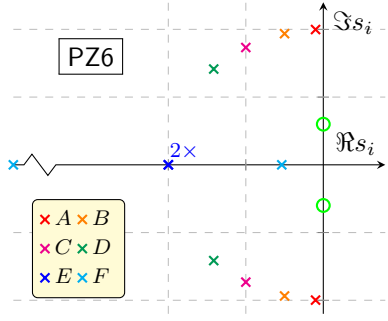








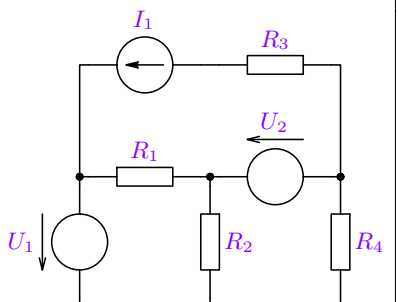
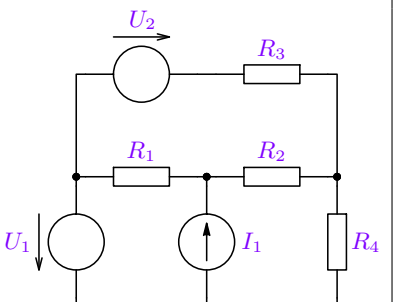
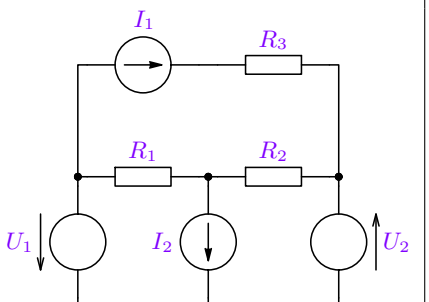




U.7. Příklady na sestavování obvodových rovnic

Zadání: Určete počty obvodových rovnic potřebných pro popis daného zapojení pomocí Metody uzlových napětí (MUN) a Metody smyčkových proudů (MSP). Zapojení popište rovnicemi metody, která vede na menší počet rovnic. V případě stejného počtu rovnic metodu libovolně zvolte. Řešení – viz. odkazy z obrázků na GEEC.

U.7.1. Odporové obvody ve stejnosměrném ustáleném stavu

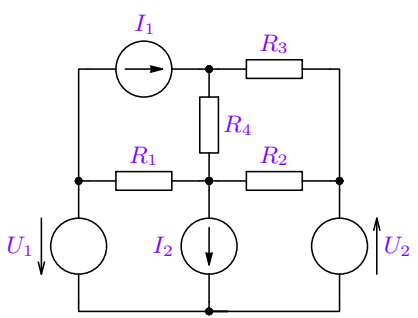
OR1	OR2	OR3
		
pokračování tabulky na další straně		

Tabulka U.16: Příklady zapojení pro sestavování obvodových rovnic ve SUS.

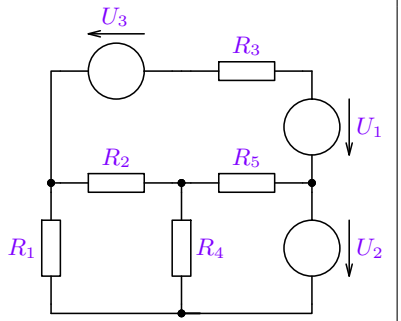
Zapojení jsou zadány do aplikace GEEC, kde jsou řešeny. Jednotlivé rovnice jsou sestaveny, řešeny a výsledky porovnány s výsledky simulátoru, viz. odkazy po kliknutí na daný obvod.

pokračování tabulky z minulé strany

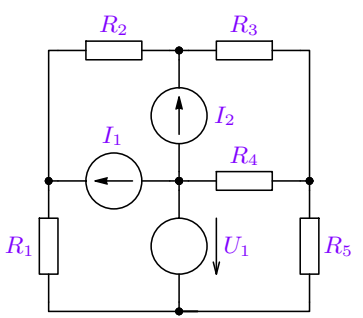
OR4



OR5



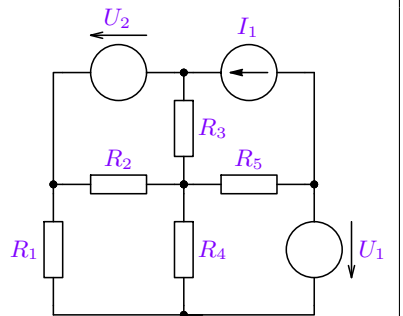
OR6



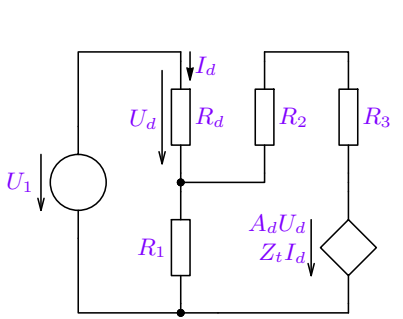
pokračování tabulky na další straně

pokračování tabulky z minulé strany

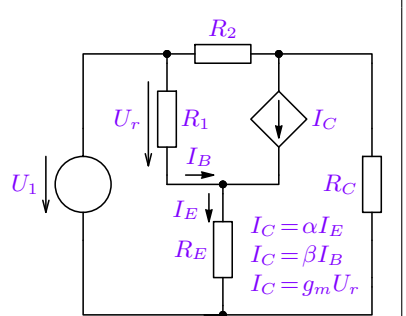
OR7



OR8

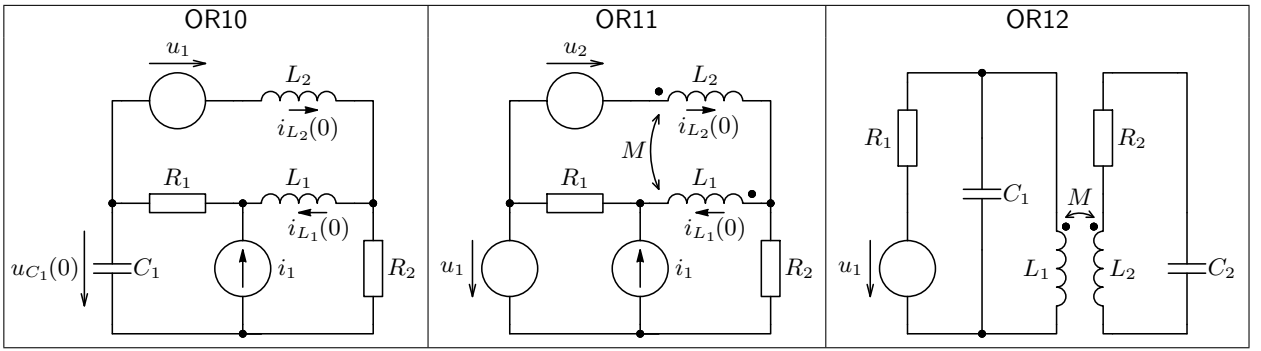


OR9



U zapojení s řízenými zdroji jsou u řízeného zdroje uvedeny různé možnosti řízení (proudem či napětím). Vyberte jednu z variant. Zapojeni OR9 řešte i bez rezistoru R_2.

U.7.2. Obvody buzené časově proměnnými signály



Tabulka U.17: Příklady zapojení pro sestavování obecných obvodových rovnic.

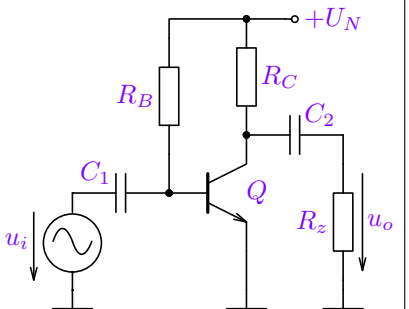
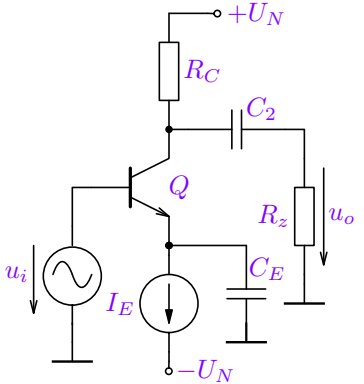
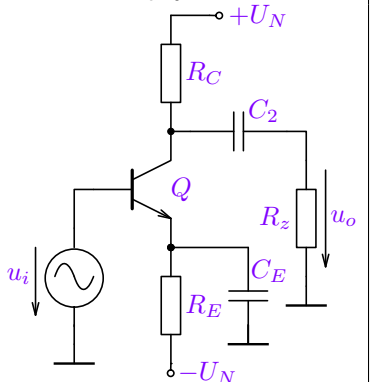
Tyto příklady již nejsou řešeny v GEEC, jelikož obecné řešení rovnic v časové oblasti je náročné, případně nelze obecně jednoznačně vyjádřit.

V případě vazby více než dvou induktorů je třeba znát a vyznačit orientaci pro každou vázanou dvojici induktorů zvlášť. Takové příklady přesahují rámec tohoto materiálu a uživatel je najde např. v [3].

U.8. Jednostupňové tranzistorové zesilovače

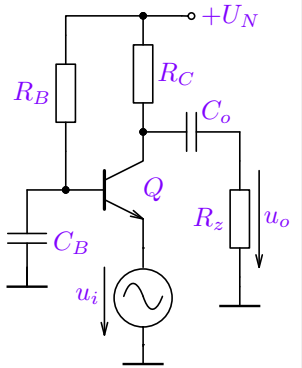
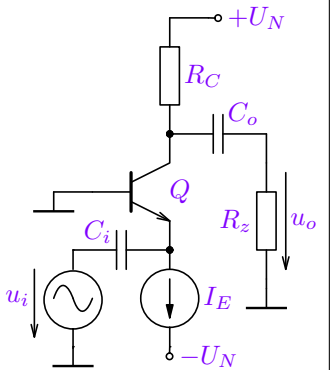
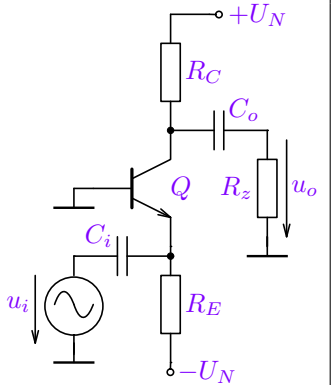
Zadání: Vypočítejte napěťové zesílení (naprázdno pro $R_z \to \infty$, případně i zatíženého zesilovače), vstupní a výstupní odpor a proudové zesílení nakrátko (pro $R_z = 0$) následujících zapojení jednostupňových tranzistorových zesilovačů pro malé změny obvodových veličin v SKP, pokud jsou známy hodnoty všech rezistorů, velikost napájecího napětí U_N a případného proudového zdroje I_E, resp. I_S a proudového zesilovacího činitele bipolárního tranzistoru β (nakrátko v zapojení SE), resp. parametry unipolárního tranzistoru (K_p, U_{TO} W a L). Vstupní signál uvažujte u_i, výstupní signál na výstupu s napětím u_o. Předpokládejte, že napájecí zdroje U_N a I_E, resp. I_S mají nulovou střídavou složku a budící střídavý zdroj u_i má naopak nulovou stejnosměrnou složku.

Následují tabulky s jednotlivými zapojeními rozdělené podle typu tranzistoru.

Zapojení 1	Zapojení 2	Zapojení 3
		
pokračování tabulky na další straně		

Tabulka U.18: Příklady jednostupňových zesilovačů s bipolárními tranzistory typu NPN.

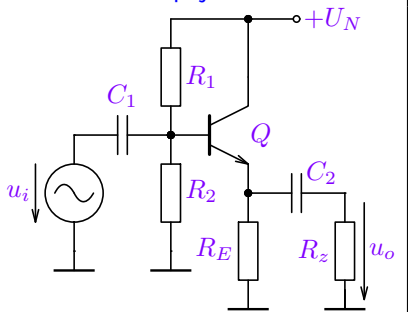
pokračování tabulky z minulé strany

Zapojení 4	Zapojení 5	Zapojení 6
		

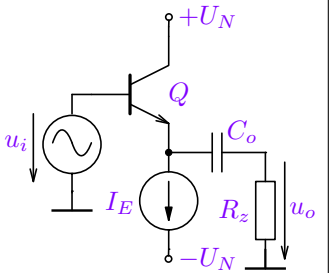
pokračování tabulky na další straně

pokračování tabulky z minulé strany

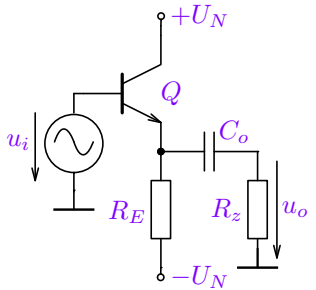
Zapojení 7



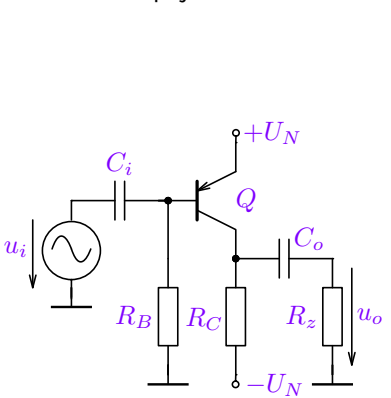
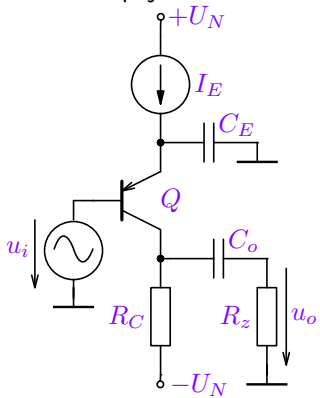
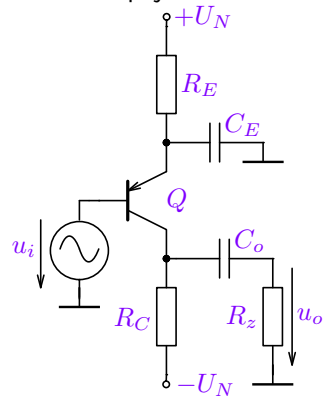
Zapojení 8



Zapojení 9



pokračování tabulky z minulé strany

Zapojení 11	Zapojení 12	Zapojení 13
		

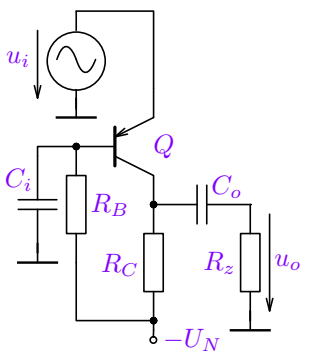
pokračování tabulky na další straně

Tabulka U.19: Příklady jednostupňových zesilovačů s bipolárními tranzistory typu PNP.

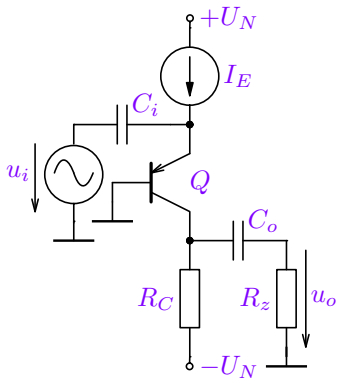
© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

pokračování tabulky z minulé strany

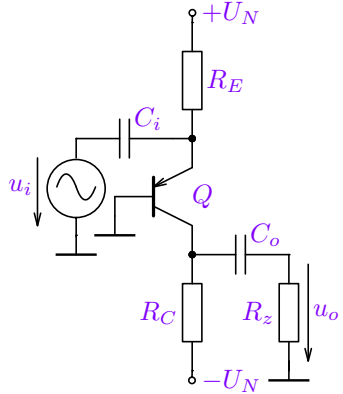
Zapojení 14



Zapojení 15



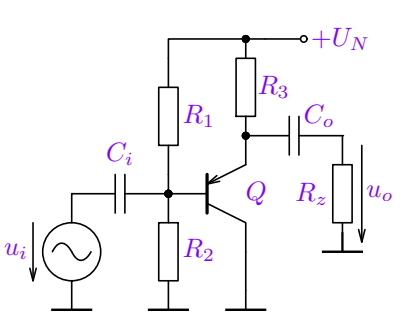
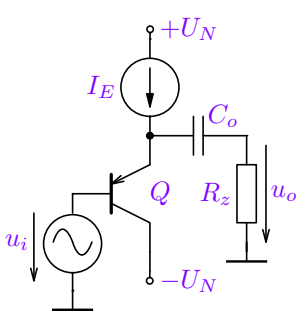
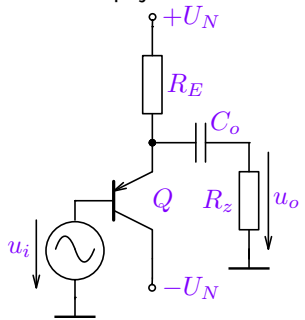
Zapojení 16

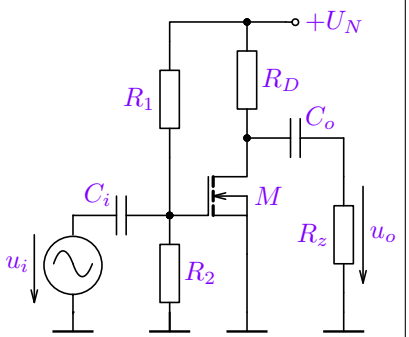
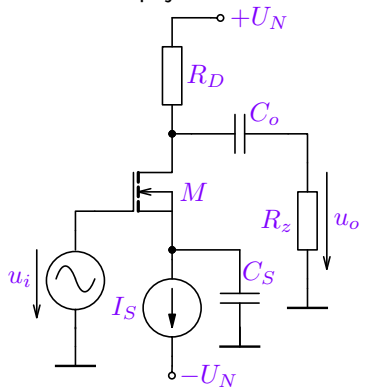
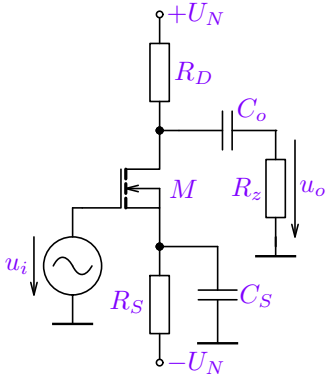


pokračování tabulky na další straně

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

pokračování tabulky z minulé strany

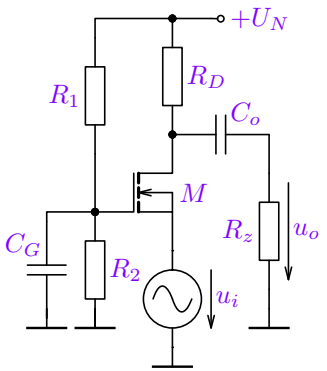
Zapojení 17	Zapojení 18	Zapojení 19
		

Zapojení 21	Zapojení 22	Zapojení 23
		
pokračování tabulky na další straně		

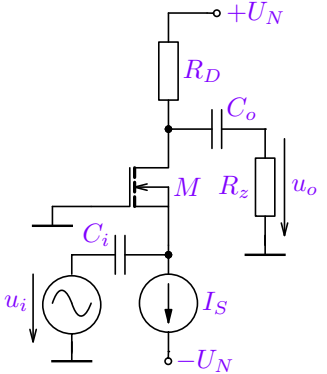
Tabulka U.20: Příklady jednostupňových zesilovačů s unipolárními tranzistory a kanálem typu N.

pokračování tabulky z minulé strany

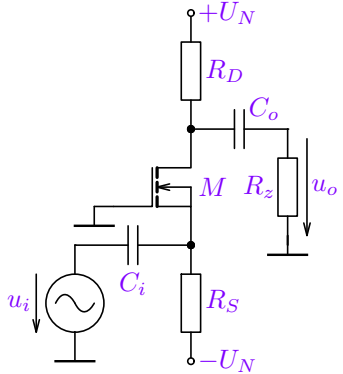
Zapojení 24



Zapojení 25

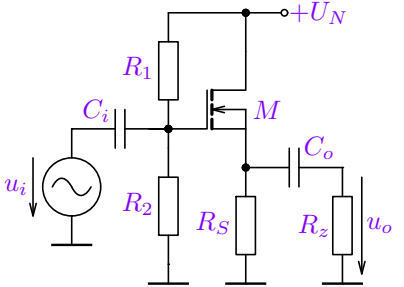
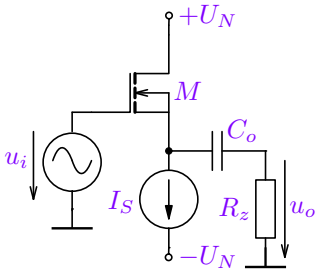
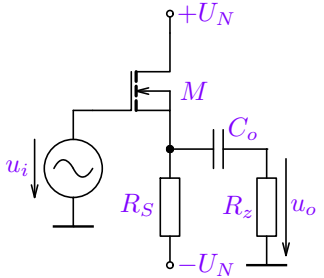


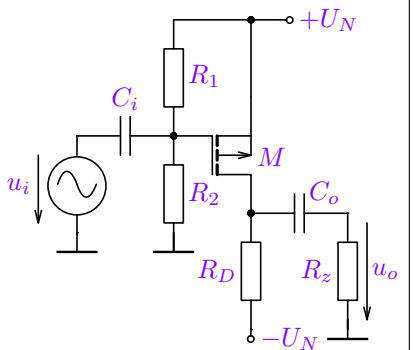
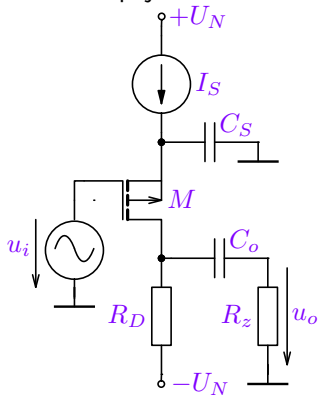
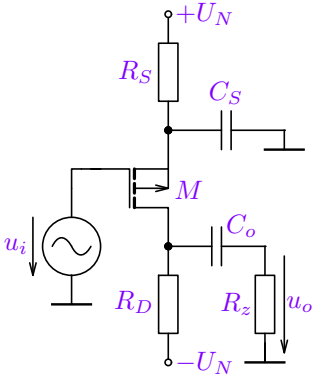
Zapojení 26



pokračování tabulky na další straně

pokračování tabulky z minulé strany

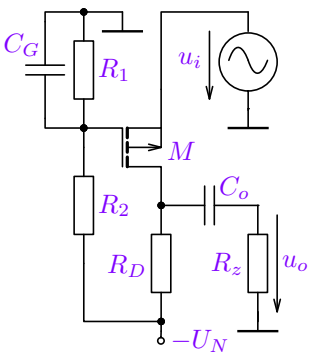
Zapojení 27	Zapojení 28	Zapojení 29
		

Zapojení 31	Zapojení 32	Zapojení 33
		
pokračování tabulky na další straně		

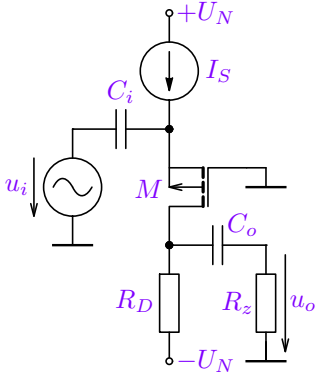
Tabulka U.21: Příklady jednostupňových zesilovačů s unipolárními tranzistory a kanálem typu P.

pokračování tabulky z minulé strany

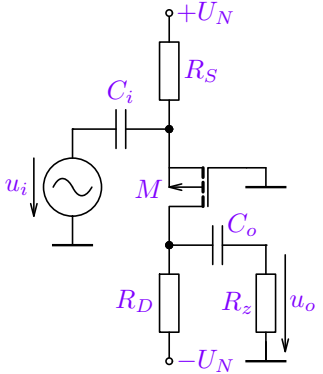
Zapojení 34



Zapojení 35



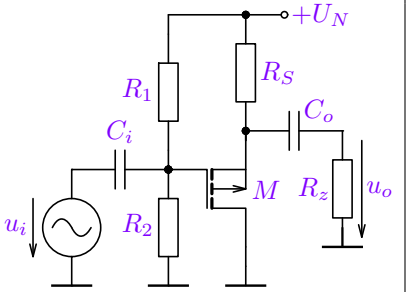
Zapojení 36



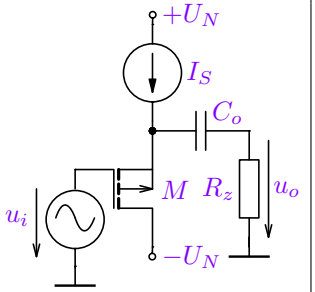
pokračování tabulky na další straně

pokračování tabulky z minulé strany

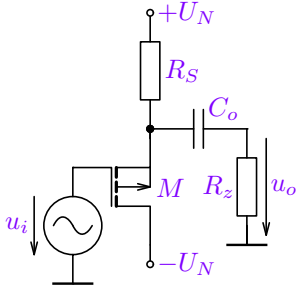
Zapojení 37



Zapojení 38

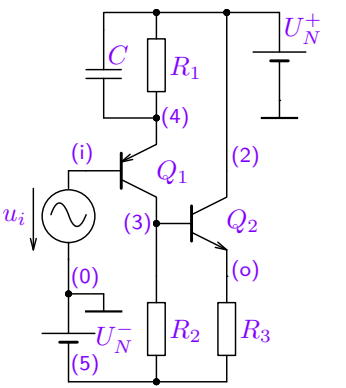
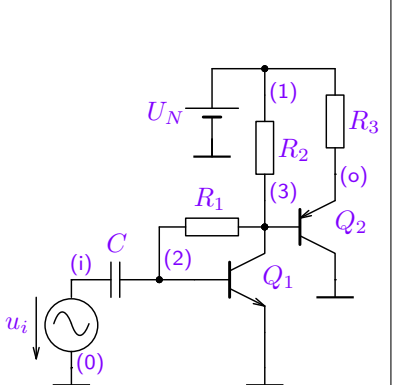


Zapojení 39



U.9. Kombinované (vícestupňové) tranzistorové zesilovače

Zadání: Vypočítejte napěťové zesílení zesilovače a vstupní odpor, případně i výstupní odpor a proudové zesílení nakrátko (pro $R_z = 0$, zapojenému na výstup (o) vůči společné svorce) následujících zapojení kombinovaných tranzistorových zesilovačů pro malé změny obvodových veličin ve středním kmitočtovém pásmu (všechny $C \to \infty$) pro výstupní uzel označen jako (o) a vstupní jako (i). Pro výpočet jsou známy hodnoty všech rezistorů, velikost napájecích napětí (značeno symbolem baterie) a případného proudového zdroje I_1 a proudového zesilovacího činitele bipolárních tranzistorů β (nakrátko v zapojení SE), resp. parametry unipolárního tranzistoru (K_p, U_{TO} W a L). Dále předpokládejte, že napájecí zdroje U_N, případně U_B a I_1 mají nulovou střídavou složku a budící střídavý zdroj u_i má naopak nulovou stejnosměrnou složku. Výsledky lze ověřovat v editoru GEEC.

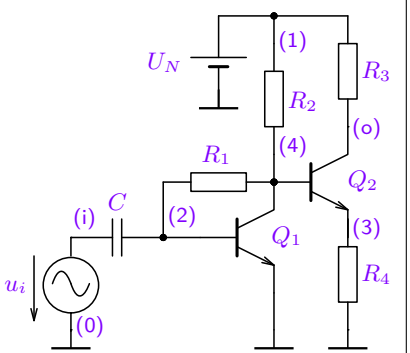
SE-SC 1	SE-SC 2
	

pokračování tabulky na další straně

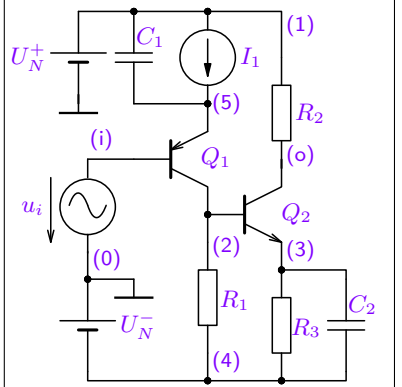
Tabulka U.22: Kombinované zesilovače s bipolárními tranzistory.

pokračování tabulky z minulé strany

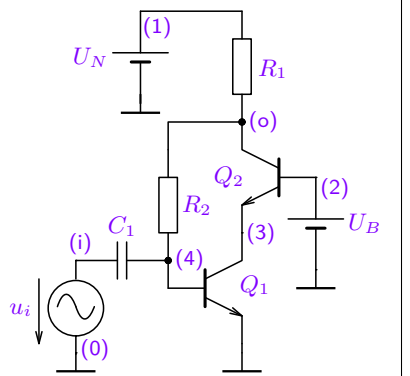
SE-SE 1



SE-SE 2



SE-SB 1

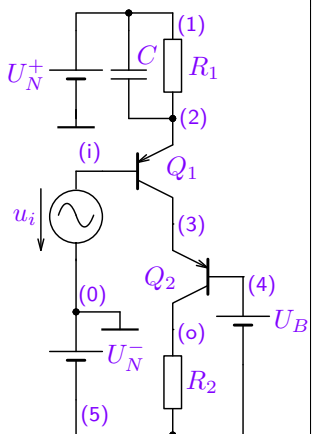


pokračování tabulky na další straně

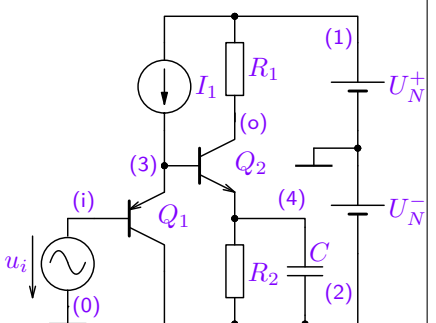
© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

pokračování tabulky z minulé strany

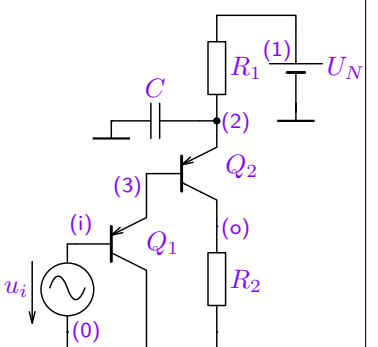
SE-SB 2



SC-SE 1



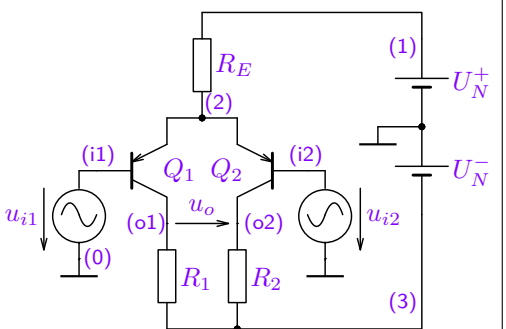
SC-SE 2



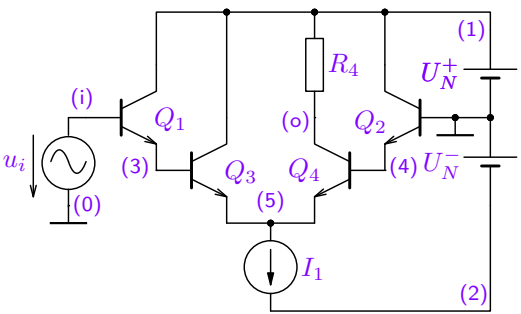
pokračování tabulky na další straně

pokračování tabulky z minulé strany

SC-SB 1

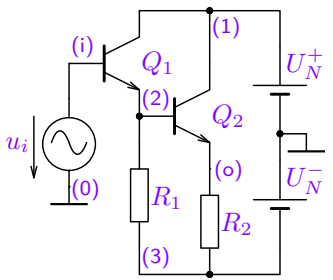
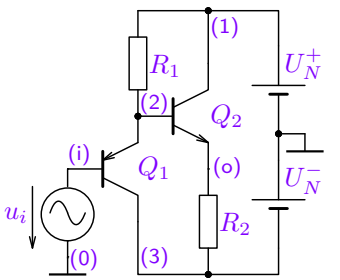
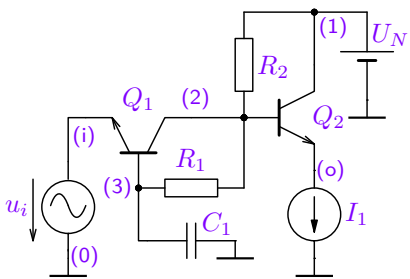


SC-SB 2



pokračování tabulky na další straně

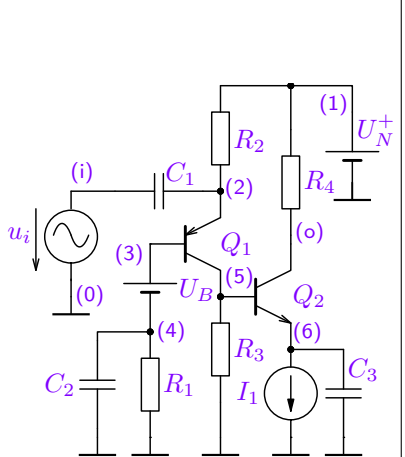
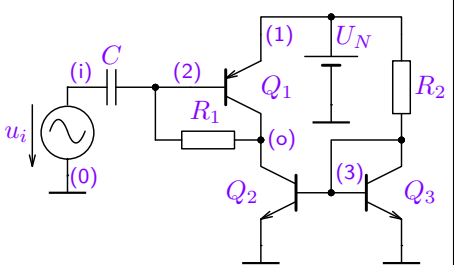
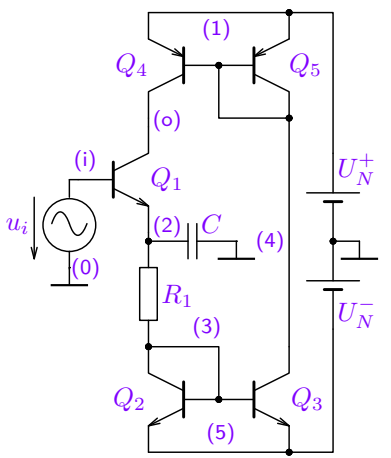
pokračování tabulky z minulé strany

SC-SC 1	SC-SC 2	SB-SC
		

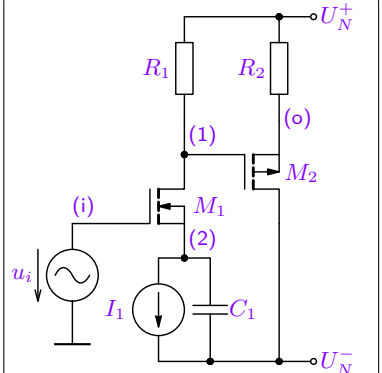
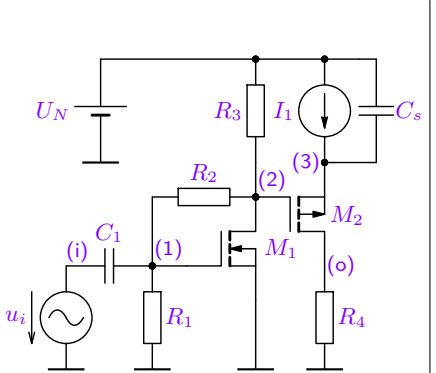
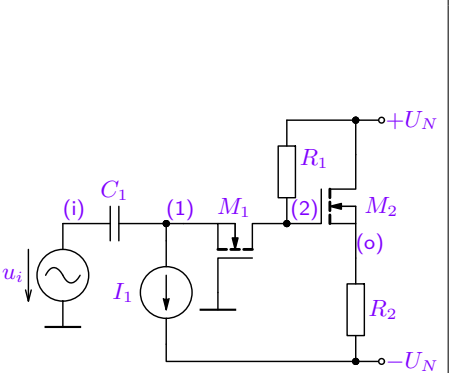
pokračování tabulky na další straně

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

pokračování tabulky z minulé strany

SB-SE	DZ 1	DZ 2
		

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

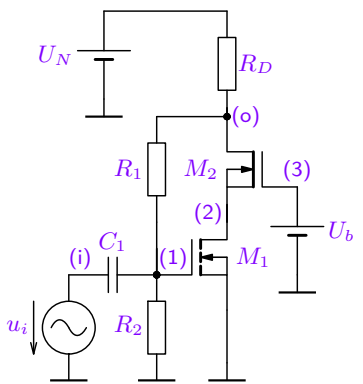
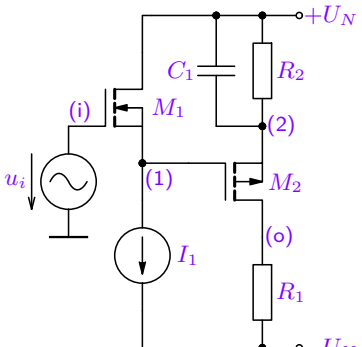
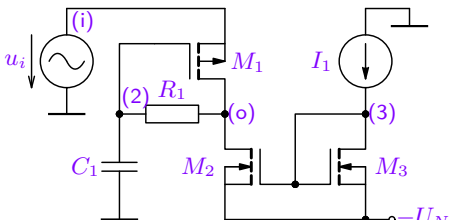
SS-SD	SS-SS	SG-SD
		

pokračování tabulky na další straně

Tabulka U.23: Kombinované zesilovače s unipolárními tranzistory.

© Jiří Hospodka, ČVUT v Praze – FEL

pokračování tabulky z minulé strany

SS-SG	SD-SS	SG-DZ
		

Literatura

[1] Irwin J. D., Nelms R. M.: *Basic engineering circuit analysis*, 11th ed., Wiley, 2015, ISBN-13: 978-1118539293.

[2] Floyd T. L.: *Principles of Electric Circuits, Conventional Current Version*, 8th ed., Pearsen Prentice Hall, ISBN 0-13-170179-7.

[3] Havlíček V., Pokorný M., Zemánek I.: *Elektrické obvody 1*, Monografie ČVUT, Praha 2005.

[4] Mikulec M., Havlíček V.: *Základy teorie elektrických obvodů 2*, vydavatelství ČVUT, Praha 2002, ISBN 80-01-02462-8.

[5] Vlach J., Singhal K.: *Computer Methods for Circuit Analysis and Design*, Van Nostrand Reinhold Company Inc., New York 1994, 2nd Edition, ISBN 0-13-879818-4.

[6] Biolek, D.: *Řešíme elektronické obvody aneb kniha o jejich analýze*, 1. vydání. BEN - technická literatura, Praha 2004, ISBN 80-7300-125-X.

[7] Sedra A. S., Smith K. C.: *Microelectronic Circuits*, 8th edition, Oxford University Press, Inc., New York 2020. ISBN-13: 978-0190853464.

[8] Streetman B. G., Banerjee S. K.: *Solid State Electronic Devices*, 6th Ed. by Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, USA 2006, ISBN-978-81-203-3020-7

[9] Pulfrey D. L., Tarr N. G.: *Introduction to Microelectronic Devices*, Prentice Hall series in solid state physical electronics 1989, ISBN-13: 978-0134881072

[10] Dostál J.: *Operační zesilovače*, BEN – technická literatura, Praha 2005, ISBN 80-7300-049-0.

[11] Boyle, Graeme R., et al: *Macromodeling of Integrated Circuit Operational Amplifiers*, IEEE Journal of Solid State Circuits, Vol. sc-9, no. 6, December, 1974.

[12] Carter B., Mancini R.: *Op Amps for Everyone*, ISBN: 9780128116487

[13] Boylestad R. L., Nashelsky L.: *Electronic Devices and Citcuit Theory*, 11th edition, Pearson Prentice Hall, Ohio 2014. ISBN-13: 978-0132622264 .

[14] Gray P. R., Hurst P. J., Lewis S. H., Meyer R. G.: *Analysis and Design og Analog Integrated Circuits*, 4th edition, John Wiley & Sons, Inc., New York 2001. ISBN 0-471-32168-0.

[15] Bičák J., Laipert M., Vlček M.: *Lineární obvody a systémy*, Učebnice ČVUT, Praha 2007.

[16] Martinek P., Boreš P., Hospodka J.: *Elektrické filtry*, Vydavatelství ČVUT, Praha 2003. ISBN 80-01-02765-1.

[17] Hájek K., Sedláček J.: *Kmitočtové filtry*. Nakladatelství BEN -technická literatura, Praha 2002, ISBN 80-7300-023-7.

[18] Schaumann, R., Valkenburg, M.E.V.: *Design of Analog Filters*, Oxford University Press, 2001.

[19] Hrubý,J., Novák,M.: *Mikroelektronické filtry RC se zesilovači.* Academia, Praha 1976.

[20] Z. Pírko, J. Veit: *Laplaceova transformace*, SNTL, Praha 1972.

[21] P.V. Ananda Mohan, V. Ramachadran and M.N.S. Swamy: *Switched Capacitor Filters –Theory, Analysis and Design.* Prentice Hall, 1995.

[22] Martinek P.: *Analogové mikroelektronické soustavy*, Vydavatelství ČVUT, Praha 1991.

[23] Pressman, Abraham I., Keith H. Billings a Taylor. Morey: *Switching power supply design*, 3rd ed. New York, McGraw-Hill, 2009, ISBN 978-0-07-148272-1.

Rejstřík

Symbols

η II-36
$\tan\delta$ V-58
τ IV-8, IV-17, **IV-21**
g_d XV-5
g_m XV-12, XV-18, XV-19
$h_{fe}(j\omega)$ XV-80
r_π XV-18
r_d XV-6
$r_e i$ XV-19
r_o XV-13, XV-20
555 – časovací obvod ... XVIII-27

A

aproximace amplitudové charakteristiky IX-6
– Butterworth IX-8, IX-21
– Cauer IX-17, IX-23
– inverzní Čebyšev IX-15
– porovnání IX-20, IX-24
– Čebyšev IX-12, IX-22

B

Bandgap XIX-36
– Brokaw XIX-38
– Widlar XIX-39
bikvad .XVII-66, XVII-76, XVII-79
bipolární tranzistor XIII-12
– $R_{CE\mathrm{sat}}$ XIII-21
– α_F XIII-15
– β_F XIII-15
– aktivní režim XIII-14
– charakteristiky XIII-13
– diferenciální odpor r_π ..XV-18
– diferenciální odpor r_e ..XV-19
– dynamický model XIII-19
– Earlyho jev XIII-17
– Earlyho napětí XIII-17
– Ebers-Mollův model ..XIII-14, XIII-18
– Gummel-Poonův model XIII-19
– kmitočtové vlastnosti ..XV-80
– linearizovaný model ...XV-19, XV-21
– matematický popis XIII-15
– model saturace XIII-21
– popis XIII-15

– saturačníní režim XIII-20
– transkonduktance g_m .. XV-18
– výstupní odpor r_o XV-20
Bootstrap
– zesilovač SC XVI-55
– zesilovač SE-SC XVI-39
Bootstrap kapacitor . 134, XVI-39, XVI-55
Brutonova transformace . XVII-54

C

charakteristika
– impulzní VII-7
– kmitočtová **V-25**, VII-10, VIII-29
– – amplitudová/fázová . V-29
– – Bodeho aproximace . V-34
– – hodograf V-26
– – použití V-30
– přechodová VII-6
chlazení prvků 149
citlivost
– Gain-sensitivity product XVII-66
– parametru ω_0 ..... XVII-66
– parametru Q XVII-66
– relativní XVII-66

D

Darlingtonovo zapojení ... XVI-47
DC-DC měnič
– dvojčinný (Push–pull) . XIX-59
– Flyback XIX-55
– Forward XIX-57
– invertor XIX-54
– kombinovaný XIX-54
– regulace XIX-60
– snižující (Buck) XIX-44
– zvyšující (Boost) XIX-49
DC-DC měniče
– integrované XIX-61
Delyiannisovo zapojení ... XVII-70
derivátor
– ideální VIII-16, XI-25
diak XIV-5
Diferenciální evoluce 221
dioda XIII-7, XIV-2
– bariérová kapacita XIII-9
– charakteristika XIII-8
– diferenciální odpor r_d ... XV-6
– difuzní kapacita XIII-9
– emisní koeficient N XIII-8
– linearizovaný model XV-9
– nelineární model XIII-9
– propustný směr XIII-7
– saturační proud I_S XIII-8
– usměrňovač XIX-3
– závěrný směr XIII-7
dolní kmitočtové pásmo DKP XV-37
dolní propust 1. řádu VIII-17
dolní propust 2. řádu VIII-32
– eliptická VIII-35
dvojbran VII-44
– **A** parametry VII-48
– **B** parametry VII-48

– **H** parametry VII-47
– **K** parametry VII-47
– **Y** parametry VII-46
– **Z** parametry VII-45
– admitanční parametry .. VII-46
– aktivnívní VII-54
– bezeztrátový VII-54
– hybridní (smíšené) parametry VII-47
– imitanční parametry ... VII-45
– impedanční parametry . VII-45
– impedančně souměrný . VII-54
– kaskádní (přenosové) parametry VII-48
– neautonomní VII-54
– pasivní VII-54
– přepočet parametrů VII-49
– reciprocitní VII-54
– unilaterální VII-54
– výpočet parametrů 16
dvojitý T-článek XVII-11
dynamická zátěž XVI-36

E

efektivní hodnota I-10, VI-6
elektrické prvky
– induktor **I-16**, V-5, V-9
– kapacitor **I-13**, V-4, V-9
– napěťový zdroj I-19
– proudový zdroj I-20
– rezistor **I-8**, V-3, V-9
– vázané induktory I-22
– řízené zdroje I-21
elektrické veličiny
– admitance V-8
– deformační výkon VI-8
– energetické IV-3
– imitance V-8
– impedance V-8
– indukčnost I-17
– jalový výkon V-15, VI-8
– kapacita I-14
– konduktance V-8
– magnetický tok I-17
– napětí I-2
– náboj I-2, I-14
– odpor I-9
– okamžitý výkon I-5, V-13
– proud I-4
– práce I-5
– reaktance V-8, V-47
– rezistance V-8
– rozdělení I-6
– susceptance V-8
– vodivost I-9
– vzájemná indukčnost I-22
– výkon I-10, II-31
– zdánlivý výkon V-15, VI-8
– činný výkon V-14, VI-7
eliptické filtry IX-17
Evoluční algoritmy 219

F

filtr ..... *viz* kmitočtový filtr
fázor V-7
fázorový diagram V-9, V-12
fázovací článek 1. řádu ... VIII-21

fázovací článek 2. řádu ... VIII-38
fázový detektor XVIII-37
fázový závěs XVIII-35
– aplikace XVIII-45
– demodulátor AM XVIII-47
– demodulátor FM XVIII-45
– dynamické vlastnosti XVIII-41
– kmitočtový syntetizér XVIII-45
– princip činnosti XVIII-36

G

generátor funkcí XVIII-31
GIC XVII-51
Graetzův můstek XIX-5
gyrátor XVII-57

H

H můstek XIV-21
homogenní rovnice IV-6
homogenní vedení XX-3
– rychlost šíření v XX-5
– vlnové rovnice XX-4
– vlnový odpor R_0 ..... XX-6
– činitel odrazu ρ XX-7
horní kmitočtové pásmo HKP XV-37
horní propust 1. řádu VIII-18
horní propust 2. řádu VIII-33
– eliptická VIII-36
hradlo CMOS
– invertor XIV-29
– NAND XIV-31
– NOR XIV-31

I

IGBT XIV-23
impedanční konvertor XI-28, XVII-51, XVII-70
integrátor
– ideální VIII-15
– invertující XI-22
– neinvertující XI-24
– reálný .. XII-12, XII-23–XII-25
– ztrátový XI-23
izolační zesilovač XI-29

K

kapacitní matice 32
klopný obvod
– astabilní .. XVIII-21, XVIII-24, XVIII-29
– monostabilní XVIII-26, XVIII-28
kmitočtová syntéza XVIII-45
kmitočtová transformace
– dolní propust IX-36
– horní propust IX-37
– normovaná dolní propust IX-36
– pásmová propust IX-38
– pásmová zádrž IX-42
kmitočtové odnormování . XVII-27
kmitočtový filtr IX-1, XVII-1
– dolní propust XVII-67
– horní propust XVII-69
– pásmová propust XVII-70
– simulace LC prototypu XVII-50

– bikvad XVII-66, XVII-76, XVII-79
– dvojbranové parametry XVII-21
– dvojitý T-článek XVII-11
– ideální dolní propust ... VIII-2
– ideální horní propust ... VIII-2
– ideální pásmová propust VIII-2
– ideální pásmová zádrž .. VIII-2
– kaskádní syntéza XVII-65
– LC 2. řádu XVII-15
– LC implementace XVII-14
– přemostěný T-článek . XVII-10
– přenosové funkce VIII-1
– RC implementace XVII-3
– syntéza zapojení NLP XVII-25
– transformace prvků NLP XVII-27
– Wienův článek XVII-9
komparátor XI-36
komparátor s hysterezí
– invertující XI-39
– neinvertující XI-40
koncový stupeň
– můstkové zapojení ... XVI-102
– rozdělení základních tříd XVI-87
– třída A XVI-85
– – účinnost η XVI-86
– třída B
– – účinnost η XVI-94, XVI-103
– třída B (AB) XVI-88
– třída B vs. D XVI-103
– třída C XVI-99
– třída D XVI-100
– – účinnost η XVI-103
– třída G (H) XVI-98
konvoluce **VII-8**, VII-13

L

laboratorní zdroj . XIX-26, XIX-30
Laplaceova transformace .. VII-12
– obrazy VII-15
– použití VII-16
– vlastnosti VII-14
lineární zesilovač XV-2

M

matice obvodu 3
– zařazení C 12
– zařazení CCCS 9, 25
– zařazení CCVS 7, 24
– zařazení IOZ 10, 30
– zařazení L 14
– zařazení R 4
– zařazení V 11, 23
– zařazení VCCS 8
– zařazení VCVS 6, 19, 28
matice SC obvodu 32
– zařazení IOZ 37
– zařazení VCVS 38
matice SI obvodu 43
– zařazení paměťové buňky .. 45
maticový popis obvodu 1
metoda

– dělení řetězce XVI-117
– linearizace XV-4
– – BJT XV-16
– – dioda XV-5
– – FET XV-10
– smyčkových proudů III-5
– superpozice II-29
– uzlových napětí III-3
– uzlových nábojových rovnic 32
– zjednodušování II-17
– časových konstant pro f_d XV-75
– časových konstant pro f_h XV-85
mezní kmitočet
– dolní f_d XV-73
– horní f_h XV-82
Millerova kapacita XV-83
Millerův teorém XV-81
multivibrátor .. XVIII-21, XVIII-24
měření
– ARC filtru 167
– DC-DC měničů 160
– filtru se spínanými kapacitory 172
– fázového závěsu 235
– na operačním usměrňovači . 93
– na rozdílovém zesilovači .. 104
– na výkonovém zesilovači AB 106
– parametrů operačního zesilovače 69
– stabilizátorů 154
– výkonového D zesilovače . 145
– zesilovač s BJT 98
– zesilovač s MOSFET 101
– ZV systém 59
– základní zapojení s OZ 66

N

napájecí zdroj
– nespínaný XIX-2
napájecí zdroje XIX-1
napěťový odporový dělič II-17
napěťový činitel přenosu . XVII-20
netlist 2
nuly přenosové funkce **VIII-13**
nábojová pumpa XIX-41
násobič napětí XIX-42

O

obvod
– Nortonův náhradní II-25
– paralelní rezonanční V-51
– s rozprostřenými parametry XX-3
– sériový rezonanční V-46
– Theveninův náhradní II-24
obvody se spínanými kapacitory *viz* SC obvod
odstup signál-šum VI-16
operační usměrňovač XI-31
operační zesilovač
– $A_d(j\omega)$ XII-19
– CMRR XII-17
– ideální XI-5

– – analýza XI-9
– invertující sumátor XI-10
– invertující zesilovač XI-7
– konečné zesílení A_d XII-13
– lineární model ... XII-6, XII-34
– měření dignálů EKG 84
– měření parametrů 69
– neinvertující sumátor ... XI-12
– neinvertující zesilovač XI-7
– offset XII-9
– parametry XII-8, XII-40
– převodník u-i XI-14
– rozdílový zesilovač XI-20
– rychlost přeběhu SR ... XII-27
– vnitřní zapojení XVI-104
– vstupní proudy XII-11
– časová odezva XII-22
optimalizace 217
– Diferenciální evoluce 221
– Evoluční algoritmy 219
– účelová funkce 223
oscilátor XVIII-2
– Clappův XVIII-15
– Colpittsův XVIII-11
– Hartleyův XVIII-15
– krystalový XVIII-16
– můstkový XVIII-8
– napětím řízený XVIII-33
– s malým zkreslením .. XVIII-18
– s posouvanou fází XVIII-5
– s tunelovou diodou ... XVIII-3
– s Wienovým článkem . XVIII-9
– s přemostěným T-článkem XVIII-10

P

PN přechod XIII-4
– polarizace XIII-6
– rozložení náboje XIII-5
polovodič XIII-2
– nevlastní XIII-3
– vlastní XIII-2
počáteční hodnota .. IV-3, **IV-21**, IV-26
pracovní bod
– BJT XV-17, XV-24
– dioda XV-5
– FET XV-11, XV-30
proudová zrcadla
– dvojité s BJT XVI-30
– dvojité s FET XVI-33
– s Wilsonovo FET XVI-25
– srovnání XVI-34
– Wilsonovo s BJT XVI-20
– základní XVI-12
– základní a kompenzací i_B XVI-19
proudový konvejor (CC) **XVII-43**, XVII-84
proudový odporový dělič II-18
proudový zdroj
– s tranzistorem XVI-2
– s tranzistorem a aktivní ZZV XVI-9
– s tranzistorem a ZZV .. XVI-4

provozní činitel přenosu . XVII-20, XVII-21
PWM modulátor 119
pásmová propust 2. řádu .. VIII-34
pásmová zádrž 2. řádu VIII-37
póly přenosové funkce VII-15, **VIII-13**
přechodné děje IV-1
– 1. řádu IV-3, IV-21
– 2. řádu IV-25
přemostěný T-článek XVII-10
přenos VII-13
přenosová funkce VII-13
– nuly VIII-13
– póly VIII-13
přístrojový zesilovač XI-21

R

referenční zdroj XIX-35
rezonance V-44
– napěťová V-46
– proudová V-51
– rezonanční kmitočet V-46
rozdílový zesilovač XI-15
– CMRR XI-19
– ideální XI-17
– reálný XI-19
– rozdílové zesílení A_d XI-19
– s operačním zesilovačem XI-20
– souhlasné zesílení A_d ... XI-19

S

Sallen–Key XVII-67, XVII-69
Sample & Hold XI-30
SC biquad XVII-108
SC induktor .. XVII-112, XVII-113
SC integrátor XVII-101
– strays-insensitive XVII-105
SC obvod XVII-89
– maticová analýza 32
– popis XVII-96
– princip XVII-91
– přenosy XVII-98
– Spice analýza 56
SI biquad XVII-120
SI integrátor XVII-117
SI obvod
– maticová analýza 43
– Spice analýza 56
– výpočet přenosů 46
SI paměťová buňka XVII-115
Σ-Δ modulátor 121
Σ-Δ modulátor
– implementace 131
– kvantizační šum 129
– vlastnosti 127
SINAD VI-16
smyčka III-2
SNR VI-16
Solid State Relay XIV-13
spínač
– analogový XIV-25
– tranzistorový jednosměrný XIV-14
stabilita
– LTI systému ... VII-15, VIII-30

– Nyquistovo kritérium X-31
– ZZV soustavy 31, X-31
stabilizátor XIX-7, XIX-11
– dynamické parametry . XIX-10
– LDO XIX-27
– LM78xx XIX-32
– LT3086 ..... XIX-33
– napětí XIX-20, XIX-25
– proudu XIX-22, XIX-25
– převodní charakteristika XIX-8
– se Zenerovou diodou .. XIX-12
– výstupní odpor XIX-9
– zatěžovací charakteristika XIX-9
– zpětnovazební XIX-19
– činitel stabilizace XIX-8
stabilizátory
– integrované XIX-31
střední hodnota I-11
střední kmitočtové pásmo SKP XV-37
systém VII-2
– klasifikace VII-3
– LTI VII-4
– – přenos VII-13
systém 1. řádu ... VIII-14, VIII-19
systém 2. řádu VIII-22

T

teorém
– Nortonův II-25
– Theveninův II-24
THD VI-15
THD+N VI-16
toleranční schéma
– dolní propust IX-4
transformátor I-27
– model I-27
– převod I-23
transimpedanční zesilovač .. X-14, **X-25**
transimpedanční zesilovač (TIA) **XVII-47**
transkonduktanční zesilovač (OTA) **XVII-41**, XVII-61, XVII-82
tranzistorové stupně XVI-1
– kaskoda (SE-SB) XVI-42
– napěťový sledovač XVI-56
– rozdílový zesilovač
– – aktivní dynamická zátěž XVI-75
– – aktivní dynamická zátěž s kaskodou XVI-81
– – dynamická zátěž .. XVI-73
– rozdílový zesilovač s BJT XVI-61
– – CMRR ... XVI-66, XVI-79
– – napěťový offset U_{os} XVI-82
– – převodní charakteristika XVI-62
– rozdílový zesilovač s FET XVI-68
– – CMRR XVI-71

– – napěťový offset U_{os} XVI-83
– – převodní charakteristika XVI-69
– SC-SB XVI-60
– SC-SC XVI-53
– SC-SE XVI-48, XVI-60
tranzistorový zesilovač
– souhrnné parametry ... XV-71
– zapojení SB XV-55
– zapojení SC XV-63
– zapojení SD XV-68
– zapojení SE XV-39
– zapojení SG XV-59
– zapojení SS XV-47
triak XIV-10
triaková regulace XIV-12
tyristor XIV-6
tyristorová regulace XIV-8

U

unipolární tranzistor
– R_{DS} XIII-38
– λ XIII-33, XIII-34
– JFET XIII-28
– – K_β XIII-34
– – charakteristiky XIII-30
– – transkonduktance g_m XV-12
– linearizovaný model ... XV-13
– matematický popis XIII-32
– modely XIII-36
– MOSFET XIII-22
– – C_{ox} XIII-33
– – K_p XIII-33
– – charakteristiky XIII-24
– – délka kanálu L XIII-33
– – transkonduktance g_m XV-12
– – šířka kanálu W ... XIII-33
– prahové napětí U_{TO} .. XIII-33, XIII-34
– saturační oblast XIII-32
– schématické značení .. XIII-27
– spínací režim XIII-37
– tabulka vlastností XIII-35
– transkonduktance g_m .. XV-11
– vodivostní oblast XIII-32
– výstupní odpor r_o XV-13
usměrňovač XIX-3
– dvoucestný XIV-3, XIX-5
– filtrace XIX-18
– jednocestný ... XIII-10, XIX-3
ustálený stav
– harmonický V-1
– periodický neharmonický . VI-1
– stejnosměrný II-13
uzel III-2

V

VCO XVIII-33
vnitřní zapojení OZ
– napěťové zesílení XVI-117
– nastavení pracovního bodu XVI-116
– Rail-to-Rail Input XVI-126

– Rail-to-Rail Input/Output XVI-129
– symetrický výstup ... XVI-131
vzorkovací obvod XI-30
vícefázové obvody v HUS ... V-60
výkonové přizpůsobení II-37, V-22
větev III-2

W

Wienův článek XVII-9

Z

zdroj
– napěťový II-33
– proudový II-34
– spínaný XIX-40
– výkonová bilance II-36
– zatěžovací charakteristika II-35
zesilovač absolutní hodnoty .XI-34
zesilovač třídy D
– budič koncových tranzistorů 133
– – Bootstrap 134
– – Dead-time 136
– komutační proudy 137
– modulátor PWM 119
– modulátor Σ-Δ 121
– princip 117
– pumpování napájecího napětí 140
– rušení 143
– samooscilující modulátor . 120
zkratový proud 21, 27
zpětná vazba
– doplňkový zisk X-33
– fázová jistota X-33
– klasifikace X-3
– obecné uspořádání X-8
– obvodové uspořádání X-4
– paralelní proudová X-6
– princip X-2
– sériová napěťová X-5
– vliv ZZV na ω_c ... X-23, X-25
– vliv ZZV na A' X-2
– vliv ZZV na dA' X-16
– vliv ZZV na Z_{in}, Z_{out} ... X-7
– vliv ZZV na linearitu X-19
– vliv ZZV na póly $H(s)$ .. X-30
– vliv ZZV na šum X-17
zákon
– 1. Kirchhoffův II-2
– 2. Kirchhoffův II-3
– Ohmův **I-9**, V-8

účelová funkce 223
účinnost II-36
účiník V-19

časovací obvod 555 ..... XVIII-27
časová konstanta IV-8, IV-17, **IV-21**
činitel
– harmonického zkreslení . VI-15
– jakosti cívky V-58
– jakosti PRO V-52
– jakosti SRO V-49
– odrazu ρ XX-7
– stabilizace XIX-8

– ztrátový $\tan\delta$ V-58
činitel přenosu *viz* provozní činitel přenosu

řazení prvků II-4
– paralelní II-5, II-7, II-9
– sériové II-4, II-6, II-8
– zdrojů napětí II-10
– zdrojů proudu II-11
šum 109
– blikavý 113
– bílý 112
– efektivní hodnota 111
– kvantizační 124
– mezivrcholová hodnota ... 111
– PN přechodu 113
– rezistoru 112
– výstřelový 113
šumová analýza 115

Právní doložka (licence) k tomuto Dílu (elektronický materiál)

Autor poskytuje podle autorského zákona, v platném znění, oprávnění k užití tohoto Díla pouze ke studijním účelům. Uživateli je povoleno ponechat si Dílo výhradně pro vlastní osobní potřebu.

Toto Dílo ani jeho část nesmí být bez souhlasu autora dále šířena (elektronicky, tiskově, vizuálně a jiným způsobem), využívána k prezentačním účelům nebo školením, a to ani jako doplňkový materiál. Dílo nebo jeho část nesmí být bez souhlasu autora využívána ke komerčním účelům. Současně není dovoleno jakýmkoliv způsobem manipulovat s obsahem materiálu, zejména měnit jeho obsah včetně elektronických popisných dat, odstraňovat nebo měnit zabezpečení včetně vodoznaku a odstraňovat nebo měnit tyto licenční podmínky.

V případě, že Uživatel nebo jiná osoba, která drží toto Dílo (Držitel díla), nesouhlasí s touto licencí, nebo je touto licencí vyloučena z užití Díla, je jeho povinností zdržet se užívání Díla a je povinen toto Dílo trvale odstranit včetně veškerých kopií (elektronické, tiskové, vizuální, audio a zhotovených jiným způsobem) z elektronického zařízení a všech záznamových zařízení, na které jej Držitel díla umístil.